CLAUDE CHEVALLEY

Certains schémas de groupes semi-simples

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. n° 219, p. 219-234
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__219_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 219

Mai 1961

CERTAINS SCHÉMAS DE GROUPES SEMI-SIMPLES

par Claude CHEVALLEY

1. Schémas de groupes.

Si C est une catégorie et $X \in \mathrm{Ob}\, C$, une structure de groupe sur X consiste, par définition, en la donnée, pour tout $Y \in \mathrm{Ob}\, C$, d'une structure de groupe sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_C(Y, X)$, ces structures de groupes satisfaisant à la condition suivante : si $\eta : Y \to Y'$ est un morphisme de C, l'application $\xi' \rightsquigarrow \xi' \eta$ de $\mathrm{Hom}_C(Y', X)$ dans $\mathrm{Hom}_C(Y, X)$ est un homomorphisme de groupes. Dans ce qui suit, nous ne nous intéresserond qu'au cas où C est la catégorie des schémas affines sur un anneau commutatif K ; aussi appellerons-nous schémas sur K les schémas affines sur K et <u>schéma de groupes sur</u> K une structure de groupe sur un schéma affine sur K.

Revenant pour un instant au cas d'une catégorie quelconque, C, supposons données des structures de groupes G et G' sur des objets X et X' de C. Un homomorphisme de G dans G' est, par définition, un morphisme $\varphi : X \to X'$ dans C tel que, pour tout $Y \in \mathrm{Ob}\, C$, l'application $\xi \to \varphi\xi$ de $\mathrm{Hom}(Y, X)$ dans $\mathrm{Hom}(Y, X')$ soit un homomorphisme de groupes.

Soit $\mathfrak{G}$ un schéma de groupes sur K, et soit P son algèbre affine. Le produit dans $\mathrm{Hom}(\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ des deux projections pr_1 et pr_2 de $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}$ est un morphisme $m : \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ dont la connaissance détermine la structure de groupe de $\mathfrak{G}$, car, pour tout schéma affine $\mathfrak{S}$ sur K, la multiplication dans $\mathrm{Hom}(\mathfrak{S}, \mathfrak{G})$ est donnée par la formule $(\xi_1, \xi_2) \rightsquigarrow m \circ (\xi_1 \times \xi_2)$. Le morphisme m se traduit par un homomorphisme d'algèbres $\mu : P \to P \otimes P$.

L'élément neutre de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, K, \mathfrak{G})$ est un morphisme $e : \mathrm{Spec}\, K \to \mathfrak{G}$ qui se traduit en un morphisme $\varepsilon : P \to K$. L'anneau local du noyau de ε s'appelle <u>l'anneau local de l'élément neutre de</u> $\mathfrak{G}$.

EXEMPLE. - Soit M un module libre de rang fini sur K. Désignons par E le module des endomorphismes de M, par E^* le dual de E, et par S l'algèbre symétrique de E^*. La composition des endomorphismes fournit une application linéaire $E \times E \to E$, d'où une application linéaire $E^* \to E^* \times E^*$ et un homomorphisme d'algèbres $\mu_S : S \to S \otimes S$. A toute base de M correspond canoniquement une base de E , donc une base (ξ_{ij}) de E^* , et l'élément $D = \det(\xi_{ij}) \in S$ ne dépend pas du choix de la base de M ; de plus, on voit facilement que l'application canonique de S dans son anneau de fractions $P = S[D^{-1}]$ est injective, ce qui permet d'identifier S à une sous-algèbre de P , puisque μ_S se prolonge en un homomorphisme $\mu : P \to P \otimes P$. Enfin, on démontre que μ définit une structure de schéma de groupes sur K admettant P comme algèbre affine ; on désigne ce schéma de groupes par $\mathfrak{GL}(M)$.

Soit maintenant Γ un groupe d'automorphismes de M . Les éléments de P définissent des fonctions à valeurs dans K sur le groupe des automorphismes de M ; ceux des éléments de P dont la fonction associée est nulle sur Γ forment un idéal $\mathfrak{I}$ de P , et on a $\mu(\mathfrak{I}) \subset \mathfrak{I} \otimes P + P \otimes \mathfrak{I}$; il en résulte que μ définit par passage aux quotients un homomorphisme $\bar{\mu}$ de $\bar{P} = P/\mathfrak{I}$ dans $\bar{P} \otimes \bar{P}$, et on voit tout de suite que cet homomorphisme définit un schéma de groupes $\mathfrak{G}$ sur K admettant $\bar{P}$ comme algèbre affine ; on dit que $\mathfrak{G}$ <u>est le shéma de groupes sur K associé à</u> Γ . Il est clair que $\mathfrak{G}$, en tant que schéma, est un sous-schéma de $\mathfrak{GL}(M)$ et que l'injection canonique $\mathfrak{G} \to \mathfrak{GL}(M)$ est un homomorphisme de schémas de groupes ; on exprime ces faits en disant que $\mathfrak{G}$ est un <u>sous-schéma de groupes</u> de $\mathfrak{GL}(M)$.

Supposons maintenant que K soit un corps algébriquement clos. Soit $\mathfrak{G}$ un schéma de groupes quelconque sur K , d'algèbre affine P . On montre alors que, pour que $\mathfrak{G}$ soit associé à un groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel V de dimension finie sur K , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

1° P est de type fini sur K ;

2° P ne contient aucun élément nilpotent différent de 0 (il suffit même que l'anneau local de l'élément neutre ne contienne aucun élément nilpotent différent de 0).

Revenons au cas où K est un anneau commutatif quelconque. Soient $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}'$ des schémas en groupes sur K et h un homomorphisme de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}'$. En tant que morphisme de schémas, h admet une image fermée $\mathfrak{H}$, qui est un sous-schéma de $\mathfrak{G}'$. On voit facilement que $\mathfrak{H}$ peut être muni d'une structure de schéma de groupes, et d'une seule, telle que l'injection canonique $i : \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}'$ soit un homomorphisme ; $\mathfrak{H}$ devient donc un sous-schéma de $\mathfrak{G}'$, qu'on appelle l'<u>image de l'homomorphisme</u> h . Le morphisme h se met sous la forme $h = i \circ h_1$, où h_1 est un épimorphisme de schémas: $\mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$; h_1 est un homomorphisme de schémas de groupes.

Soient maintenant K un anneau commutatif et L une algèbre sur K. Soit $\mathfrak{G}$ un schéma de groupes sur K, et soit $\mathfrak{G}_L$ le schéma sur L qui s'en déduit par extension des scalaires. La multiplication $m : \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ définit un morphisme de schémas $m_L : \mathfrak{G}_L \times \mathfrak{G}_L$. On vérifie facilement que m_L définit sur $\mathfrak{G}_L$ une structure de schéma en groupes sur L ; on dit que $\mathfrak{G}_L$ est le <u>schéma de groupes déduit de</u> $\mathfrak{G}$ <u>par extension à</u> L <u>des scalaires</u>. Soit $\mathfrak{S}$ un schéma sur K ; l'application canonique $h \to h_L$ de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{S}, \mathfrak{G})$ dans $\mathrm{Hom}(\mathfrak{S}_L, \mathfrak{G}_L)$ est un homomorphisme pour les structures de groupes de ces deux ensembles. Par ailleurs, si $\mathfrak{S}$ est un schéma de groupes sur K, et si h est un homomorphisme de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{G}$, h_L est un homomorphisme de schémas de groupes sur L. Si $\mathfrak{H}$ est un sous-schéma de groupes de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_L$ s'identifie à un sous-schéma de groupes de $\mathfrak{G}_L$.

Donnons-nous maintenant un sous-schéma en groupes $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{G}_L$. On peut alors associer à $\mathfrak{K}$ un sous-schéma en groupes de $\mathfrak{G}$ qui se définit comme suit : $\mathfrak{G}_L$ est muni d'une structure de schéma (pas de schéma en groupes !) sur K, et il y a un morphisme canonique $p : \mathfrak{G}_L \to \mathfrak{G}$; on voit alors facilement que le sous-schéma de $\mathfrak{G}$ image fermée de $\mathfrak{K}$ par p est un sous-schéma en groupes de $\mathfrak{G}$.

Dans la suite de cet exposé, nous appellerons simplement schémas, ou schémas en groupes, les schémas, ou schémas en groupes, sur $\mathbb{Z}$.

2. <u>Le principal résultat</u>.

Le problème dont nous nous occupons est le suivant : définir, pour chaque type de groupe semi-simple complexe Γ, un schéma en groupes $\mathfrak{G}$ sur $\mathbb{Z}$ tel que, pour tout corps algébriquement clos F, le schéma de groupes $\mathfrak{G}^F$ sur F déduit de $\mathfrak{G}$ par extension à F du corps de base soit associé au groupe semi-simple Γ^F sur F homologue de Γ (on sait que la classification des groupes semi-simples sur des corps algèbriquement clos se fait au moyen d'invariants qui ne dépendent pas du corps, d'où la possibilité de comparer des groupes sur des corps différents). Le problème a été partiellement résolu par T. ONO ([3]) qui associe à tout groupe semi-simple complexe Γ qui est son propre groupe adjoint un schéma en groupes $\mathfrak{G}$ tel que, pour tout corps algébriquement clos Γ, $\mathfrak{G}^F$ soit associé à un groupe algébrique admettant Γ^F comme composante algébrique de l'élément neutre (les résultats de ONO ne sont pas exprimés dans le langage des schémas, mais équivalent à ce qu'on vient de dire). Nous montrons que le problème ci-dessus formulé admet une solution ; il resterait encore à caractériser cette solution par des conditions convenables imposées <u>a priori</u>.

Au lieu de partir, dans ce qui suit, des groupes semi-simples complexes, nous utilisons les groupes algébriques semi-simples sur $\underset{\sim}{Q}$ dont les algèbres de Lie sont "anticompactes" (Cf. n° 3), ce qui revient au même, mais est plus commode pour ce que nous voulons faire.

3. Groupes linéaires semi-simples anticompacts sur $\underset{\sim}{Q}$.

Nous supposerons donnée une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$ sur le corps $\underset{\sim}{Q}$ qui possède la propriété suivante : il existe une algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que, pour tout $h \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h$ soit un endomorphisme diagonalisable de $\mathfrak{g}$; nous dirons alors que $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Cartan " décomposée" de $\mathfrak{g}$; nous appellerons anticompactes les algèbres de Lie semi-simples qui admettent des algèbres de Cartan décomposées. Les algèbres de Lie semi-simples anticompactes se classifient exactement de la même manière que les algèbres de Lie semi-simples complexes ; en fait, deux algèbres de Lie semi-simples anticompactes sur $\underset{\sim}{Q}$ sont isomorphes si leurs "complexifications" sont isomorphes.

Nous supposerons choisie une algèbre de Cartan décomposée $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Les notions de racine, ou de poids d'une représentation, se définissent comme pour les algèbres de Lie complexes. A chaque racine α on peut associer un élément x_α appartenant à α (i. e. on a $[h, x_\alpha] = \alpha(h)\, x_\alpha$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$) de telle manière que les conditions suivantes soient satisfaites :

1° pour toute racine α, si on désigne par h_α l'élément $[x_\alpha, x_{-\alpha}]$ de $\mathfrak{h}$, on a $\alpha(h_\alpha) = 2$;

2° si α, β, $\alpha + \beta$ sont des racines, on a

$$[x_\alpha, x_\beta] = \pm (p+1)\, x_{\alpha+\beta}$$

où p est le plus grand entier tel que $\beta - p\alpha$ soit une racine.

On dit alors que les x_α forment un système d'éléments radiciels normalisés ; nous supposerons choisis des éléments x_α satisfaisant à ces conditions.

L'algèbre $\mathfrak{g}$ peut se représenter comme somme directe de $\mathfrak{h}$ et de deux sous-algèbres nilpotentes $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}'$ telles que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{u}] \subset \mathfrak{u}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{u}'] \subset \mathfrak{u}'$. Nous supposerons choisies des sous-algèbres satisfaisant à ces conditions. On sait que chacun des espaces $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}'$ est engendré par ceux des x_α qu'il contient. De plus, il existe sur le dual de $\mathfrak{h}$ une structure d'espace vectoriel (totalement) ordonné telle que les conditions $\alpha > 0$, $x_\alpha \in \mathfrak{u}$ (sur une racine α) soient équivalentes.

Soit V l'espace d'une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$, que nous désignerons par ρ_V ; posons

$$\mathfrak{g}_V = \rho_V(\mathfrak{g}) \ , \quad \mathfrak{u}_V = \rho_V(\mathfrak{u}) \ , \quad \mathfrak{u}'_V = \rho_V(\mathfrak{u}') \ , \quad \mathfrak{h}_V = \rho_V(\mathfrak{h}) \quad .$$

L'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}_V$ et les algèbres nilpotentes $\mathfrak{u}_V$ et $\mathfrak{u}'_V$ sont algébriques ([1], IV, § 2, n°2, corollaire à la proposition 9, et V, § 3, n°4, prop. 14) ; ce sont les algèbres de Lie de groupes algébriques irréductibles Γ_V, U_V, U'_V d'automorphismes de V. L'algèbre $\mathfrak{h}_V$ est une algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_V$; c'est l'algèbre de Lie d'un groupe de Cartan H_V de Γ_V.

L'algèbre $\mathfrak{g}_V$ est anticompacte ; l'application $\alpha_V \rightsquigarrow \alpha_V \circ \rho'_V$ (où ρ'_V est la restriction de ρ_V à $\mathfrak{h}_V$) est une injection de l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}_V$ dans l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$. Nous désignerons par $S(V)$ (resp. $S(+ ; V)$, $S(- ; V)$) l'ensemble des racines (resp. des racines > 0, des racines < 0) de $\mathfrak{g}$ qui sont de la forme $\alpha_V \circ \rho'$. Tout élément de U_V (resp. U'_V) se met d'une manière, et d'une seule, sous la forme $\prod_{\alpha \in S(+;V)} \exp \zeta_\alpha \rho_V(x_\alpha)$ (resp. $\prod_{\alpha \in S(-;V)} \exp \zeta_\alpha \rho_V(x_\alpha)$), où les ζ_α sont des nombres rationnels et où, comme dans les produits analogues que nous aurons l'occasion d'écrire, les facteurs sont arrangés par ordre de grandeur croissante des racines (Cf. [1], V, §3, n°4, prop. 14).

Nous appellerons <u>caractères</u> de H_V les homomorphismes rationnels de ce groupe dans $GL(1 ; \mathbb{Q})$; ils forment un groupe, que nous noterons X_V ; X_V est un groupe commutatif libre de rang $\dim H_V$. Pour toute racine $\alpha \in S(V)$, il y a un caractère χ_α de H_V tel que l'on ait

$$t(\exp \zeta \rho(x_\alpha)) \ t^{-1} = \exp \zeta \chi_\alpha(t) \rho_V(x_\alpha)$$

pour tout $t \in H_V$ et tout $\xi \in \mathbb{Q}$. Nous appellerons <u>caractères radiciels</u> les χ_α ; ils engendrent un sous-groupe d'indice fini de X_V, que nous noterons X'_V.

Nous noterons $P(\Gamma_V)$ (resp. $P(U_V)$, $P(U'_V)$, $P(H_V)$) les algèbres affines des groupes algébriques Γ_V (resp. U_V, U'_V, H_V). L'algèbre $P(U_V)$ (resp. $P(U'_V)$) est une algèbre de polynômes sur $\mathbb{Q}$ engendrée par des fonctions algébriquement indépendantes Z^V_α pour $\alpha \in S(+ ; V)$ (resp. $\alpha \in S(- ; V)$) telles que l'on ait

$$u = \prod_{\alpha \in S(+;V)} \exp Z^V_\alpha(u) \ \rho_V(x_\alpha) \ , \qquad u' = \prod_{\alpha \in S(-;V)} \exp Z^V_\alpha(u') \ \rho_V(x_\alpha)$$

pour tout $u \in U_V$ et tout $u' \in U'_V$ ([1], V, § 3, n°4, prop. 14). Si $(\chi_1, \dots, \chi_r)$ est une base de X_V, les χ_i sont algébriquement indépendants sur K, et on a $P(H_V) = \mathbb{Q}[\chi_1 , \dots , \chi_r , \chi_1^{-1} , \dots , \chi_r^{-1}]$.

Pour toute racine $\alpha \in S(V)$, nous poserons

$$\sigma_\alpha^V = (\exp \rho_V(x_\alpha))(\exp \rho_V(x_{-\alpha}))^{-1} (\exp \rho_V(x_\alpha)) \quad .$$

Le normalisateur N_V de H_V dans Γ_V est alors engendré par H_V et par les σ_α^V pour toutes les racines $\alpha \in S(V)$. Pour tout $s \in \Gamma_V$, il y a une classe $\mathfrak{K}$ de N_V modulo H_V, et une seule, telle que s appartienne à l'ensemble $U_V' \mathfrak{K}_V U_V$; de plus, si $s \in U_V' H_V U_V$, il n'y a qu'un seul élément $(u', t, u) \in U_V' \times H_V \times U_V$ tel que $s = u'tu$ (ces résultats s'obtiennent en appliquant le théorème de Bruhat (Cf. par exemple [2], exposé 13, corollaire au théorème 3) au groupe complexe déduit de Γ_V par extension du corps de base).

4. Modules admissibles.

Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur $\underset{\sim}{Q}$ et $\mathfrak{G}$ un sous-schéma de groupes de $\mathfrak{GL}(V)$. Soit M un réseau dans l'espace V (i. e. un groupe additif contenu dans V tel que l'application canonique $\underset{\sim}{Q} \otimes_Z M \to V$ soit bijective) ; le module M définit alors un schéma de groupes $\mathfrak{GL}(M)$ tel que $\mathfrak{GL}(V)$ soit le schéma de groupes déduit de $\mathfrak{GL}(M)$ par extension à $\underset{\sim}{Q}$ des scalaires ; d'où un morphisme de schémas $\mathfrak{GL}(V) \to \mathfrak{GL}(M)$. En composant cet homomorphisme avec l'homomorphisme d'injection $\mathfrak{G} \to \mathfrak{GL}(V)$, on obtient un morphisme $\mathfrak{G} \to \mathfrak{GL}(M)$ dont l'image est un sous-schéma de groupes $\mathfrak{G}_M$ de $\mathfrak{GL}(M)$: on dit que $\mathfrak{G}_M$ est le schéma de groupes défini par $\mathfrak{G}$ et par M. Si $\mathfrak{G}$ est le schéma associé à un groupe algébrique irréductible Γ d'automorphismes de V, on dit que $\mathfrak{G}_M$ est le schéma associé à Γ et à M. Puisque $\mathfrak{G}_M$ est un sous-schéma de groupes de $\mathfrak{GL}(M)$, son algèbre affine est toujours de type fini sur $\underset{\sim}{Z}$; comme il y a un épimorphisme $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_M$, on voit que, si $\mathfrak{G}$ est associé à un groupe algébrique d'automorphismes de V, l'algèbre affine de $\mathfrak{G}_M$ est sans éléments nilpotents, et est même intègre, si Γ est irréductible. Par ailleurs, il est clair que l'algèbre affine de $\mathfrak{G}_M$ est un $\underset{\sim}{Z}$-module sans torsion, donc plat. Ce module est même fidèlement plat comme il résulte de l'existence de l'homomorphisme fourni par l'élément neutre.

Soient Γ un groupe algébrique d'automorphismes de V et $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base de V ; l'algèbre affine $P(\Gamma)$ est alors engendrée sur $\underset{\sim}{Q}$ par les fonctions $f_{i'i}$, D^{-1} où les $f_{i'i}$ sont les fonctions définies par la formule

$$s . v_i = \sum_{i'=1}^{n} f_{i'i}(s)\, v_{i'} \qquad (s \in \Gamma)$$

(on les appelle les coefficients relatifs à la base B) et où $D = \det(f_{ii'})$.

Si B est la base d'un réseau M dans V, l'algèbre affine $P(\mathfrak{G}_M)$ du schéma de groupes $\mathfrak{G}_M$ associé à Γ s'identifie à la sous-algèbre de $P(\Gamma)$ engendrée <u>sur</u> $\underset{\sim}{Z}$ par les éléments $f_{i'i}$, D^{-1}.

Soient V et V' des espaces vectoriels de dimensions finies, Γ et Γ' des groupes algébriques d'automorphismes de V et V', φ une application linéaire <u>injective</u> de V dans V'. Supposons qu'il y ait un homomorphisme $\psi : \Gamma' \to \Gamma$ tel que $\varphi \circ \psi(s') = s' \circ \varphi$ pour tout $s' \in \Gamma'$ (i. e. que les opérations de Γ' transforment $\varphi(V)$ en lui-même). Soient M' un réseau de V', M le réseau $\varphi^{-1}(M')$ de V, $\mathfrak{G}_{M'}$ (resp. $\mathfrak{G}_M$) le schéma de groupes associé à Γ' et M' (resp. à Γ et M). L'homomorphisme ψ définit un homomorphisme ψ' de l'algèbre affine de Γ dans celle de Γ' ; tenant compte de la description de $P(\mathfrak{G}_M)$ donnée ci-dessus, on voit tout de suite que ψ' applique $P(\mathfrak{G}_M)$ dans $(\mathfrak{G}_{M'})$, donc définit un homomorphisme $\psi_M : \mathfrak{G}_{M'} \to \mathfrak{G}_M$, dont nous dirons qu'il est <u>associé à</u> φ.

Nous allons supposer à partir de maintenant que V est l'espace d'une représentation ρ de $\mathfrak{G}$. Nous dirons qu'un réseau M de V est un $\underset{\sim}{Z}$-module <u>admissible</u> si les conditions suivantes sont satisfaites :

1° M est engendré par des vecteurs qui appartiennent à des poids de ρ (i. e. qui sont des vecteurs propres des opérations de $\rho(\mathfrak{h})$);

2° Pour toute racine α et tout entier $k > 0$, $(k\,!)^{-1}\,(\rho(x_\alpha))^k$ applique M dans lui-même.

On peut montrer que tout espace de représentation de ρ contient un $\underset{\sim}{Z}$-module admissible. A tout $\underset{\sim}{Z}$-module admissible M il correspond un schéma en groupes que nous désignerons par $\mathfrak{G}_M$ (le schéma en groupes associé à Γ_V et à M).

Si V est l'espace d'une représentation ρ de $\mathfrak{g}$, son dual V^* est l'espace de la représentation duale ρ^*. Soit M un $\underset{\sim}{Z}$-module admissible dans V ; son dual M^* s'identifie à un réseau de V^*, et il est clair que M^* est un $\underset{\sim}{Z}$-module admissible relativement à V^*. Soit par ailleurs V' l'espace d'une autre représentation ρ' de $\mathfrak{g}$; $V \otimes_{\underset{\sim}{Q}} V'$ est alors l'espace du produit tensoriel des représentations ρ et ρ' ; on voit facilement que, si M et M' sont des $\underset{\sim}{Z}$-modules admissibles dans V et V' respectivement, $M \otimes_{\underset{\sim}{Z}} M'$ est un $\underset{\sim}{Z}$-module admissible dans $V \otimes_Q V'$.

Soient V et V' les espaces de représentations ρ et ρ' de $\mathfrak{g}$, et $\varphi : V \to V'$ un homomorphisme injectif de $\mathfrak{g}$-modules. Soit M' un $\underset{\sim}{Z}$-module admissible dans V' ; alors $M = \varphi^{-1}(M')$ est un $\underset{\sim}{Z}$-module admissible dans V. En effet, pour tout poids ϖ' de la représentation ρ', notons $V'_{\varpi'}$

l'espace engendré par les vecteurs qui appartiennent à ϖ' et $M'_{\varpi'}$, le module $M' \cap V'_{\varpi'}$, d'où $M' = \sum_{\varpi'} M'_{\varpi'}$ (la somme étant directe). Or on voit facilement que $\varphi(V)$ est somme directe des $\varphi(V) \cap V'_{\varpi'}$; il en résulte que M est somme directe des $\varphi^{-1}(M'_{\varpi'})$; comme tout vecteur $\neq 0$ de $\varphi^{-1}(M'_{\varpi'})$ appartient à un poids de ρ, notre assertion résulte immédiatement de là.

On a en particulier un homomorphisme injectif φ_V de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_V$ de Γ_V dans $V \otimes V^*$, et cet homomorphisme est un homomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules si on considère $\mathfrak{g}_V$ comme espace d'une représentation quotient de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ et $V \otimes V^*$ comme l'espace de la représentation produit tensoriel de ρ_V et de sa duale. On associe donc à tout $\underset{\sim}{Z}$-module admissible M dans V un $\underset{\sim}{Z}$-module admissible $\mathfrak{g}_M$ dans $\mathfrak{g}_V$, image réciproque de $M \otimes_Z M^*$ par φ_V. Tenant compte de l'isomorphisme canonique de $V \otimes V^*$ sur $\mathrm{Hom}(V , V)$, on voit que $\mathfrak{g}_M$ est l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}_V$ qui appliquent M dans lui-même ; on a donc $[\mathfrak{g}_M , \mathfrak{g}_M] \subset \mathfrak{g}_M$.

Nous noterons $\mathfrak{U}_M$, $\mathfrak{H}_M$ et $\mathfrak{U}'_M$ les schémas de groupes associés à U_V, H_V, U'_V et au réseau M ; ce sont des sous-schémas de groupes de $\mathfrak{G}_M$, dont nous noterons les algèbres affines $P(\mathfrak{U}_M)$, $P(\mathfrak{H}_M)$, $P(\mathfrak{U}'_M)$. Les projections du schéma affine $\mathfrak{U}'_M \times \mathfrak{H}_M \times \mathfrak{U}_M$ sur ses trois facteurs donnent trois morphismes de ce schéma dans $\mathfrak{G}_M$, d'où, par multiplication, un morphisme

$$\theta_M : \mathfrak{U}'_M \times \mathfrak{H}_M \times \mathfrak{U}_M \to \mathfrak{G}_M$$

qui va jouer un rôle fondamental dans ce qui suit.

PROPOSITION 1. - <u>Le morphisme</u> θ_M <u>définit un isomorphisme de</u> $\mathfrak{U}'_M \times \mathfrak{H}_M \times \mathfrak{U}_M$ <u>sur un sous-schéma affine ouvert</u> Ω_M <u>de</u> $\mathfrak{G}_M$; <u>l'algèbre affine</u> $P(\Omega_M)$ <u>de</u> Ω_M <u>est de la forme</u> $(P(\mathfrak{G}_M))[d^{-1}]$, d <u>étant un élément de</u> $P(\mathfrak{G}_M)$ <u>qui prend la valeur</u> 1 <u>en l'élément neutre. Si on désigne par</u> Z_α <u>pour</u> $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$) <u>les éléments de</u> $P(U_V)$ (resp. $P(U'_V)$) <u>tels que l'on ait</u> $u = \prod_{\alpha \in S(+;V)} \exp Z_\alpha(u)\, \rho_V(x_\alpha)$ (resp. $u' = \prod_{\alpha \in S(-;V)} \exp Z_\alpha(u')\, \rho_V(x_\alpha)$) <u>pour tout</u> $u \in U_V$ (resp. $u' \in U'_V$), $P(\mathfrak{U}_M)$ (resp. $P(\mathfrak{U}'_M)$) <u>est l'algèbre de polynômes sur</u> $\underset{\sim}{Z}$ <u>engendrée par les</u> Z_α <u>pour</u> $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$) ; <u>l'algèbre</u> $P(\mathfrak{H}_M)$ <u>est engendrée sur</u> $\underset{\sim}{Z}$ <u>par les caractères rationnels</u> χ.

Pour faire la démonstration, on peut évidemment supposer que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_V$ (ρ_V étant l'application identique).

Puisque $\mathfrak{g}_M$ est admissible, on a $\mathfrak{g}_M = \sum_\alpha (\mathfrak{g}_M \cap \underset{\sim}{Q} x_\alpha) + \mathfrak{g}_M \cap \mathfrak{h}$; puisque $\mathfrak{g}_M$ est l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ qui appliquent M dans lui-même, on a $x_\alpha \in \mathfrak{g}_M$. Soit δ un entier > 0 tel que $\delta^{-1} x_\alpha \in \mathfrak{g}_M$; alors $\delta^{-1} x_{-\alpha} = \frac{1}{2}(\mathrm{ad}\ x_{-\alpha})^2 (\delta^{-1} x_\alpha) \in \mathfrak{g}_M$, d'où, puisque $[\mathfrak{g}_M , \mathfrak{g}_M] \subset \mathfrak{g}_M$,

$$\delta^{-2} h_\alpha = [\delta^{-1} x_\alpha , \delta^{-1} x_{-\alpha}] \in \mathfrak{g}_M \quad ,$$

$$2\delta^{-3} x_\alpha = [\delta^{-2} h_\alpha , \delta^{-1} x_\alpha] \in \mathfrak{g}_M \quad ,$$

d'où $\delta^{-2} x_\alpha \in \mathfrak{g}_M$, et par suite $\delta^{-2^k} x_\alpha \in \mathfrak{g}_M$ pour tout $k > 0$. Comme $\mathfrak{g}_M$ est un réseau, on a $\delta = 1$. Nous désignerons par $(h_1 , \dots , h_j)$ une base de $\mathfrak{g}_M \cap \mathfrak{h}$. On notera que les $h_\alpha = [x_\alpha , x_{-\alpha}]$ appartiennent à $\mathfrak{g}_M \cap \mathfrak{h}$, et que la condition $h \in \mathfrak{g}_M \cap \mathfrak{h}$ entraîne $\alpha(h) \in \mathbb{Z}$ pour toute racine α.

Soit ν le nombre des racines > 0. Nous introduirons une base $(Y_1 , \dots , Y_N)$ de la puissance extérieure ν-ième de $\mathfrak{g}_M$ possédant les propriétés suivantes : chaque Y_k est produit extérieur de ν éléments pris parmi les h_j, x_α ; Y_1 (resp. Y_N) est produit extérieur des x_α pour $\alpha > 0$ (resp. pour $\alpha < 0$) ; pour chaque racine α et pour $1 \leqslant j \leqslant r$, il existe un $a(\alpha , j)$ tel que $Y_{a(\alpha,j)}$ soit le produit déduit de Y_1 si $\alpha > 0$, de Y_N si $\alpha < 0$, en y remplaçant le facteur x_α par h_j. Pour chaque k, nous désignerons par $\tau(k)$ la somme des racines α telles que $x_\alpha \wedge Y_k = 0$. Si $s \in \Gamma_V$, nous désignerons par $\mathrm{Ad}_\nu\, s$ la puissance extérieure ν-ième de $\mathrm{Ad}\ s$, et nous poserons

$$(\mathrm{Ad}_\nu\ s) \cdot Y_k = \sum_{k'=1}^{N} g_{k'k}(s)\ Y_{k'} \quad .$$

Les fonctions $g_{kk'}$ appartiennent à l'algèbre affine $P(\mathfrak{G}_M)$ de $\mathfrak{G}_M$, qui sera identifiée dans tout ce qui suit à un sous-anneau de $P(\Gamma_V)$. Si $s \in U_V$ (resp. $s \in U_V'$), on a $g_{k'k}(s) = 0$ si $\tau(k') < \tau(k)$ (resp. $\tau(k') > \tau(k)$) ou si $\tau(k') = \tau(k)$, $k' \neq k$, et on a $g_{kk}(s) = 1$. Si $t \in H_V$, on a $g_{kk'}(t) = 0$ si $k \neq k'$, $g_{kk}(t) = \chi_{\tau(k)}(t)$ où $\chi_{\tau(k)}$ est le produit des caractères radiciels χ_α pour les racines α telles que $x_\alpha \wedge Y_k = 0$. Nous poserons $d = g_{11}$; on voit facilement que $g_{NN}(s) = d(s^{-1})$.

Si s est un élément du normalisateur de H_V, on a $(\mathrm{Ad}\ s) \cdot x_\alpha \in \mathbb{Q} x_{\pi(\alpha)}$, π étant une permutation des racines produite par un élément du groupe de Weyl ; si π permute entre elles les racines > 0, i. e. si $d(s) \neq 0$, on a $s \in H_V$. Il résulte facilement de là, et de ce qui précède, que $U_V' H_V U_V$ est l'ensemble des $s \in \Gamma_V$ tels que $d(s) \neq 0$.

Soit α une racine > 0 et soit $1 \leqslant j \leqslant r$; posons $h_\alpha = \sum_{j=1}^{r} c_{\alpha,j}\, h_j$. Il y a des polynômes Q_1^+, Q_2^+ (resp. Q_1^-, Q_2^-) à coefficients entiers en des lettres Z_β (resp. $Z_{-\beta}$) indexées par les racines $\beta > 0$ telles que $\beta < \alpha$ qui possèdent les propriétés suivantes : si

$$u = \prod_{\beta > 0} \exp \zeta_\beta x_\beta , \quad t \in H_V , \quad u' = \prod_{\beta < 0} \exp \zeta_\beta x_\beta$$

(les ζ_β étant rationnels), on a

$$\begin{cases} g_{a(\alpha,j),1}(u'tu) = d(s)(-\zeta_{-\alpha} c_{\alpha,j} + Q_1^-(\dots , \zeta_{-\beta} , \dots)) \\ g_{1,a(\alpha,j)}(u'tu) = d(s)(-\alpha(h_j)\zeta_\alpha + Q_1^+(\dots , \zeta_\beta , \dots)) \\ g_{a(-\alpha,j),N}(u^{-1} t^{-1} u'^{-1}) = d(s)(c_{\alpha,j}\zeta_\alpha + Q_2^+(\dots , \zeta_\beta , \dots)) \\ g_{N,a(-\alpha,j)}(u^{-1} t^{-1} u'^{-1}) = d(s)(\alpha(h_j)\zeta_\alpha + Q_2^-(\dots , \zeta_\beta , \dots)) \end{cases} .$$

De plus, on voit tout de suite que ou bien les $c_{\alpha,j}$ ($1 \leq j \leq r$) sont premiers entre eux dans leur ensemble, ou bien les $\alpha(h_j)$ le sont. Ceci étant, il résulte facilement des formules précédentes que, u, t, u' étant comme ci-dessus, et $s = u'tu$, les ζ_β s'expriment comme polynômes à coefficients entiers en les $(d(s))^{-1} g_{kk'}(s)$. Si on suppose que $s \in U_V$ (resp. $s \in U'_V$), on voit d'abord que les fonctions Z_α définies dans l'énoncé de la proposition 1 appartiennent à $P(\mathfrak{U}_M)$ pour $\alpha > 0$, à $P(\mathfrak{U}'_M)$ pour $\alpha < 0$. Or, les coefficients de la matrice qui représente l'élément $\exp \zeta x_\alpha$ (où α est une racine, $\zeta \in \mathbb{Q}$) par rapport à une base de M s'expriment comme polynômes à coefficients entiers en ζ ; on voit donc que $P(\mathfrak{U}_M)$ (resp. $P(\mathfrak{U}'_M)$) est l'anneau engendré par les Z_α pour $\alpha > 0$ (resp. pour $\alpha < 0$). Les coefficients $\neq 0$ de la matrice qui représente un élément t de H_V par rapport à une base de M composée de vecteurs appartenant à des poids sont les valeurs en t de certains caractères rationnels χ_ϖ de H_V (si v appartient à un poids ϖ, $t \cdot v = \chi_\varpi(t)\, v$), et les χ_ϖ engendrent le groupe X_V ; la dernière assertion de la proposition 13 résulte de là.

Le morphisme θ_M définit un homomorphisme θ'_M de $P(\mathfrak{G}_M)$ dans l'algèbre affine

$$P(\mathfrak{U}'_M \times \mathfrak{H}_M \times \mathfrak{U}_M) = P(\mathfrak{U}'_M) \otimes_{\underset{\sim}{Z}} P(\mathfrak{H}_M) \otimes_{\underset{\sim}{Z}} P(\mathfrak{U}_M)$$

de $\mathfrak{U}'_M \times \mathfrak{H}_M \times \mathfrak{U}_M$. L'image de d par θ'_M est inversible dans $P(\mathfrak{U}'_M \times \mathfrak{H}_M \times \mathfrak{U}_M)$ en vertu de la formule

$$d(u'tu) = \chi_{\tau(1)}(t) \quad (u' \in U'_V , \quad t \in H_V , \quad u \in U_V) \qquad ;$$

θ'_M se prolonge donc en un homomorphisme, que nous désignerons encore par θ'_M, de

$(P(\mathfrak{G}_M))[d^{-1}]$ dans $P(\mathfrak{U}'_M \times \mathfrak{H}_M \times \mathfrak{U}_M)$. Il résulte de ce que nous avons dit que les fonctions $Z_\alpha \otimes 1 \otimes 1$ $(\alpha < 0)$, $1 \otimes 1 \otimes Z_\alpha$ $(\alpha > 0)$ de $P(\mathfrak{U}'_M \times \mathfrak{H}_M \times \mathfrak{U}_M)$ appartiennent à l'image de $(P(\mathfrak{G}_M))[d^{-1}]$. Par ailleurs, si $s = u'tu$, $u' \in U'_V$, $t \in H_V$, $u \in U_V$, on peut écrire $t = u'^{-1} su^{-1}$, de sorte que les coefficients de la matrice qui représente t par rapport à une base de M s'expriment comme polynômes à coefficients entiers en les $Z_\alpha(s)$ et en les coefficients de la matrice qui représente s ; il en résulte immédiatement que, pour toute fonction $f \in P(\mathfrak{H}_M)$, $1 \otimes f \otimes 1$ appartient à l'image de $(P(\mathfrak{G}_M))[d^{-1}]$, ce qui achève la démonstration de la proposition 1.

Nous poserons désormais

$$P(\Omega_V) = (P(\Gamma_V))[d^{-1}] , \quad P(\Omega_M) = (P(\mathfrak{G}_M))[d^{-1}] \quad .$$

Si F désigne un corps, nous désignerons par $\mathfrak{G}^F_M$, $\mathfrak{U}^F_M$, $\mathfrak{U}'^F_M$, $\mathfrak{H}^F_M$ les schémas de groupes déduits de $\mathfrak{G}_M$, $\mathfrak{U}_M$, $\mathfrak{U}'_M$, $\mathfrak{H}_M$ par extension à F des scalaires. Leurs algèbres affines $P(\mathfrak{G}^F_M)$, $P(\mathfrak{U}^F_M)$, $P(\mathfrak{U}'^F_M)$, $P(\mathfrak{H}^F_M)$ se déduisent de $P(\mathfrak{G}_M)$, $P(\mathfrak{U}_M)$, $P(\mathfrak{U}'_M)$, $P(\mathfrak{H}_M)$ par tensorisation avec F. Nous poserons $d^F = d \otimes 1_F$. Le morphisme θ_M définit un morphisme

$$\theta^F_M : \mathfrak{U}'^F_M \times \mathfrak{H}^F_M \times \mathfrak{U}^F_M \to \mathfrak{G}^F_M$$

qui induit un isomorphisme du schéma affine qui figure au premier membre sur un sous-schéma ouvert Ω^F_M de $\mathfrak{G}^F_M$; l'algèbre affine de Ω^F_M est l'anneau de fractions $(P(\mathfrak{G}^F_M))[(d^F)^{-1}]$.

PROPOSITION 2. - Soit F un corps algébriquement clos ; $\mathfrak{G}^F_M$ est alors le schéma de groupes défini par un groupe algébrique irréductible semi-simple Γ^F_M d'automorphismes de l'espace vectoriel $M^F = M \otimes_Z F$ sur F ; $\mathfrak{U}^F_M$, $\mathfrak{U}'^F_M$, $\mathfrak{H}^F_M$ sont associés à des sous-groupes irréductibles U^F_M, U'^F_M, H^F_M de Γ^F_M ; H^F_M est un tore maximal de Γ^F_M et $H^F_M U^F_M$ en est un groupe de Borel.

Pour faire la démonstration, nous supposerons de nouveau que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_V$.

Il résulte tout de suite de la proposition 1 que $P(\mathfrak{U}'^F_M \times \mathfrak{H}^F_M \times \mathfrak{U}^F_M)$ est intègre, donc que $(P(\mathfrak{G}^F_M))[d^F)^{-1}]$ est intègre, et, en particulier, que l'anneau local de l'élément neutre de $\mathfrak{G}^F_M$ est intègre. Il est clair que $\mathfrak{G}^F_M$ est un sous-schéma en groupes de $\mathfrak{GL}(M^F)$; il résulte alors de ce que nous venons de dire que $\mathfrak{G}^F_M$ est le schéma en groupes défini par un groupe algébrique Γ^F_M d'automorphismes de M^F. Les algèbres $P(\mathfrak{U}'^F_M)$, $P(\mathfrak{H}^F_M)$, $P(\mathfrak{U}^F_M)$ étant intègres, $\mathfrak{U}'^F_M$, $\mathfrak{H}^F_M$ et $\mathfrak{U}^F_M$ sont les schémas en groupes définis par des sous-groupes algébriques irréductibles U'^F_M,

H_M^F , U_M^F de Γ_M^F .

On voit facilement qu'il existe une base de M telle que, pour tout $u \in U_V$, la matrice qui représente u par rapport à cette base soit une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 . On en déduit aussitôt que le groupe U_M^F est unipotent ; on voit de même que $U_M'^F$ est unipotent et que H_M^F est un tore.

Les fonctions Z_α étant définies comme dans la proposition 7, nous poserons $\bar{Z}_\alpha = Z_\alpha \otimes 1_F$; $P(\mathfrak{U}_M)$ (resp. $P(\mathfrak{U}_M'))$ est donc engendré sur F par les fonctions $\bar{Z}_\alpha$ pour $\alpha > 0$ (resp. pour $\alpha < 0$) , et ces fonctions sont algébriquement indépendantes sur F . De même, pour tout $\chi \in X_V$, nous désignerons par $\bar{\chi}$ l'élément $\chi \otimes 1_F$ de $P(\mathfrak{H}_M^F)$. Pour toute racine α , on désigne par χ_α le caractère radiciel associé à α .

On a, si $t \in H_V$, $\zeta_\alpha \in \mathbb{Q}$,

$$t\left(\prod_{\alpha>0} \exp \zeta_\alpha x_\alpha\right) t^{-1} = \prod_{\alpha>0} \exp \zeta_\alpha \chi_\alpha(t)\, x_\alpha \quad .$$

Soient t^* et u^* les morphismes du schéma affine $\mathfrak{H}_M \times \mathfrak{U}_M$ dans $\mathfrak{GL}(M)$ obtenus en composant les projections sur les deux facteurs avec les morphismes d'injection de $\mathfrak{H}_M$ et $\mathfrak{U}_M$ dans $\mathfrak{GL}(M)$. Il y a un automorphisme de l'algèbre affine $P(\mathfrak{H}_M) \otimes_Z P(\mathfrak{U}_M)$ de $\mathfrak{H}_M \times \mathfrak{U}_M$ qui conserve les $\chi \otimes 1$ pour $\chi \in X_V$ et qui transforme $\tilde{1} \otimes Z_\alpha$ en $\chi_\alpha \otimes Z_\alpha$; cet automorphisme définit un automorphisme λ de $\mathfrak{H}_M \times \mathfrak{U}_M$, et la formule écrite ci-dessus donne $t^* u^*(t^*)^{-1} = u^* \circ \lambda$. Les morphismes t^{*F} , u^{*F} de $\mathfrak{H}_M^F \times \mathfrak{U}_M^F$ dans $\mathfrak{GL}(M^F)$ déduits de t^* , u^* par extension des scalaires s'obtiennent en composant les projections sur les deux facteurs avec les morphismes d'injection de ces facteurs dans $\mathfrak{GL}(M^F)$; soit λ^F l'automorphisme de $\mathfrak{H}_M^F \times \mathfrak{U}_M^F$ déduit de λ par extension des scalaires. On a alors

$$t^{*F}\, u^{*F}(t^{*F})^{-1} = u^{*F} \circ \lambda^F \quad .$$

On en déduit que les conditions $t \in H_M^F$, $u \in U_M^F$ entraînent $tut^{-1} \in U_M^F$, $\bar{Z}_\alpha(tut^{-1}) = \bar{\chi}_\alpha(t)\, \bar{Z}_\alpha(u)$ ($\alpha > 0$). On voit de même que les conditions $t \in H_M^F$, $u' \in U_M'^F$ entraînent $tu't^{-1} \in U_M'^F$ et $\bar{Z}_\alpha(tu't^{-1}) = \bar{\chi}_\alpha(t)\, \bar{Z}_\alpha(u')$ ($\alpha < 0$) . On déduit de là que l'ensemble $H_M^F U_M^F$ est un sous-groupe résoluble algébrique irréductible de Γ_M^F .

Il résulte de l'existence de l'isomorphisme θ_M^F de $\mathfrak{U}_M'^F \times \mathfrak{H}_M^F \times \mathfrak{U}_M^F$ sur un sous-schéma ouvert de $\mathfrak{G}_M^F$ que l'application $(u' , t , u) \rightsquigarrow u'tu$ de $U_M'^F \times H_M^F \times U_M^F$ dans Γ_M^F est injective. Montrons que l'intersection de l'ensemble

$$U_M'^F\, H_M^F\, U_M^F$$

avec le normalisateur de $H_M^F U_M^F$ est $H_M^F U_M^F$. Il suffit de montrer que, si un élément u' de $U_M'^F$ appartient au normalisateur de $H_M^F U_M^F$, u' est l'élément neutre. Si $t \in H_M^F$, soit $tu't^{-1} = u'' \in U_M'^F$; on a $u'^{-1} tu' = u'^{-1} u''t \in H_M^F U_M^F$, d'où $u' = u''$; mais on a, pour toute racine $\alpha < 0$, $\bar{Z}_\alpha(u'') = \bar{\chi}_\alpha(t) \bar{Z}(u')$, et il est clair que $\chi_\alpha \neq 1$, de sorte qu'il y a des éléments $t \in H_M^F$ tels que $\bar{\chi}_\alpha(t) \neq 1$. Il vient donc $\bar{Z}_\alpha(u') = 0$ pour toute racine $\alpha < 0$, ce qui démontre notre assertion. La formule qu'on vient d'utiliser montre aussi qu'un élément $t \in H_M^F$ ne peut appartenir au centre de la composante irréductible Δ_M^F de l'élément neutre dans Γ_M^F que si les $\chi_\alpha(t)$ sont tous égaux à 1. Comme les caractères radiciels engendrent un sous-groupe d'indice fini du groupe des caractères, le centre de Δ_M^F est fini.

Comme $U_M'^F H_M^F U_M^F$ est un voisinage de l'élément neutre dans Δ_M^F, le groupe $H_M^F U_M^F$, qui est résoluble et qui est la composante connexe de l'élément neutre dans son normalisateur dans Δ_M^F, est un groupe de Borel de Δ_M^F. Il est clair que H_M^F est un tore maximal de $H_M^F U_M^F$, donc de Δ_M^F. On a

$$\dim \Delta_M^F = \dim U_M'^F + \dim H_M^F + \dim U_M^F = \dim H_M^F + 2 \dim U_M^F \quad ;$$

il en résulte facilement que Δ_M^F est semi-simple.

Il reste à prouver que Γ_M^F est connexe. Nous savons déjà que l'ensemble des $s \in \Gamma_M^F$ tels que $d^F(s) \neq 0$ est contenu dans Δ_M^F ; il suffira donc de prouver que toute composante irréductible de Γ_M^F rencontre cet ensemble. Nous utiliserons pour cela les notations de la démonstration de la proposition 1. Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ la base de $\mathfrak{g}_M$ composée des x_α et des h_j ; posons, si $s \in \Gamma_V$,

$$(\mathrm{Ad}\ s) \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} f_{i'i}(s)\, y_{i'} \quad ;$$

on sait que les fonctions $f_{ii'}$ appartiennent à $P(\mathfrak{G}_M)$. Posons $\bar{f}_{ii'} = f_{ii'} \otimes 1_F$, et désignons par $\mathfrak{g}_M^F$ l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_M \otimes_Z F$ sur F ; posons $\bar{y}_i = y_i \otimes 1_F$, $\bar{x} = x \otimes 1_F$, $\bar{h}_j = h_j \otimes 1_F$. Il est alors clair qu'il y a une représentation linéaire $\overline{\mathrm{Ad}}$ de Γ_M^F, d'espace $\mathfrak{g}_M^F$, qui fait correspondre à tout $s \in \Gamma_M^F$ l'automorphisme défini par

$$(\overline{\mathrm{Ad}}\ s) \cdot \bar{y}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_{i'i}(s)\, y_{i'} \quad .$$

L'espace $(\Lambda^\nu \mathfrak{g}_M) \otimes_Z F$ s'identifie à la puissance extérieure ν-ième de $\mathfrak{g}_M^F$; posons $\bar{Y}_k = Y_k \otimes 1_F$. Alors $\bar{Y}_1$ est produit extérieur des $\bar{x}_\alpha$ pour $\alpha > 0$, et

$d^F(s)$ est le coefficient de $\bar{Y}_1$ dans l'expression de $(\overline{Ad}_\nu\, s) \cdot Y_1$ comme combinaison linéaire de $\bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_N$ ($\overline{Ad}_\nu\, s$ désignant la puissance extérieure ν-ième de $\overline{Ad}\, s$). Il en résulte que, si un $s \in \Gamma_M^F$ est tel que $\overline{Ad}\, s$ conserve le sous-espace de g_M^F engendré par les $\bar{x}_\alpha$ pour $\alpha > 0$, on a $d^F(s) \neq 0$.

On observera par ailleurs que l'on a $t \cdot \bar{x}_\alpha = \bar{\chi}_\alpha(t)\, \bar{x}_\alpha$, $t \cdot \bar{h}_j = \bar{h}_j$ pour tout $t \in H_M^F$.

Ceci étant, soit s_1 un élément quelconque de Γ_M^F. L'automorphisme intérieur produit par s_1 transforme $H_M^F U_M^F$ (resp. H_M^F) en un groupe de Borel (resp. en un tore maximal) de Δ_M^F. Comme tous les groupes de Borel de Δ_M^F sont conjugués les uns les autres dans Δ_M^F et comme tous les tores maximaux de $H_M^F U_M^F$ sont conjugués entre eux dans $H_M^F U_M^F$, on voit qu'il y a un élément $s \in s_1 \Delta_M^F$ tel que $s(H_M^F U_M^F)\, s^{-1} = H_M^F U_M^F$, $sH_M^F s^{-1} = H_M^F$. La première égalité entraîne que

$$sU_M^F s^{-1} = U_M^F \quad .$$

Les fonctions $\bar{\chi}_\alpha$, pour les diverses racines α, étant toutes distinctes les unes des autres et de 1, la relation $sH_M^F s^{-1} = H_M^F$ entraîne que $\overline{Ad}\, s$ transforme $F\bar{x}_\alpha$ en $F\bar{x}_{\pi(\alpha)}$, π étant une certaine permutation des racines. Tenant compte des relations $\bar{\chi}_{-\alpha}\, \bar{\chi}_\alpha = 1$, on voit que $\pi(-\alpha) = -\pi(\alpha)$ pour toute racine α. On a $sU_M^F s^{-1} = U_M^F$, et les opérations $\overline{Ad}\, u$, $u \in U_M^F$, conservent l'espace $\sum_{\alpha>0} F\bar{x}_\alpha$; il en résulte qu'elles conservent aussi l'espace $\sum_{\alpha>0} F\bar{x}_{\pi(\alpha)}$. Supposons pour un moment qu'il y ait une racine $\alpha > 0$ telle que $\pi(\alpha) = -\beta$ soit < 0 ; pour tout $\zeta \in F$, désignons par u_ζ l'élément de U_M^F tel que $\bar{Z}_\beta(u_\zeta) = \zeta$, $\bar{Z}_{\beta'}(u_\zeta) = 0$ pour toute racine $\beta' > 0$, $\beta' \neq \beta$. L'expression de $(\overline{Ad}\, u_\zeta)\, \bar{x}_{-\beta}$ comme combinaison linéaire de $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ ne ferait donc pas intervenir l'élément de base $\bar{x}_\beta$. Or on a

$$(\overline{Ad}\, u_\zeta) \cdot \bar{x}_{-\beta} = \bar{x}_{-\beta} + \zeta \bar{h}_\beta - \zeta^2\, \bar{x}_\beta$$

(où $\bar{h}_\beta = h_\beta \otimes 1_F$, $h_\beta = [x_\beta, x_{-\beta}]$), d'où contradiction. On voit donc que s conserve l'espace $\sum_{\alpha>0} F\bar{x}_\alpha$, d'où $d^F((s) \neq 0$, ce qui termine la démonstration.

COROLLAIRE 1. - L'idéal engendré par un nombre premier dans l'algèbre affine $P(\mathfrak{G}_M)$ est premier.

Cela résulte immédiatement de la proposition 2.

COROLLAIRE 2. - On a $P(\mathfrak{G}_M) = P(\Gamma_V) \cap P(\Omega_M)$.

Il est clair que le premier membre est contenu dans le second. Soit f une fonction de $P(\Gamma_V) \cap P(\Omega_M)$. L'ensemble des entiers k tels que $kf \in P(\mathfrak{G}_M)$ est un idéal $\neq \{0\}$ de $\underset{\sim}{Z}$, dont nous choisirons un générateur k_0 . Puisque $f \in P(\Omega_M)$, il y a un $m > 0$ tel que $d^m f \in P(\mathfrak{G}_M)$, d'où $d^m(k_0 f) \in k_0 P(\mathfrak{G}_M)$. Si p est un nombre premier, aucun des éléments d , $k_0 f$ de $P(\mathfrak{G}_M)$ n'appartient à $pP(\mathfrak{G}_M)$, d'où $k_0 \not\equiv 0 \pmod p$. On a donc $k_0 = \pm 1$, ce qui démontre le résultat.

Pour toute représentation ρ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, appelons groupe des poids de ρ le groupe engendré par les poids de ρ .

COROLLAIRE 3. - Soient V et V' les espaces de représentations ρ et ρ' de $\mathfrak{g}$ qui admettent le même groupe des poids, c'est-à-dire tels que les groupes algébriques Γ_V , $\Gamma_{V'}$ soient isomorphes. Si M et M' sont des $\underset{\sim}{Z}$-modules admissibles de V et V' , les schémas de groupes $\mathfrak{G}_M$ et $\mathfrak{G}_{M'}$ sont isomorphes.

Considérant l'espace de représentation $V \times V'$, on se ramène tout de suite au cas suivant : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_V$, ρ étant l'application identique ; il existe une application injective $\varphi : V' \to V$ qui est un homomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules telle que $M' = \varphi^{-1}(M)$. Il résulte de l'hypothèse faite sur V et V' qu'il existe un isomorphisme $\varphi_\Gamma : \Gamma_V \to \Gamma_{V'}$ tel que $\varphi \circ s = \varphi_\Gamma(s) \circ \varphi$ pour tout $s \in \Gamma_V$. Cet isomorphisme définit un isomorphisme $\varphi_\Gamma^!$ de $P(\Gamma_{V'})$ sur $P(\Gamma_V)$. Pour toute racine α , on a $\varphi_\Gamma(\exp \zeta_\rho(x_\alpha)) = \exp \zeta\rho'(x_\alpha)$ $(\zeta \in Q)$. Par ailleurs, φ_Γ induit un isomorphisme de H_V sur $H_{V'}$. Tout poids ϖ' de ρ' est aussi un poids de ρ : si v' est un vecteur de poids ϖ' dans V' , $\varphi(v')$ est un vecteur de poids ϖ' dans V . A ϖ' correspondent un caractère $\chi_{\varpi'}^{V'}$ de $H_{V'}$ et un caractère $\chi_{\varpi'}^{V}$ de H_V ; il est clair que $\chi_{\varpi'}^{V'}(\varphi_\Gamma(t)) = \chi_{\varpi'}^{V}(t)$ pour tout $t \in \Gamma_V$. Il en résulte tout de suite qu'il y a un isomorphisme $\chi \leadsto \chi' : X_V \to X_{V'}$ tel que l'on ait $\chi'(\varphi_\Gamma(t)) = \chi(t)$ pour tout $t \in H_V$. On déduit de là que, si $u = \prod_{\alpha>0} \exp \zeta_\alpha \rho(x_\alpha)$, $t \in H_V$, $u' = \prod_{\alpha<0} \exp \zeta_\alpha \rho(x_\alpha)$, on a $\varphi_\Gamma(u'tu) = u_1' t_1 u_1$ avec $u_1 = \prod_{\alpha>0} \exp \zeta_\alpha \rho'(x_\alpha)$, $t_1 \in H_{V'}$, $\chi'(t_1) = \chi(t)$ $(\chi \in X_V)$

$$u_1' = \prod_{\alpha<0} \exp \zeta_\alpha \rho(x_\alpha) \quad .$$

Ceci montre que l'isomorphisme du corps des fractions de $P(\Gamma_{V'})$ sur celui de $P(\Gamma_V)$ qui prolonge $\varphi_\Gamma^!$ applique $P(\Omega_{V'})$ sur $P(\Omega_V)$; $\varphi_\Gamma^!$ applique donc $P(\mathfrak{G}_{M'})$ sur $P(\mathfrak{G}_M)$ en vertu du corollaire 2, ce qui démontre le corollaire 3.

REMARQUE 1. - Soient M et M' des $\underset{\sim}{Z}$-modules admissibles d'un même espace de représentation V de ρ ; $\mathfrak{G}_M$ et $\mathfrak{G}_{M'}$ sont alors des sous-schémas de groupes de $\mathfrak{GL}(M)$ et $\mathfrak{GL}(M')$ respectivement. Bien que $\mathfrak{G}_M$ et $\mathfrak{G}_{M'}$ soient isomorphes, il n'y a en général aucun isomorphisme de $\mathfrak{G}_M$ sur $\mathfrak{G}_{M'}$ qui se prolonge en isomorphisme de $\mathfrak{GL}(M)$ sur $\mathfrak{GL}(M')$.

REMARQUE 2. - Le schéma de groupes $\mathfrak{G}_M$ que nous associons à un $\underset{\sim}{Z}$-module admissible M d'un espace de représentation de $\mathfrak{g}$ ne dépend pas des choix arbitraires que nous avons faits : choix d'une algèbre de Cartan décomposée $\mathfrak{h}$, des algèbres u et u' , de la structure d'ordre sur le dual de $\mathfrak{h}$, des éléments radiciels normalisés x_α .

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Théorie des groupes de Lie, Tomes 2 et 3. - Paris, Hermann, 1951-1955 (Act. scient. et ind., 1152 et 1226 ; Publ. Inst. math. Univ. Nancago, 1 et 4).

[2] CHEVALLEY (Claude). - Classification des groupes de Lie algébriques, Séminaire Chevalley, t. 1, 1956-1958. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958.

[3] ONO (Takashi). - Sur les groupes de Chevalley, J. Math. Soc. Japan, t. 10, 1958, p. 307-313.