FRANÇOIS BRUHAT

Travaux de Sternberg

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. nº 217, p. 179-196

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__179_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 217

Mai 1961

TRAVAUX DE STERNBERG,

par François BRUHAT

Les mémoires cités de S. STERNBERG visent à établir pour les "groupes infinis" de Lie-Cartan des analogues des théorèmes classiques de conjugaison des groupes de Lie : on sait que dans un groupe de Lie, il n'y a qu'un nombre fini de classes de sous-groupes de Cartan, et que tout élément satisfaisant à des conditions de "régularité" est contenu dans un sous-groupe de Cartan.

La première difficulté pour étendre ces résultats au cas "infini" est que les "groupes infinis" ne sont pas des groupes mais des familles d'homéomorphismes définis sur des ouverts variables d'une variété. Il y a deux méthodes pour leur associer de vrais groupes : soit étudier les homéomorphismes de la famille définis sur toute la variété, soit considérer uniquement les transformations laissant fixe un point 0 et étudier le groupe des germes de ces homéomorphismes en 0. Les théorèmes de conjugaison du point de vue global sont certainement fort difficiles : même dans le cas du groupe des homéomorphismes du tore à une dimension, on tombe sur le problème de Poincaré (en prenant comme sous-groupe de Cartan le groupe des rotations). Aussi, c'est le deuxième point de vue qu'adopte STERNBERG, et il obtient des résultats pour quatre des six grandes classes de "groupes primitifs" de Cartan.

Ajoutons que STERNBERG se place au point de vue différentiable et non analytique.

NOTATIONS. - Outre les notations habituelles sur les multi-indices $\alpha = (\alpha_1 ; \dots , \alpha_n)$ (par exemple $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \sum \alpha_i$, etc), on pose :

$$\varepsilon_i = (\delta_{ij})_{1\leq j\leq n} , \quad \varepsilon = (1 , 1 , \dots , 1) = \sum \varepsilon_i \quad .$$

Pour $\alpha \in (\underset{\sim}{Z}_+)^n$ et $k \in \underset{\sim}{Z}_+$, on pose $k\alpha = (k_1 \alpha_1 , \dots , k_n \alpha_n)$. Enfin, pour $x \in \underset{\sim}{R}^n$ et $\lambda \in \underset{\sim}{R}^n$, on pose $\lambda x = (\lambda_1 x_1 , \dots , \lambda_n x_n)$.

$\mathcal{G}$ désigne le groupe des germes en 0 des homéomorphismes locaux de classe C^∞ dans $\underset{\sim}{R}^n$ conservant l'origine 0.

1. Sous-groupes de Cartan de $\mathcal{G}$.

Pour tout entier k (avec $1 \leq k \leq +\infty$), on désignera par $\mathcal{G}_k$ le groupe quotient de $\mathcal{G}$ par le sous-groupe distingué $\mathfrak{N}_k$ des éléments T de $\mathcal{G}$ tangents d'ordre k à l'identité en 0 et par L_k l'homomorphisme canonique de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}_k$. Choisissons un système de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ nulles en 0. Alors un élément T de $\mathcal{G}$ s'identifie à une suite de n germes de fonctions indéfiniment différentiables $(t_1, \dots, t_n)$ nulles en 0 et de jacobien $\neq 0$ en 0. Le groupe $\mathcal{G}_\infty$ (groupe des "homéomorphismes formels") s'identifie au groupe des suites de n séries formelles (nulles en 0 et de jacobien $\neq 0$ en 0) et l'application L_∞ correspond à l'application qui, à un germe de fonction différentiable, fait correspondre sa série de Taylor. Remarquons que $\mathcal{G}_\infty$ est bien le groupe de tous les homéomorphismes formels, car n'importe quelle série formelle est la série de Taylor d'une fonction indéfiniment différentiable. On posera $\mathfrak{N}_\infty = \mathfrak{N}$.

Quant au groupe $\mathcal{G}_k$ pour $k < \infty$, il s'identifie au groupe des suites de n polynômes de degré $\leqslant k$, sans terme constant et de jacobien $\neq 0$ en 0. En particulier, $\mathcal{G}_1$ s'identifie au groupe linéaire général $GL_n(\underset{\sim}{R})$. Pour $T \in \mathcal{G}$, on appellera "partie formelle" (resp. "partie linéaire") l'image canonique $L_\infty(T)$ (resp. $L(T) = L_1(T)$) de T dans $\mathcal{G}_\infty$ (resp. $\mathcal{G}_1 = GL_n(R)$).

Inversement, une fois choisi un système de coordonnées, le groupe linéaire général (ou plus généralement chaque groupe $\mathcal{G}_k$ pour k fini) s'identifie à un sous-groupe de $\mathcal{G}$ (ou de $\mathcal{G}_\infty$) : à la matrice $A = (a_{ij})$ on fait correspondre la transformation linéaire $\widetilde{A}$ définie par $(\widetilde{A}(x))_i = \sum a_{ij} x_j$. Il est clair que $L(\widetilde{A}) = A$. Dans la suite, on se permettra d'identifier A et $\widetilde{A}$.

Considérons alors les sous-groupes de Cartan de GL_n : on sait qu'il y en a $[\frac{1}{2} n] + 1$ classes, et on obtient un représentant, noté $\mathcal{H}(p)$, dans chaque classe comme ceci : on considère les éléments admettant comme vecteurs propres dans C^n les vecteurs $e_1, \dots, e_{n-2p}$ ainsi que les vecteurs $e_{j-1} + ie_j$ et $e_{j-1} - ie_j$ pour $j = n - 2p + 2q$ avec $1 \leqslant q \leqslant p$ (où $e_1, \dots, e_n$ est la base canonique). Dans ce qui suit, toutes les démonstrations seront faites (ou suggérées) pour le cas $p = 0$. Le sous-groupe de Cartan $\mathcal{H} = \mathcal{H}(0)$ est alors le sous-groupe des matrices diagonales ; pour $\lambda \in \underset{\sim}{R}^n$, avec $\prod \lambda_i \neq 0$, on désignera par h_λ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Le cas $p \neq 0$ se traite de manière analogue et les calculs faits ci-dessous restent valables, à condition de remplacer dans le sous-espace à 2 dimensions engendré par e_{j-1} et e_j les coordonnées réelles par des coordonnées complexes conjuguées $x_{j-1} + ix_j$ et $x_{j-1} - ix_j$: les éléments de $\mathcal{H}(p)$ deviennent alors les matrices diagonales (mais à coefficients complexes).

PROPOSITION 1. - $\mathcal{H}(p)$ est un sous-groupe de Cartan de $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}_\infty$).

Rappelons qu'un sous-groupe de Cartan d'un groupe est un sous-groupe nilpotent maximal dont tout sous-groupe d'indice fini est d'indice fini dans son normalisateur. Soit $\mathcal{K}$ le normalisateur de la composante connexe $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H} = \mathcal{H}(0)$: comme $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de Cartan de GL, on voit tout de suite qu'il suffit de montrer que :

$$\mathcal{K} = \mathcal{K} \cap GL_n \quad .$$

Or, pour $T \in \mathcal{K}$, on a $L(T) \in \mathcal{K} \cap GL$ et $L(L(T)^{-1}\, T) = I$. Autrement dit, nous pouvons supposer que $L(T) = I$. On a alors, pour $A \in \mathcal{H}'$:

$$T^{-1}\, AT = L(T^{-1}\, AT) = L(A) = A$$

et T commute avec $\mathcal{H}'$. Écrivons $(T(x))_i = x_i + \varphi_i(x)$, avec φ_i négligeable devant x, et exprimons que T commute avec $\mathcal{H}'$: on trouve :

$$(1) \qquad \varphi_i(\lambda x) = \lambda_i\, \varphi_i(x) \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in R^n \;,\; \lambda_i > 0 \quad .$$

Faisant tendre les λ_i vers zéro, et tenant compte de ce que φ_i est négligeable devant x, on en déduit $\varphi_i = 0$ et $T = I \in \mathcal{H}$.

2. Algèbre de Lie de $\mathcal{G}_\infty$. Éléments réguliers de $\mathcal{G}$.

Le groupe $\mathcal{G}_\infty$ est limite projective des groupes de Lie $\mathcal{G}_k$ pour k fini. On peut donc lui associer une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ limite projective des algèbres de Lie $\mathfrak{g}_k$ des groupes $\mathcal{G}_k$. On vérifie facilement que $\mathfrak{g}$ s'identifie à l'espace vectoriel des "champs de vecteurs formels" $\Sigma\, u_i\, \partial/\partial x_i$, où les u_i sont des séries formelles nulles en 0, muni du crochet évident :

$$[\Sigma\, u_i\, \partial/\partial x_i \;,\; \Sigma\, v_i\, \partial/\partial x_i] = \sum_i \Big(\sum_j \Big(u_j\, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_j\, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)\Big)\, \partial/\partial x_i \quad .$$

Au sous-groupe de Cartan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}_\infty$ correspond la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ formée des champs $\Sigma\, \lambda_i\, x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. On vérifie aisément que :

$$[\Sigma\, \lambda_i\, x_i\, \partial/\partial x_i \;,\; x^\alpha\, \partial/\partial x_j] = (\Sigma\, \alpha_i\, \lambda_i - \lambda_j)\, x^\alpha\, \partial/\partial x_j$$

ce qui montre d'une part que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre commutative maximale égale à sa normalisatrice (donc une sous-algèbre de Cartan), d'autre part que les racines non nulles de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$ sont les formes linéaires $\sum \alpha_i \lambda_i - \lambda_j$ pour $|\alpha| \geq 1$ et $\alpha \neq \varepsilon_j$.

Considérons maintenant le groupe $\mathcal{H}$ opérant sur $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe. On voit que les champs $x^\alpha \partial/\partial x_j$ sont des vecteurs propres pour $\mathcal{H}$, le caractère correspondant étant le caractère $h_\lambda \to \lambda_j^{-1} \lambda^\alpha$. D'où la définition : l'élément $h_\lambda \in \mathcal{H}$ sera dit régulier s'il satisfait aux conditions :

$$\text{(I)} \qquad \lambda_j \neq \lambda^\alpha \quad \text{pour tout } \alpha \text{ avec } |\alpha| \geq 1 \text{ et } \alpha \neq \varepsilon_j .$$

Remarquons que les raisonnements faits au n° 1 montrent que le commutant d'un élément régulier de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}_\infty$ est $\mathcal{H}$ (prendre les dérivées partielles des deux membres de (1) à l'origine), mais cela n'est pas nécessairement vrai dans $\mathcal{G}$ lui-même.

Si maintenant nous considérons l'élément h_λ de $\mathcal{G}$ indépendamment du système de coordonnées choisi, les λ_i s'interprètent comme les valeurs propres de la partie linéaire de h_λ. D'où la définition :

DÉFINITION 1. - Soit $T \in \mathcal{G}$ (resp. $T \in \mathcal{G}_\infty$) et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (réelles ou complexes) de $L(T)$. On dit que T est régulier si les λ_i satisfont à (I).

Remarquons que (I) implique $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$. Par suite, $L(T)$ sera diagonisable (dans le champ complexe). Plus précisément, si $L(T)$ a p paires de valeurs propres complexes conjuguées (nous dirons que T est de type p), il existera un $R \in GL_n$ tel que $RL(T)R^{-1} = L(RTR^{-1}) \in \mathcal{H}(p)$. D'autre part, (I) entraîne également $|\lambda_i| \neq 1$, car si λ_i est valeur propre, $\bar{\lambda}_i$ l'est aussi et $|\lambda_i| = 1$ entraîne $\lambda_i = \lambda_i^2 \bar{\lambda}_i$.

Le premier résultat fondamental est le théorème de conjugaison suivant :

THÉORÈME 1. - Soit $T \in \mathcal{G}$ un élément régulier de type p. Il existe un $R \in \mathcal{G}$ tel que $R^{-1}TR \in \mathcal{H}(p)$.

3. Le théorème de conjugaison. Point de vue formel.

PROPOSITION 2. - Soit T un élément régulier de $\mathcal{G}_\infty$. Il existe un $R \in \mathcal{G}_\infty$ et un seul tel que $L(R) = I$ et $R^{-1}TR = L(T)$.

Par changement linéaire de coordonnées (ce qui ne modifie pas l'identification de GL_n à un sous-groupe de $\mathcal{G}_\infty$), on peut supposer que $L(T)$ est diagonale (comme toujours, on fait la démonstration en supposant les λ_i réels). Posons

$$(T(x))_i = \lambda_i x_i + \sum_{|\alpha|>1} t_{\alpha,i} x^\alpha$$

$$(R(x))_i = x_i + \sum_{|\alpha|>1} r_{\alpha,i} x^\alpha$$

et écrivons que $TR = RL(T)$: on obtient :

$$\lambda_i x_i + \lambda_i \sum r_{\alpha,i} x^\alpha + \sum t_{\alpha,i} (R(x))^\alpha = \lambda_i x_i + \sum r_{\alpha,i} (\lambda x)^\alpha$$

d'où :

$$\lambda_i r_{\alpha,i} + P_{\alpha,i} = \lambda^\alpha r_{\alpha,i}$$

où $P_{\alpha,i}$ est un polynôme par rapport aux $r_{\beta,j}$ avec $|\beta| < |\alpha|$. D'où par récurrence sur $|\alpha|$, l'existence et l'unicité des $r_{\alpha,i}$.

COROLLAIRE. - Soit T un élément régulier de $\mathcal{G}$, de type p. Il existe un $R \in \mathcal{G}$ et un $N \in \mathcal{H}(p)$ tels que $R^{-1} TR - N$ s'annule ainsi que toutes ses dérivées à l'origine.

Il suffit d'appliquer la proposition 2 à $L_\infty(T)$, de remonter le R trouvé en un élément de $\mathcal{G}$ et de le multiplier par un élément de GL_n qui diagonalise $L(T)$: on trouve ainsi $R \in \mathcal{G}$ et $N \in \mathcal{H}(p)$ tels que $R^{-1} TR \equiv N$ modulo $\mathfrak{N}_\infty$, ce qui équivaut à dire que l'application $x \to R^{-1} TR(x) - N(x)$ s'annule avec toutes ses dérivées en 0.

4. Cas d'une contraction.

Dans ce numéro, nous allons démontrer le théorème 1 dans le cas particulier d'une contraction, c'est-à-dire d'un élément T de G tel que $\|L(T)\| < 1$. Il existe alors un $r > 0$ et un $S < 1$ tels que T soit défini sur un voisinage de la boule $B_r = \{x \mid \|x\| \leq r\}$ et que l'on ait $\|T(x)\| < S\|x\|$ et $\|J(x)\| < S$ pour $x \in B_r$ (où $J(x)$ désigne l'application linéaire tangente à T au point x).

LEMME 1. - Soit A l'ensemble des applications de classe C^∞ de B_r dans $\underset{\sim}{R}^n$, nulles ainsi que toutes leurs dérivées en 0. Pour toute $f \in A$, la série de terme général $L^{-n} f T^n$ converge uniformément ainsi que chacune de ses dérivées sur B_r.

Posons
$$\|f\|^2_{k,\rho} = \sup_{\|x\|\leq\rho} \sum_{i_1,\dots,i_k} \left|\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}\right|^2 .$$

Pour tout ρ avec $0 < \rho \leq r$, il existe une constante $K(k, \rho)$ telle que
$$\|f\|_{h,\rho} \leq K(k, \rho)\, \|f\|_{k,\rho} \quad \text{pour} \quad 0 \leq h < k \quad \text{et} \quad f \in A ,$$

et $K(k, \rho)$ tend vers zéro, pour k fixé, quand ρ tend vers zéro. De plus, pour tout système $(i_1, \dots, i_k)$, on a une formule du type :

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(f(T(x))) = \sum_{j_1,\dots,j_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_k}}(T(x))\, \theta^{j_1,\dots,j_k}_{i_1,\dots,i_k}(x) + P(f, x)$$

où les θ sont les coefficients de la matrice de la puissance tensorielle k-ième $J_k(x)$ de $J(x)$, et où P est un polynôme sans terme constant par rapport aux dérivées d'ordre $< k$ de f, les coefficients étant eux-mêmes des polynômes par rapport aux dérivées d'ordre $\leq k$ de T. On en déduit l'existence d'une constante M_k telle que

$$\sup_{\|x\|\leq\rho} \|P(f, x)\| \leq M_k \|f\|_{k-1,\rho} \quad \text{si} \quad \|f\|_{k-1,\rho} \leq 1 .$$

D'autre part, on a $\|J_k\| < S^k$, d'où :

$$\|L^{-1} f(T(x))\|_{k,\rho} < a(S^k + K(k, \rho)\, M_k)\, \|f\|_{k,\rho} \tag{2}$$

si $\|f\|_{k,\rho}$ est assez petit, avec $a = \|L^{-1}\|$. On peut alors trouver un k_o assez grand pour que $S^k < a^{-1}$ pour $k \geq k_o$. Fixons un tel $k \geq k_o$; on peut choisir ρ assez petit pour que la constante qui apparait au second membre de (2) soit < 1 et que $\|f\|_{k,\rho}$ soit assez petit. L'application L^{-1} fT satisfait d'après (2) aux mêmes hypothèses que f d'où par récurrence des inégalités

$$\|L^{-n} fT^n\|_{k,\rho} < M^n \|f\|_{k,\rho} \quad \text{avec} \quad M < 1 .$$

On en déduit que la série de terme général $L^{-n} fT^n$ converge uniformément ainsi que ses dérivées d'ordre $\leq k$ sur la boule $\|x\| \leq \rho$. Mais il existe un n tel que $\|T^n(x)\| \leq \rho$ pour $\|x\| \leq r$: comme L est linéaire, on en déduit que la dite série converge ainsi que ses dérivées d'ordre $\leq k$ sur B_r tout entière. D'où le lemme, puisque k est arbitraire $\geq k_o$.

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> $T \in \mathcal{G}$ <u>avec</u> $\|L(T)\| < 1$ <u>et</u> $T \equiv L(T)$ <u>modulo</u> $\mathcal{R}$. <u>Il existe un</u> $R \in \mathcal{R}$ <u>avec</u> $RTR^{-1} = L(T)$.

On applique le lemme 1 en prenant $f = L^{-1}\ T - I$: on posera $R = I + \sum_{n=0}^{\infty} L^{-n}\ fT^n = \lim L^{-n}\ T^n$. On a bien $R \in \mathcal{R}$ et $L^{-1}\ RT = R$.

Il est clair que la proposition 3 jointe au corollaire à la proposition 2 entraîne le théorème 1 dans le cas d'une contraction, ou d'une dilatation (inverse d'une contraction). Il ne nous reste plus qu'à examiner le cas d'un élément régulier T tel que $L(T)$ ait à la fois des valeurs propres de module < 1 et de module > 1 .

REMARQUE. - Si dans les hypothèses de la proposition 3, on suppose de plus que le jacobien de T est constant, donc égal au jacobien de L , alors le jacobien de $R = \lim L^{-n}\ T^n$ est lui aussi constant et même égal à 1 .

5. Homéomorphismes conservant le volume.

Soit ω une forme différentielle de degré n , régulière en 0 . On désigne par $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$) le sous-groupe de $\mathcal{G}$ formé des homéomorphismes locaux conservant ω à un facteur constant près (resp. à rien du tout près). Autrement dit, si on choisit un système de coordonnées tel que $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, alors $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$) est le groupe des homéomorphismes locaux de jacobien constant (resp. égal à 1).

Il est clair que l'image de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{G}_1 = GL$ est GL tout entier et que réciproquement (après choix d'un système de coordonnées comme ci-dessus) $GL \cap \mathcal{U} = GL$. De même, l'image de $\mathcal{V}$ est le groupe spécial SL et $GL \cap \mathcal{V} = SL$.

PROPOSITION 4. - <u>L'image canonique de</u> $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$) <u>dans</u> $\mathcal{G}_\infty$ <u>est le sous-groupe des homéomorphismes formels de jacobien constant</u> (resp. <u>égal à</u> 1).

Il suffit de montrer que tout homéomorphisme formel S' de jacobien constant égal à a est l'image d'un S de jacobien a . Soit $S' = (s'_1\ , \dots , s'_n)$. On peut supposer (quitte à composer S' avec une permutation des variables) que $D(s'_1\ , \dots , s'_{n-1})/D(x_1\ , \dots , x_{n-1})(0) \neq 0$. Remontons les séries formelles $s'_1\ , \dots , s'_{n-1}$ en des fonctions différentiables $s_1\ , \dots , s_{n-1}$ et aussi la série formelle $s'_n(x_1\ , \dots , x_{n-1}\ , 0)$ en une fonction $d_n(x_1\ , \dots , x_{n-1})$. Considérons l'équation aux dérivées partielles :

(3) $$\mathrm{dét}(\partial s_i/\partial x_j)_{1\leq i,j\leq n} = a$$

où s_n est la fonction inconnue. L'hyperplan $x_n = 0$ est non caractéristique au voisinage de 0. Par suite, il existe une solution différentiable de (3), et une seule, au voisinage de 0 telle que $s_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = d_n$. Posons $S = (s_1, \dots, s_n)$: l'image de S est S', car la série de Taylor de s_n et s'_n sont deux solutions formelles de (3) égales sur l'hyperplan $x_n = 0$, et on a évidemment unicité d'une telle solution. Par suite S répond à la question.

6. Eléments réguliers de $\mathcal{V}$.

On voit facilement que $\mathcal{H}(p) \cap \mathcal{V}$, bien qu'étant un sous-groupe de Cartan de SL, n'est pas un sous-groupe de Cartan de $\mathcal{V}$. Les éléments de $\mathcal{G}$ qui commutent par exemple avec $\mathcal{H}(0) \cap \mathcal{V}$ sont les transformations T de la forme :

(4) $$(T(x))_i = x_i\, f_i(\omega) \quad \text{avec} \quad \omega = x_1 \dots x_n \quad .$$

Un calcul simple montre que le jacobien de (7) est égal à $d/d\omega(\omega \prod f_i(\omega))$, d'où l'on déduit aisément que $T \in \mathcal{V}$ si et seulement si $\prod f_i(\omega) = 1$. D'autre part, deux transformations (4) appartenant à $\mathcal{V}$ commutent, d'où l'on déduit que le sous-groupe $\mathcal{H}'(0)$ des éléments de $\mathcal{V}$ de la forme (4) est un <u>sous-groupe commutatif maximal</u> de $\mathcal{V}$. Je ne sais pas si c'est un sous-groupe de Cartan au sens précis rappelé plus haut. On désignera plus généralement par $\mathcal{H}'(p)$ le commutant dans $\mathcal{V}$ de $\mathcal{H}(p) \cap \mathcal{V}$: c'est aussi un sous-groupe commutatif maximal qu'il serait facile de caractériser.

D'autre part, l'algèbre de Lie de $\mathcal{V}_\infty$ s'identifie à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels de divergence nulle. Les champs $x^\alpha\, \partial/\partial x_i$, pour $\alpha_i = 0$, et $x^{\alpha+\varepsilon_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - k\, x^{\alpha+\varepsilon_j} \frac{\partial}{\partial x_j}$, avec $k = \frac{\alpha_i + 1}{\alpha_j + 1}$, en formant une "base" et les caractères de $\mathcal{H}(0) \cap \mathcal{V}$ correspondant sont les caractères $\lambda^\alpha \lambda_i^{-1}$ pour $|\alpha| \geq 1$, $\alpha_i = 0$, et λ^α pour $|\alpha| \geq 0$. Parmi ces caractères, les caractères λ^α avec $\alpha = k\varepsilon$ sont les seuls triviaux. D'où la définition d'un élément régulier de $\mathcal{V}$ (ou de $\mathcal{V}_\infty$) :

DÉFINITION 2. - <u>Un élément</u> T <u>de</u> $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{V}_\infty$) <u>sera dit régulier si les valeurs propres</u> λ_i <u>de</u> $L(T)$ <u>satisfont aux conditions suivantes</u> :

(I bis) $$\lambda_i = \lambda^\alpha \text{ entraîne } \alpha = k\varepsilon + \varepsilon_i$$

(II) $$|\lambda_i| \neq 1$$

(II bis) $\quad$ les λ_i réels sont positifs .

Remarquons que la condition (I bis) entraîne que $L(T)$ a ses valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable. D'autre part (I bis) entraîne la condition (II) dès que la dimension n est $\geqslant 3$. Enfin, STERNBERG n'impose pas la condition (II bis), mais elle semble essentielle pour ses démonstrations, qui utilisent (voir proposition 9 ci-dessous) le fait que la matrice $L(T)$ se trouve sur un sous-groupe à un paramètre réel de SL , ce qui n'est pas toujours vrai si $L(T)$ a des valeurs propres réelles négatives.

Énonçons maintenant le :

THÉORÈME 2. - Pour tout élément régulier T de type p de $\mathcal{Y}$, il existe un $R \in \mathcal{Y}$ tel que $R^{-1}\,TR \in \mathcal{K}'(p)$.

On commence par l'analogue formel :

PROPOSITION 5. - Pour tout élément T régulier de type p de $\mathcal{Y}_\infty$, il existe un $R \in \mathcal{Y}_\infty$ tel que $R^{-1}\,TR \in \mathcal{K}'(p)_\infty$.

On fait la démonstration pour $p = 0$. Par un changement linéaire de déterminant 1 de coordonnées, on peut supposer que $L(T)$ est diagonale. On cherche alors $R \in \mathcal{Y}_\infty$ et $M \in \mathcal{K}'(0)_\infty$ sous la forme :

$$(R(x))_i = x_i + \sum r_{\alpha,i}\, x^\alpha$$

$$(M(x))_i = x_i\, f_i(\omega) = x_i \sum m_{k,i}\, \omega^k$$

tels que $TR = RM$. Comme dans la démonstration de la proposition 2, on trouve les conditions :

$$\lambda^\alpha\, r_{\alpha,i} + P_{\alpha,i} = \lambda_i\, r_{\alpha,i} \quad \text{pour} \quad \alpha \neq k\varepsilon + \varepsilon_i \tag{5}$$

$$\lambda^\alpha\, r_{\alpha,i} + m_{k,i} + P_{\alpha,i} = \lambda_i\, r_{\alpha,i} \quad \text{pour} \quad \alpha = k\varepsilon + \varepsilon_i \tag{6}$$

où $P_{\alpha,i}$ est un polynôme par rapport aux $r_{\beta,j}$ avec $|\beta| < |\alpha|$ et aux $m_{\ell,j}$ avec $\ell < k$. La formule (5) détermine $r_{\alpha,i}$ pour $\alpha \neq k\varepsilon + \varepsilon_i$ et (6) détermine $m_{k,i}$ (par récurrence), mais laisse les $r_{\alpha,i}$ pour $\alpha = k\varepsilon + \varepsilon_i$ complètement indéterminés. On va en profiter pour satisfaire aux conditions $\prod f_i(\omega) = 1$ et $D(x) =$ jacobien de R en $x = 1$. Posons $D(x) = \sum d_\alpha\, x^\alpha$. On va choisir par récurrence sur k les $r_{\alpha,i}$ pour $\alpha = k\varepsilon + \varepsilon_i$ de telle sorte que $d_\alpha = 0$ pour $\alpha = k\varepsilon$ ($k > 0$: on a $d_o = 1$). Supposons ces choix faits pour $k < h$. Si on calcule le coefficient $d_{h\varepsilon}$ de D, on trouve :

$$d_{h\varepsilon} = \sum_i r_{h\varepsilon+\varepsilon_i, i} + Q_h$$

où Q_h est un polynôme par rapport aux r et aux m d'indices de hauteur $< hn$. D'où la possibilité du choix demandé.

Les r et les m sont alors complètement déterminés par les formules (5) et (6), et on a $RM = TR$. D'où en prenant les jacobiens :

$$D(x_1 f_1, \dots, x_n f_n)(d/d\omega(\omega \prod f_i(\omega))) = D(x) \qquad (7)$$

Posons $(d/d\omega(\omega \prod f_i(\omega))) = \sum c_k \omega^k$ et supposons démontré que $d_\alpha = 0$ pour $0 < |\alpha| < h$ et $c_k = 0$ pour $0 < kn < h$. L'équation (7) donne alors pour $|\alpha| = h$:

$$\lambda^\alpha d_\alpha + P_\alpha = d_\alpha \quad \text{si} \quad \alpha \neq k\varepsilon$$

$$d_\alpha + c_k + P_\alpha = d_\alpha \quad \text{si} \quad \alpha = k\varepsilon$$

où P_α est un polynôme sans terme constant par rapport aux d et aux c dont les indices sont de hauteur $< h$. On a donc $P_\alpha = 0$ par hypothèse de récurrence, d'où $c_k = 0$ et aussi $d_\alpha = 0$ pour $|\alpha| = h$ puisque $\lambda^\alpha \neq 1$ pour $\alpha \neq k\varepsilon$. D'où etc.

7. Existence de surfaces invariantes.

Soient T et M deux éléments de $\mathcal{G}$ satisfaisant aux deux conditions :

(II) les valeurs propres λ_i de $L(T)$ sont de module $\neq 1$

(III) M est de la forme (4) et $T \equiv M$ modulo $\mathfrak{N}$.

Soit A_+ (resp. A_-) l'ensemble des indices $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $|\lambda_i| > 1$ (resp. $|\lambda_i| < 1$). Posons :

$$J_+ = \{x | x_i = 0 \text{ pour } i \in A_-\}, \quad J_- = \{x | x_i = 0 \text{ pour } i \in A_+\}$$

et soit x_+ (resp. x_-) la projection de x sur J_+ (resp. J_-) parallèlement à J_- (resp. J_+). On posera $\|x\|_+ = \|x_+\|$ et $\|x\|_- = \|x_-\|$. Posons :

$$S_+ = \{x \mid \|x\|_+ > \|x\|_-\} , \quad S_- = \{x \mid \|x_+\| < \|x_-\|\}$$

$$C = \{x \mid \|x\|_+ = \|x\|_-\} \quad .$$

Il est clair que J_+ et J_- sont invariants par M, et il existe deux constantes c_1 et c_2, avec $c_2 < 1 < c_1$, telles que :

$$\|M(x)\|_+ \geq c_1 \|x\|_+ \quad \|M(x)\|_- \leqslant c_2 \|x\|_- \quad .$$

On en déduit que S_+ est invariant par M.

PROPOSITION 6. - Si $T \in \mathcal{G}$ satisfait à (II) et (III), il existe un $R \in \mathfrak{N}$ de jacobien constant égal à 1, tel que $T' = RTR^{-1}$ satisfasse à (II), (III) et laisse invariantes les deux surfaces J_+ et J_-.

Supposons pour simplifier que les λ_i sont réels et que $A_- = \{1 , \dots , m\}$. Il suffit de construire un $R \in N$ de la forme :

$$(R(x))_i = x_i \quad \text{pour} \quad i \leqslant m$$

$$(R(x))_i = x_i - \varphi_i(x_1 , \dots , x_m) \quad \text{pour} \quad i > m$$

tel que RTR^{-1} laisse J_- invariante. On appliquera ensuite le même raisonnement à $RT^{-1} R^{-1}$ pour construire un $R' \in N$ avec $R' = I$ sur J_-, de jacobien égal à 1, et tel que $R'(RTR^{-1}) R'^{-1}$ laisse J_+ invariante. Le produit RR' répond alors à la question. On voit facilement qu'il faut et qu'il suffit que les φ_i (nulles ainsi que toutes leurs dérivées en 0) satisfassent à :

$$\varphi_i = \lambda_i^{-1}(\varphi_i(\lambda_1 x_1 + g_1(x_1,\dots,x_m,\varphi_{m+1},\dots),\dots) - g_i(x_1,\dots,\varphi_{m+1},\dots))$$

avec $g_i(x) = T(x)_i - \lambda_i x_i$. On résout ces équations par approximations successives, en partant de fonctions identiquement nulles, par un procédé analogue à celui du lemme 1.

REMARQUE. - La proposition 5 est une généralisation d'un théorème de Poincaré pour $n = 2$, relatif à l'existence de courbes invariantes passant par un point "hyperbolique" d'une transformation plane.

PROPOSITION 7. - Soit $T \in \mathcal{G}$ satisfaisant à (II) et (III). Supposons que A_+ et A_- ne soient pas vides. Alors il existe un $R \in \mathfrak{N}$ de jacobien constant égal à 1 tel que $T' = RTR^{-1}$ satisfasse à (II) (III) et à la condition suivante :

(IV) $$T'(x) = M(x) \ \underline{\text{pour}} \ x \in J_+ \cup J_- \quad .$$

D'après la proposition 4, on peut supposer que T laisse J_+ et J_- invariantes. Les restrictions de T et M à J_- sont alors des contractions, et on peut appliquer deux fois la proposition 3. Il existe donc un homéomorphisme local X dans J_-, tangent d'ordre infini à l'identité en 0, avec $XTX^{-1} = M$ sur J_-. On prolonge X à $\underset{\sim}{R}^n$ en posant :

$$X(x)_- = X(x_-) \ , \quad X(x)_+ = J_X(x_-)^a \, x_+$$

où J_X = jacobien de X et $a = -1/(n-m)$ (en supposant $A = \{1, \dots, m\}$). On vérifie aussitôt que $X \in \mathfrak{N}$, est de jacobien constant égal à 1, que $X = I$ sur J_+ et $XTX^{-1} = M$ sur J_-. Puis on recommence en considérant T^{-1} au lieu de T, ce qui échange les rôles de J_+ et J_-.

8. <u>Démonstration du théorème</u> 1.

Soit T un élément régulier de $\mathcal{G}$, et soit $L = L(T)$. D'après la proposition 2, il existe un $R \in \mathcal{G}$ tel que $R^{-1}\,TR \equiv L$ modulo $\mathfrak{N}$. Si T est une contraction (ou une dilatation) la proposition 3 permet de conclure. Sinon, on peut appliquer la proposition 7 avec $M = L$ et le théorème 1 sera conséquence de la proposition suivante :

PROPOSITION 8. - <u>Soit</u> $T \in \mathcal{G}$ <u>satisfaisant à</u> (II), (III) <u>et</u> (IV). <u>Il existe un</u> $R \in \mathfrak{N}$, <u>égal à l'identité sur</u> J_+, J_- <u>et sur un voisinage de</u> $C - \{0\}$ <u>dans</u> $(S_+ \cup C) - \{0\}$, <u>et tel que</u> $R^{-1}\,TR = M$.

On peut supposer $S_+ \neq \emptyset$: sinon, on a $\underset{\sim}{R}^n = J_-$ et $T = M$.

Comme $T - M$ et $T^{-1} - M^{-1}$ s'annulent en 0 ainsi que toutes leurs dérivées, et sont nuls sur J_+ et J_-, on voit facilement que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\rho > 0$ tel que $x \in B_\rho$ entraîne :

(8) $$\|T(x) - M(x)\|_\pm \leqslant \varepsilon \|x\|_\pm \quad \text{et} \quad \|T^{-1}(x) - M^{-1}(x)\|_\pm \leqslant \varepsilon \|x\|_\pm$$

d'où par exemple

$$\|T(x)\|_+ \geqslant \|M(x)\|_+ - \varepsilon\|x\|_+ \geqslant (c_2 - \varepsilon)\,\|x\|_+ \quad .$$

Choisissons alors c'_1 et c'_2 avec $c'_2 < 1 < c'_1$ et $c'_2 > \sup(c_2 \, , 1/c_1)$,

$$c_1' < \inf(c_1\ ,\ 1/c_2) \quad .$$

On peut choisir ε donc ρ assez petits pour que T et T^{-1} soient définis sur B_ρ et y satisfassent aux inégalités :

$$(9) \qquad \begin{cases} \|T(x)\|_+ > c_1'\|x\|_+\ , & \|T(x)\|_- < c_2'\|x\|_- \\ \|T^{-1}(x)\|_+ < c_2'\|x\|_+\ , & \|T^{-1}(x)\|_- > c_1'\|x\|_- \end{cases} \quad .$$

En particulier, (9) entraîne que $T(B_\rho \cap S_+) \subset S_+$ et $T^{-1}(B_\rho \cap S_-) \subset S_-$. Posons alors, pour $r < \rho$, assez petit pour que $T(B_r)$ et $T^{-1}(B_r)$ soient contenus dans B_ρ :

$$W = W_{r,o} = \text{adhérence de } \{x | x \in B_r \cap S_+\ ,\ T^{-1}(x) \notin S_+\}$$

$$W_{r,n} = T(W_{r,n-1}) \cap B_r \quad \text{pour} \quad n > 0$$

$$W_{r,n} = T^{-1}(W_{r,n+1}) \cap B_r \quad \text{pour} \quad n < 0 \quad .$$

Montrons que :

$$(10) \qquad U = J_+ \cup J_+ \cup J_- \cup \bigcup_{-\infty}^{+\infty} W_{r,n} \ \underline{\text{est un voisinage de}}\ 0 \quad .$$

Soit $x_o \in S_+ \cap B_{r/2}$ avec $x_o \notin J_+$: on a donc $\|x_o\|_+ > \|x_o\|_- > 0$. Posons $\alpha = \|x_o\|_+/\|x_o\|_-$ et $x_1 = T^{-1}(x_o)$. D'après (9), on a :

$$\|x_1\|_+ \leqslant c_2'\|x_o\|_+ \quad \text{et} \quad \|x_1\|_- \geqslant c_1'\|x_o\|_1 \quad .$$

D'où $\|x_1\|_+/\|x_1\|_- \leqslant (c_2'/c_1')\,\alpha$. Si $(c_2'/c_1')\,\alpha \leqslant 1$, alors $x_1 \notin S_+$ et par suite $x_o \in W_{r,o}$. Sinon, on a. $x_1 \in S_+$, d'où :

$$\|x_1\|^2 = \|x_1\|_+^2 + \|x_1\|_-^2 < 2\|x_1\|_+^2 < 2(c_2')^2\ \|x_o\|_+^2 < r^2$$

et on peut recommencer en posant $x_2 = T^{-1}(x_1)$: on a

$$\|x_2\|_+/\|x_2\|_- \leqslant (c_2'/c_1')^2$$

et, ou bien $x_2 \notin S_+$ et alors $x_1 \in W_{r,o}$ et $x_o \in W_{r,1}$, ou bien $x_2 \in S_+$ et on a $\|x_2\|^2 < 2\|x_2\|_+^2 < 2(c_2')^4\ \|x_o\|_+^2 < r^2$, etc.

Finalement, on voit qu'il existe un plus grand entier k tel que $x_k = T^{-k}(x_o)$ appartienne à S_+ (parce que $\alpha \neq 0$ et $c_2' < c_1'$), que x_k appartient alors à $W_{r,o}$ et que $x_h = T^{k-h}(x_k) \in W_{r,k-h}$ pour $0 \leqslant h \leqslant k$. D'où $x_o \in U$.

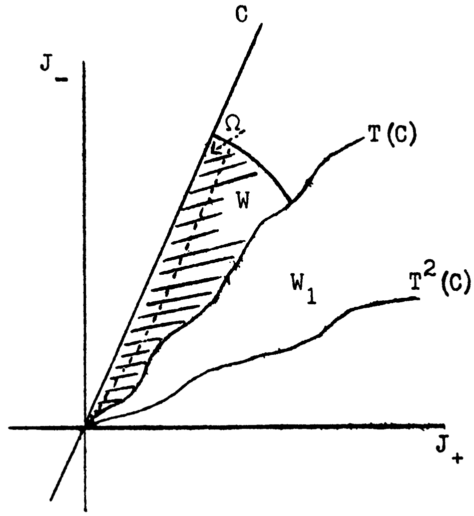
D'autre part, il existe un $r' \leqslant r$ tel que $T^{-1}(B_r) \supset B_{r'}$. Si $x \in B_{r'} \cap S_-$ et $y = T(x) \notin S_-$, alors $y \in \overline{B_r \cap S_+}$ et $T^{-1}(y) \in S_-$, d'où l'on tire que y est limite de points z de $B_r \cap S_+$ tels que $T^{-1}(z) \in S_-$. On a donc $y \in W_{r,o}$ et $x \in W_{r,-1}$. D'où :

$$W_{r,-1} \supset \{x | x \in B_{r'} \cap S_- , \quad T(x) \notin S_-\}$$

et il suffit de recommencer la démonstration en intervertissant les $+$ et les $-$ et en remplaçant T par T^{-1} pour montrer que U contient $B_{r'/2} \cap (S_- - J_-)$. D'où finalement l'assertion (10).

Soit alors Ω l'adhérence d'un voisinage ouvert de $(C - \{0\}) \cap W$ dans W, ne rencontrant pas $T(C) - \{0\}$.

Posons $R(x) = x$ pour $x \in \Omega$. Si maintenant $x \in T(C) \cap W$, alors $y = T^{-1}(x)$ est dans $C \cap B_\rho$ et on posera $D^\alpha R(x) = (D^\alpha MT^{-1})(x)$. On vérifie que l'on obtient ainsi une "fonction différentiable" au sens de WHITNEY sur le fermé $\Omega \cup (T(C) \cap W)$, tangente d'ordre infini à I en 0. On peut donc la prolonger en une fonction différentiable R_o sur W tout entier, tangente d'ordre infini à I en 0, égale à I sur Ω, et tangente d'ordre infini à MT^{-1} le long de $T(C)$.



Pour $x \in W_{r,n}$, donc $T^{-n}(x) \in W$, on posera :

$$R_n(x) = M^n R_o T^{-n}(x)$$

et on trouve ainsi des fonctions différentiables dans les $W_{r,n}$, qui se raccordent bien sur les intersections $W_{r,n} \cap W_{r,n+1} \subset T^n(C)$. Enfin, on prolonge ceci en une fonction R sur U tout entier en posant $R(x) = x$ pour $x \in J_+ \cup J_-$, et on montre, grâce à des majorations impossibles à reproduire ici, que l'on obtient ainsi un homéomorphisme local R, qui, d'après la méthode même de construction, satisfait évidemment à $RT = MR$, ce qui achève la démonstration de la proposition 6 et par suite du théorème 1.

REMARQUE. - En regardant les démonstrations, on s'aperçoit facilement que le théorème 1 est encore valable si l'on suppose seulement que $L(T)$ est semi-simple (mais avec éventuellement des valeurs propres multiples) et que ses valeurs propres satisfont à (I) pour $|\alpha| > 1$.

9. Sous-groupes à un paramètre de $\mathcal{Y}$.

Nous allons montrer que tout élément régulier de $\mathcal{Y}$ est sur un sous-groupe à un paramètre de $\mathcal{Y}$. D'après les propositions 5 et 7, on peut supposer qu'il existe un $M \in \mathcal{H}'(p)$ tel que T et M satisfassent à (I bis), (II), (II bis), (III) et (IV). D'autre part, il est clair que pour tout élément de $\mathcal{H}'(p)$ satisfaisant à (II bis), il existe un sous-groupe à un paramètre (M_s) de $\mathcal{H}'(p)$ tel que $M_1 = M$. D'autre part, on peut appliquer la proposition 8 à T : soit R l'élément de $\mathcal{R}$ fourni par cette proposition. Posons $T'_s = RM_s R^{-1}$: on obtient un sous-groupe à un paramètre contenu dans $\mathcal{S}$ tel que $T'_1 = T$ et que $T'_s(x) = M_s(x)$ pour $x \in S_+$ suffisamment voisin de C et s suffisamment petit. On va modifier T'_s de manière à le faire rentrer dans $\mathcal{Y}$:

PROPOSITION 9. - *Il existe un sous-groupe à un paramètre* (T_s) *de* $\mathcal{Y}$ *tel que* $T_1 = T$ *et que* $T_s(x) = M_s(x)$ *pour* $x \in S_+$ *suffisamment voisin de* C *et* s *suffisamment petit.*

Soit v le champ de vecteurs correspondant à T'_s. On a :

$$\exp \int_s^{s+1} \operatorname{div} v(T'_r(x))\, dr = \text{jacobien de } T = 1 \quad . \tag{11}$$

On va déterminer une fonction f telle que le champ fv engendre un sous-groupe à un paramètre de $\mathcal{Y}$ avec $T_1 = T$. Pour cela, il faut et il suffit que f satisfasse aux deux conditions :

$$g(x\ ,\ s) = \int_s^{s+1} f(T'_r(x))^{-1}\, dr = 1 \tag{12}$$

$$\operatorname{div} fv = 0 \quad . \tag{13}$$

Or on peut montrer (comme au n° 8) que l'application $(y , s) \to T'_s(y)$ est un homéomorphisme (local!) de $(C - \{0\}) \times \underset{\sim}{R}$ sur le complémentaire de $J_+ \cup J_-$. Posons $\varphi(y , s) = f(T'_s(y))$: alors (12) devient :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(y , s) + \varphi(y ; s) \operatorname{div} v(T'_s(y)) = 0 \tag{14}$$

équation dont les solutions sont :

$$\varphi(y , s) = K(y) \exp(- \int_0^s \operatorname{div} v(T'_r(y))\, dr) \quad .$$

Tenant compte de (11), on voit que $g(y , s)$ est alors une constante en s et on peut choisir la constante d'intégration $K(y)$ de manière à satisfaire à (12), dans le complémentaire de $J_+ \cup J_-$. Mais sur $J_+ \cup J_-$, on a $R(x) = x$, ce qui montre qu'on peut prendre $f = 1$ sur $J_+ \cup J_-$. Enfin, on montre que l'on obtient bien ainsi une fonction f différentiable au voisinage de 0.

De plus, en tout point de S_+ suffisamment voisin de C, on a $T'_s(x) = M_s(x)$ pour s petit, d'où $\operatorname{div} v(x) = 0$ et fv est proportionnel à v. On a donc $T_s(x) = M_{ks}(x)$ pour s petit et comme $L(T_s) = L(M_s)$, on a nécessairement $k = 1$.

10. Démonstration du théorème 2.

Gardons les hypothèses et notations du numéro précédent. Les applications $(y , s) \to F(y , s) = T_s(y)$ et $(y , s) \to G(y , s) = M_s(y)$ sont deux homéomorphismes de $(C - \{0\}) \times \underset{\sim}{R}$ sur le complémentaire de $J_+ \cup J_-$. Soit S le composé de F avec G^{-1} : autrement dit, on pose $S(x) = T_s(y)$ si $x = M_s(y)$. On prolonge S en posant $S(x) = x$ pour $x \in J_+ \cup J_-$ et on vérifie que S est un homéomorphisme local. Il est clair que $ST_s = M_s S$ pour tout s, d'où $STS^{-1} = M$. Compte tenu des remarques du numéro 9, le théorème 2 sera démontré si nous prouvons que $S \in \mathcal{V}$. Or, comme T_s et M_s sont tous deux de jacobien égal à 1, la relation $ST_s = M_s S$ montre que le jacobien de S est constant sur chaque orbite. Or il est égal à 1 sur C, puisque $T_s(x) = M_s(x)$ (d'où $S(x) = x$) pour x assez voisin de C dans S_+.

11. Deux autres groupes.

Dans [4], STERNBERG traite également du cas du groupe $\mathcal{U}$ des germes d'homéomorphismes conservant le volume à un facteur constant près. On a $\mathcal{K}(p) \subset \mathcal{U}$ et par suite $\mathcal{H}(p)$ est un sous-groupe de Cartan de $\mathcal{U}$. On dira qu'un élément de $\mathcal{U}$ est régulier s'il est régulier dans $\mathcal{G}$, c'est-à-dire satisfait à (I). STERNBERG affirme que le théorème de conjugaison analogue aux théorèmes 1 et 2 est encore valable dans $\mathcal{U}$ ([4], théorème 5), mais se contente d'indications assez sommaires sur la démonstration, du genre "on raisonne comme dans le cas de $\mathcal{V}$ " alors qu'il y a des différences assez sensibles. On démontre facilement le théorème de conjugaison "formel" en prouvant que si T est un élément régulier de $\mathcal{U}$, l'élément R de $\mathcal{G}$ défini dans la proposition 2 appartient à $\mathcal{U}$ (et même à $\mathcal{V}$). Puis STERNBERG affirme ([4], théorème 7) que "tout élément de $\mathcal{U}$ est sur un sous-groupe à un paramètre". Il faut évidemment entendre "tout élément régulier" et de plus supposer que les valeurs propres réelles de $L(T)$ sont positives. On peut alors aisément adapter en partie la démonstration de la proposition 9 (on utilise la remarque finale du numéro 5 dans le cas d'une **contraction** ou d'une dilatation) pour montrer que T est sur un sous-groupe à un paramètre de $\mathcal{U}$. Cependant, l'équation (14) est remplacée par une **équation analogue**, mais non homogène : les solutions ne sont donc pas proportionnelles et la propriété $T_s(x) = M_s(x)$ pour $x \in S_+$ voisin de C et s petit n'est plus du tout évidente. Or cette propriété paraît essentielle pour montrer que le S construit au numéro 10 appartient à $\mathcal{U}$ (et même à $\mathcal{V}$ comme l'affirme STERNBERG).

D'autre part, STERNBERG traite aussi du cas du groupe $\mathcal{K}$ des germes d'homéomorphismes "hamiltoniens" dans $\underset{\sim}{R}^{2n}$, c'est-à-dire conservant la forme différentielle $dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n$. Le groupe linéaire correspondant est le groupe symplectique $Sp(2n)$ et on obtient un sous-groupe commutatif maximal en considérant les transformations T de la forme :

$$x'_i = x_i\, f_i(\omega_1 , \dots , \omega_n) \ , \quad y'_i = y_i\, g_i(\omega_1 , \dots , \omega_n)$$

avec $\omega_i = x_i\, y_i$ et $f_i\, g_i = 1$. On a évidemment des sous-groupes analogues correspondant aux autres classes de sous-groupes de Cartan de $Sp(2n)$. Les valeurs propres de $L(T)$ pour $T \in H$ se répartissent en n couples $(\lambda_i , \lambda_i^{-1})$ de nombres opposés, et T sera régulier si $\lambda^\alpha = \lambda^\beta$ entraîne $\alpha = \beta$. On peut alors démontrer le théorème de conjugaison formel, mais l'astuce des sous-groupes à un paramètre ne marche plus, car si v est un champ de vecteurs, il n'est pas en général possible de déterminer f de manière à ce que fv engendre un groupe à un paramètre hamiltonien. Cependant STERNBERG annonce, mais sans démonstration, que le théorème de conjugaison est encore valable dans $\mathcal{K}$ ([4], théorème 9).

12. Autres résultats.

Dans [2] et [3], STERNBERG traite aussi du cas des germes d'homéomorphismes de classe C^k pour k fini. Il démontre qu'un tel germe peut être linéarisé, s'il satisfait à (I), par un changement de coordonnées de classe C^h, où h est un entier ne dépendant que de k et des valeurs propres de $L(T)$, et tendant vers l'infini quand k croît. D'autre part, la condition (I) est en quelque sorte nécessaire : la transformation $x' = a^2 x + y^2$, $y' = ay$ par exemple (dont la partie linéaire est semi-simple) ne peut pas être linéarisée par un changement de coordonnées de classe C^2 (pour $a \neq 1$).

Par ailleurs, on démontre que si un sous-groupe à un paramètre (T_s) est tel que T_1 est linéaire, on peut trouver un $R \in G$ tel que $RT_s R^{-1}$ soit linéaire. Appliquant alors le théorème 1 et ce résultat au sous-groupe à un paramètre correspondant à un système d'équations différentielles

$$dx_i/dt = X_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{15}$$

avec $X_i(0, \ldots, 0) = 0$, on trouve le résultat suivant :

THÉORÈME 3. - Si la matrice des termes linéaires des X_i est semi-simple et si ses valeurs propres λ_i satisfont à la condition :

$$\lambda_i \neq \sum m_j \lambda_j \quad \text{pour tout } i \text{ et tous entiers } m_j \geq 0 \text{ avec } \sum m_j > 1$$

alors il existe un changement de coordonnées de classe C^∞ qui linéarise le système (15).

Ce théorème est la version "différentiable" de résultats dus à POINCARÉ, BIRKHOFF et finalement SIEGEL [1] dans le cas analytique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SIEGEL (Carl L.). - Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslosung, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1952, p. 21-30.

[2] STERNBERG (Shlomo). - Local contractions and a theorem of Poincaré, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 809-824.

[3] STERNBERG (Shlomo). - On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space, II., Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 623-631.

[4] STERNBERG (Shlomo). - The structure of local homeomorphisms, III., Amer. J. of math., t. 81, 1959, p. 578-604.