JEAN-LOUIS VERDIER

Sur les intégrales attachées aux formes automorphes

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. n° 216, p. 149-175

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__149_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 216

Février 1961

SUR LES INTÉGRALES ATTACHÉES AUX FORMES AUTOMORPHES

par Jean-Louis VERDIER

[d'après Goro SHIMURA]

1. Généralités sur le groupe hyperbolique.

1.1. Les espaces F_n . - Dans tout cet exposé, on pose $G = SL(2, \mathbb{R})$ groupe hyperbolique. On note K le sous-groupe compact maximal

(1.1.1) $$K(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ,$$

$\mathfrak{g}_0$ l'algèbre de Lie de G , et $\mathfrak{g}$ l'algèbre complexifiée dont on utilisera la base suivante

(1.1.2) $$W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \qquad Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \qquad \bar{Z} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

d'où les relations

(1.1.3) $$[W , \bar{Z}] = -\bar{Z} , \qquad [W , Z] = Z , \qquad [Z , \bar{Z}] = 2W$$

$$k(\theta) = \exp(2i\theta W) \quad .$$

Soit

$$\chi_n : k(\theta) \rightsquigarrow \exp(ni\theta)$$

un caractère de K . Si V est un espace vectoriel complexe de dimension finie, nous noterons $F_n(V)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables $\varphi : G \to V$ vérifiant

(1.1.4) $$\varphi(gk) = \varphi(g)\, \chi_n(k) , \qquad \forall\ k \in K \quad .$$

En interprétant les éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ comme des distributions (à valeurs complexes)de support l'origine, on voit que la propriété (1.1.4) est équivalente à la suivante

(1.1.5) $$\varphi * W = -\frac{n}{2}\varphi \quad .$$

Les relations (1.1.3) nous montrent alors que

$$(1.1.6) \qquad \begin{cases} \varphi * Z \in F_{n+2} \\ \varphi * \overline{Z} \in F_{n-2} \end{cases} .$$

G opère sur $F_n(V)$ par les translations à gauche, et dans la suite de l'exposé $F_n(V)$ sera toujours muni de cette structure de G-module. Les translations à gauche commuttant aux convolutions à droite, les opérateurs

$$*Z : \varphi \rightsquigarrow \varphi * Z$$
$$*\overline{Z} : \varphi \rightsquigarrow \varphi * \overline{Z}$$

sont des homomorphismes de G-modules.

L'espace homogène $X = G/K$ s'identifie canoniquement au demi-plan de Poincaré, l'application naturelle $G \to X$ se transformant, dans cette identification, en l'application

$$(1.1.7) \qquad g \rightsquigarrow \frac{ai+b}{ci+d}, \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et l'opération naturelle de G sur X se tranformant en

$$(1.1.8) \qquad g : z \rightsquigarrow \frac{az+b}{cz+d}, \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

A toute $\varphi \in F_n(V)$, attachons dans le demi-plan de Poincaré la fonction $f(z)$ définie par

$$(1.1.9) \qquad f\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) = (ci+d)^n \varphi(g), \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Cette formule a un sens à cause de (1.1.4). On obtient ainsi un isomorphisme de l'espace $F_n(V)$ sur l'espace des fonctions indéfiniment différentiables $X \to V$. Par transport de structure, G opère sur cet espace de la manière suivante : la transformée d'une fonction $f(z)$ par $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ n'est autre que

$$(-cz+a)^{-n} f\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right)$$

ou encore

(1.1.10) $$g^{-1}.f(z) = (cz + d)^{-n} f(gz) \quad .$$

Les opérateurs $* Z$ et $* \overline{Z}$ se transforment de même par transfert de structure en les opérateurs

(1.1.11) $$* Z = -\frac{n}{y} - 2i\frac{\partial}{\partial z}$$

(1.1.12) $$* \overline{Z} = 2i\, y^2 \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \quad .$$

La démonstration de tous ces résultats ne présente pas de difficultés (cf. [8], premiers exposés).

La formule (1.1.12) nous montre que les fonctions holomorphes sur X correspondent aux fonctions de $F_n(V)$ annulées par $* \overline{Z}$.

1.2. Représentations de dimension finie de G . - Nous nous bornerons à énoncer les résultats. (Pour les démonstrations, cf. [8], premiers exposés).

Les représentations irréductibles de G sont caractérisées par un entier $n \geqslant 0$, la représentation ρ_n est de dimension $n + 1$. Elle est définie au point de vue infinitésimal par les formules suivantes : l'espace V_n de la représentation admet une base

$$e_n , e_{-n+2} , \dots , e_n$$

et on a les formules

(1.2.1) $$\left\{\begin{array}{ll} \rho_n(W)\, e_p = \frac{p}{2}\, e_p & \\ \rho_n(Z)\, e_p = e_{p+2} & (= 0 \text{ si } p = n) \\ \rho_n(\overline{Z})\, e_p = \frac{1}{4}(n + p)(n - p + 2)\, e_{p-2} & (= 0 \text{ si } p = - n) . \end{array}\right.$$

Pour obtenir une construction globale, il suffit de prendre pour V_n l'espace des polynômes $u(t)$ à une variable à coefficients complexes, et de faire opérer G sur V_n par

(1.2.2) $$\rho_n(g)\, u(t) \rightsquigarrow (cz + d)^n\, u\left(\frac{at + b}{ct + d}\right) \quad ,$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad .$$

On remarque alors que $\rho_n(g)$ peut se définir de la même façon pour $g \in SL(2, \mathbb{C})$ et est alors fonction holomorphe de g.

Les e_p sont alors les vecteurs propres du compact K, et un calcul facile montre que

$$(1.2.3) \qquad e_{-n+2k} = \frac{(-1)^k}{(n-k)!} (t-i)^{n-k} (t+i)^k \qquad 0 \leq k \leq n \quad .$$

Nous aurons enfin besoin du résultat suivant.

(1.2.4) LEMME. - Il existe sur V_n une et une seule (à un facteur constant près) forme bilinéaire non dégénérée invariante par la représentation ρ_n. Elle est symétrique si n est paire, et alternée si n est impaire.

En effet, la représentation contragradiente de la représentation ρ_n est irréductible de dimension $n + 1$, donc isomorphe à la représentation ρ_n, ce qui démontre l'existence d'une telle forme bilinéaire. L'unicité est claire vu l'irréductibilité de ρ_n.

Si $n = 1$ la représentation ρ_n est la représentation évidente de $SL(2, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}^2$. La forme bilinéaire alternée $\det(u, v)$ est alors invariante par G. Dans le cas général ρ_n est visiblement la puissance symétrique n-ième de ρ_1 ; par suite la forme bilinéaire $\det(u, v)$ définit une forme bilinéaire dans V_n invariante par ρ_n alternée ou symétrique suivant la parité de n.

Remarquons enfin que V_n l'espace des polynômes de degré au plus n à coefficients complexes est le complexifié de $V_n^{\mathbb{R}}$ l'espace des polynômes de degré au plus n à coefficients réels, et que ρ_n conserve l'espace des polynômes réels.

2. Les fonctions automorphes à valeurs vectorielles.

2.1. Groupes fuchsiens de première espèce. - Soit Γ un groupe fuchsien de première espèce i. e. un sous-groupe discret de G tel que la mesure invariante du quotient G/Γ soit de volume fini.

Considérons dans G le sous-groupe

$$U = \{u = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; x \in \mathbb{R}\} \quad .$$

On appelle sous-groupe parabolique de Γ tout sous-groupe non trivial de la forme $\Gamma \cap g\,Ug^{-1}$. Soit Γ_p un sous-groupe parabolique de Γ. Alors $g^{-1}\,\Gamma_p\,g \subset U$. On peut toujours choisir g, ce que nous ferons désormais, de façon que $g^{-1}\,\Gamma_p\,g$ soit le sous-groupe $\{\begin{pmatrix}1 & q\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \; q \in \underset{\sim}{Z}\}$. On appelle pointe parabolique tout point de la frontière de X (i. e. les points réels ou le point à l'infini) stabilisé par un sous-groupe parabolique de Γ.

Comme Γ est de première espèce il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes paraboliques modulo les automorphismes intérieurs, et G/Γ est compact si et seulement s'il n'y a pas de sous-groupe parabolique.

Les groupes fuchsiens de première espèce sont les groupes discrets tels que X/Γ soit une surface de Riemann compacte privée d'un nombre fini de points : les points paraboliques.

2.2. Les espaces $S_k(\Gamma\,,\,n)$. - Dans la suite du paragraphe, Γ est fixé une fois pour toutes. Soit ρ_n la représentation irréductible de dimension $n+1$ de G et soit V_n l'espace de la représentation. Nous noterons $S_k(\Gamma\,,\,n)$ l'espace des fonctions $f : X \to V_n$ soumises aux trois conditions suivantes :

(2.2.1) (A_1) f est holomorphe

$$(A_2) \quad \forall\ \gamma \in \Gamma\,,\quad f(\gamma z) = (cz+d)^k\,\rho_n(\gamma)\,f(z) \qquad \gamma = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \quad .$$

Nous exprimerons la troisième condition un peu plus loin.

Soit Γ_p un sous-groupe parabolique de Γ, et $s \in G$ tel que

$$s^{-1}\,\Gamma_p\,s = \{\begin{pmatrix}1 & q\\ 0 & 1\end{pmatrix}\, q \in \underset{\sim}{Z}\} \quad .$$

Nous poserons

$$J^k(g\,,\,z) = (cz+d)^k \qquad g = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \quad .$$

Alors la fonction

$$f_s(z) = J^{-k}(s\,,\,z)\,\rho_n(s)^{-1}\,f(sz)$$

où f vérifie les conditions (A_1) et (A_2), possède la propriété suivante

(2.2.2) $\qquad q \in \mathbb{Z} \qquad f_s(z+q) = \rho_n\begin{pmatrix}1 & q\\ 0 & 1\end{pmatrix} f_s(z)$.

Mais nous avons vu que la représentation ρ_n se prolonge holomorphiquement à $SL(2, \mathbb{C})$, et par suite la fonction

$$\rho_n\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} f_s(z)$$

est holomorphe et périodique de période 1 d'après (2.2.2) ; elle admet par conséquent un développement en série de Fourier

(2.2.3) $$\rho_n\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} f_s(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} a_r \exp 2\pi i r z \quad .$$

Il est d'autre part facile de vérifier que pour tous les s tels que

$$s^{-1}\,\Gamma_p\, s = \{\begin{pmatrix}1 & q\\ 0 & 1\end{pmatrix} q \in \mathbb{Z}\}$$

les a_r sont les mêmes.

Ceci dit nous pouvons exprimer la troisième condition.

(A_3) $\begin{cases}\text{Pour tout sous-groupe parabolique de } \Gamma \\ \text{les coefficients } a_r \text{ sont nuls pour } r \leqslant 0 .\end{cases}$

Pour $n = 0$, c'est-à-dire pour la représentation triviale de G, les espaces $S_k(\Gamma, 0)$ ne sont autres que les "Spitzenformen" de poids k. Nous les noterons $S_k(\Gamma)$.

D'après le paragraphe 1 on peut faire correspondre à toute fonction $f \in S_K(\Gamma, n)$ une fonction $\varphi : G \to V_n$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(A_1') $\qquad \varphi * \overline{Z} = 0$

(A_2') $\qquad \varphi * W = -\frac{n}{2}\varphi , \quad \forall\ \gamma \in \Gamma , \quad \varphi(\gamma g) = \rho_n(\gamma)\,\varphi(g)$.

Pour exprimer la troisième condition, il faut d'abord considérer la fonction

(2.2.4) $$\varphi_s(g) = \rho_n(sg)^{-1}\,\varphi(sg)$$

et remarquer que la fonction

$$x \in \underset{\sim}{R} \qquad x \rightsquigarrow \varphi_s(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} g)$$

est périodique de période 1 , et que par suite elle admet un développement en série de Fourier

(2.2.5) $$\varphi_s(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} g) = \sum_{r \in \underset{\sim}{Z}} a_r(g) \exp(2\pi i r x) \qquad ;$$

il est alors facile de voir que la condition (A_3) se transforme en la condition (A'_3)

$$(A'_3) \begin{cases} \text{Pour tout sous-groupe parabolique de } \Gamma \text{ les} \\ \text{fonctions } a_r(g) \text{ sont nulles pour } r \leqslant 0 \text{ .} \end{cases}$$

Nous noterons encore cet espace de fonction $S_k(\Gamma , n)$.

2.3. <u>La filtration canonique de</u> $S_k(\Gamma , n)$. - Soit $\varphi \in S_k(\Gamma , n)$; on peut écrire

(2.3.1) $$\varphi(g) = \rho_n(g) \sum \varphi_p(g)\, e_p$$

où les e_p sont les vecteurs de base de V_n explicités en (1.2.1).

A l'aide des formules (1.2.1) il est facile de voir que les propriétés (A'_1) , (A'_2) et (A'_3) entraînent pour les φ_p les propriétés suivantes

(2.3.2) $$\begin{cases} \varphi_p(\gamma g) = \varphi_p(g) \qquad \forall\ \gamma \in \Gamma \\ \varphi_p * W = -\frac{k-p}{2}\varphi_p \\ \varphi_p * \overline{Z} = 1/4(n-p)(n+p+2)\, \varphi_{p+2} \qquad . \\ \text{Pas de terme de rang négatif ou nul dans les séries} \\ \text{de Fourier aux pointes paraboliques.} \end{cases}$$

De là et du fait que $\varphi_{n+2} = 0$ résulte une application canonique

$$P_0 : S_k(\Gamma , n) \rightarrow S_{k-n}(\Gamma)$$

de noyau noté $S^1_k(\Gamma , n)$. C'est l'application $\varphi \rightsquigarrow \varphi_n$.

Si $\varphi_n = 0$, alors (2.3.2) pour $p = n - 2$ conduit à une application canonique

$$P_1 : S_k^1(\Gamma , n) \to S_{k-n+2}(\Gamma) \quad ,$$

de noyau $S_k^2(\Gamma , n)$. En continuant ainsi on définit une filtration canonique

$$S_k^o(\Gamma , n) = S_k(\Gamma , n) \supset S_k^1(\Gamma , n) \dots \supset S_k^n(\Gamma , n) \supset S_k^{n+1}(\Gamma , n) = 0$$

et à des injections canoniques

$$(2.3.3) \qquad P_j : S_k^j(\Gamma , n)/S_k^{j+1}(\Gamma , n) \to S_{k-n+2j}(\Gamma)$$

dont nous nous servirons par la suite.

C'est l'injection qui, à $\varphi \in S_k^j(\Gamma , n)$ i. e. $\varphi_n = \varphi_{n-2} = \dots = \varphi_{n-2j+2} = 0$ fait correspondre φ_{n-2j} .

Nous aurons besoin par la suite du lemme suivant :

(2.3.4) LEMME. - L'injection

$$P_n : S_k^n(\Gamma , n) \to S_{k+n}(\Gamma)$$

est un isomorphisme.

Pour démontrer cela il suffit de voir que P_n est surjective ; or soit $\varphi \in S_{k+n}(\Gamma)$: il est immédiat de voir que la fonction

$$\Phi(g) = \rho_n(g)\ \varphi(g)\ e_{-n}$$

appartient à $S_k(\Gamma , n)$.

KUGA et SHIMURA dans [5] (voir aussi [8]) démontrent que les injections P_j sont surjectives pour $k - n + 2j \neq 0$ et nulles pour $k - n + 2j = 0$. Ils construisent de plus des injections canoniques de $S_{k-n+2j}(\Gamma)$ dans $S_k(\Gamma , n)$ et arrivent ainsi à déterminer entièrement les espaces $S_k(\Gamma , n)$. Nous n'aurons pas besoin de ces résultats dans la suite de l'exposé.

3. La classe de cohomologie attachée à une "Spitzenforme".

3.1. La suite exacte de cohomologie. - Nous noterons $\Omega^o(V_n)$ l'espace des fonctions $X \to V_n$ holomorphes, et $\Omega^1(V_n)$ l'espace des différentielles holomorphes à valeurs dans V_n . X étant un ouvert simplement connexe de $\underset{\sim}{C}$, on a la suite exacte suivante:

(3.1.1) $$0 \to V_n \to \Omega^0(V_n) \xrightarrow{d} \Omega^1(V_n) \to 0$$

d étant la différentielle.

Γ étant un sous-groupe fuchsien de G , Γ opère

- sur V_n par $x \rightsquigarrow \rho_n(\gamma)\, x$.
- sur $\Omega^0(V_n)$ par $f(z) \rightsquigarrow \rho_n(\gamma)\, f(\gamma^{-1} z)$
- sur $\Omega^1(V_n)$ par $\omega \rightsquigarrow \rho_n(\gamma)\, \omega \circ \gamma^{-1}$.

La suite (3.1.1) est une suite exacte de Γ module, ce qui permet de considérer les groupes de cohomologie de Γ à valeurs dans ces Γ-modules, et en particulier d'écrire la suite exacte de cohomologie :

(3.1.2) $$0 \to V_n^\Gamma \to \Omega^0(V_n)^\Gamma \xrightarrow{d} \Omega^1(V_n)^\Gamma \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma , V_n) \to \dots$$

(La notation V^Γ désigne l'ensemble des points fixes du Γ-module V).

Or les fonctions appartenant à $\Omega^0(V_n)^\Gamma$ vérifient (pour $k = 0$) les conditions (2.2.1). On a par suite une injection $S_0(\Gamma , n) \to \Omega^0(V_n)^\Gamma$. De même en mettant les formes différentielles $\omega \in \Omega^1(V_n)^\Gamma$ sous la forme $f(z)\, dz$, les fonctions $f(z)$ vérifient les conditions (2.2.1) pour $k = 2$, et par suite on a une injection $S_2(\Gamma , n) \to \Omega^1(V_n)^\Gamma$.

On déduit de là le diagramme commutatif

(3.1.3) $$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_n^\Gamma \arrow[r] & \Omega^0(V_n)^\Gamma \arrow[r, "d"] & \Omega^1(V_n)^\Gamma \arrow[r, "\delta"] & H^1(\Gamma , V_n) \\ & & S_0(\Gamma , n) \arrow[u] \arrow[r, "d"] & S_2(\Gamma , n) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

en notant Q le quotient $S_2(\Gamma , n)/ d\, S_0(\Gamma , n)$ on a donc

(3.1.4) $$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_n^\Gamma \arrow[r] & \Omega^0(V_n)^\Gamma \arrow[r, "d"] & \Omega^1(V_n)^\Gamma \arrow[r, "\delta"] & H^1(\Gamma , V_n) & \\ & & S_0(\Gamma , n) \arrow[u] \arrow[r, "d"] & S_2(\Gamma , n) \arrow[u] \arrow[r] & Q \arrow[u] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

En étudiant les développements aux pointes, on remarque que si une "Spitzenforme" de poids 2 est la dérivée d'une forme automorphe (non nécessairement régulière aux pointes) elle est alors la dérivée d'une "Spitzenforme". On en déduit que l'application

$$Q \to H^1(\Gamma , V_n)$$

est une injection.

Remarquons enfin que si G/Γ est compact il n'y a pas de pointe parabolique et par suite les flèches verticales du diagramme (3.1.3) sont des isomorphismes.

3.2. <u>L'application</u> $S_0(\Gamma , n) \xrightarrow{d} S_2(\Gamma , n)$. - Remarquons tout d'abord que l'opérateur $d = \frac{\partial}{\partial z}$ est proportionnel à $* Z$; en effet, d'après (1.1.11)

$$* Z = - \frac{k}{y} - 2i\frac{\partial}{\partial z}$$

et ici $k = 0$. Comme le but de ce numéro est d'étudier le conoyau de d , le résultat ne sera pas changé si on remplace d par $* Z$. D'autre part, d'après le lemme (2.3.4), $S_{n+2}(\Gamma)$ s'injecte dans $S_2(\Gamma , n)$. On a alors :

(3.2.1) THÉORÈME. - <u>L'espace</u> $S_2(\Gamma , n)$ <u>est somme directe du sous-espace</u> $S_{n+2}(\Gamma)$ <u>et de l'image par</u> d <u>de</u> $S_0(\Gamma , n)$.

Pour démontrer ce théorème nous interpréterons les espaces $S_k(\Gamma , n)$ comme des espaces de fonctions sur le groupe G , et nous utiliserons l'opérateur $* Z$ à la place de d . Nous démontrerons tout d'abord un lemme.

(3.2.2) LEMME. - <u>L'application</u> $S_0^{j+1}(\Gamma , n)/S_0^{j+2}(\Gamma , n) \xrightarrow{* Z} S_2^j(\Gamma , n)/S_2^{j+1}(\Gamma , n)$ <u>est un isomorphisme pour</u> $j < n$.

Soit $\varphi \in S_0^{j+1}(\Gamma , n)$; alors d'après (2.3.1)

$$\varphi = \rho_n(g) \sum \varphi_p(g) e_p \quad .$$

Avec $\varphi_{n-2j-2} \neq 0$ et $\varphi_{n-2j} = \dots = \varphi_{-n} = 0$. Par suite, d'après (1.2.1)

$$\varphi * Z(g) = \rho_n(g) \sum (\varphi_p * Z(g) - \varphi_{p-2}(g)) e_p \tag{3.2.3}$$

le dernier terme non nul de la sommation étant $-\varphi_{n-2j-2}\, e_{n-2j}$, et par suite l'application

$$S_0^{j+1}(\Gamma\ ,\ n)/S_0^{j+2}(\Gamma\ ,\ n) \xrightarrow{*Z} S_2^{j}(\Gamma\ ,\ n)/S_2^{j+1}(\Gamma\ ,\ n)$$

est injective. Pour démontrer qu'elle est surjective, soit $\psi \in S_2^j(\Gamma\ ,\ n)$

$$\psi(g) = \rho_n(g) \sum_p \psi_p(g)\ e_p \qquad .$$

Avec

$$\psi_{n-2j} \neq 0 \qquad \psi_{n-2+2} = \dots = \psi_n = 0$$

les fonctions ψ_p vérifient les équations (2.3.2) pour $k = 2$. Posons alors

$$\varphi_n = 0 \qquad \varphi_p = +\lambda_p\ \psi_{p+2} \qquad \lambda_p = -\frac{(n-p)(n+p+2)}{4(n-j)(j+1)}$$

les fonctions φ_p vérifient les équations (2.3.2) pour $k = 0$, et par suite définissent une fonction $\varphi \in S_0^{j+1}(\Gamma\ ,\ n)$

$$\varphi(g) = \rho_n(g) \sum \varphi_p(g)\ e_p \qquad .$$

On voit alors (3.2.3) que

$$\varphi * Z - \psi = 0 \mod S_2^{j+1}(\Gamma\ ,\ n)$$

C. Q. F. D.

A l'aide du lemme (3.2.2) et en remarquant que, pour $n > 0$, $S_0^0(\Gamma\ ,\ n)/S_0^1(\Gamma\ ,\ n) = \{0\}$ (car $S_0^0(\Gamma\ ,\ n)/S_0^1(\Gamma\ ,\ n)$ s'injecte d'après (2.3.3) dans $S_{-n}(\Gamma)$ qui est nul, car il n'y a pas de "Spitzenforme" de poids négatif) le théorème (3.2.1) se démontre immédiatement.

Reprenant le diagramme (3.1.4) on voit qu'on a une injection.

(3.2.4) $$S_{n+2}(\Gamma) \to H^1(\Gamma\ ,\ V_n) \qquad .$$

Cette injection a été explicitée par EICHLER [2]. Nous nous contenterons de donner le résultat.

(3.2.5) THÉORÈME (EICHLER). - Soit $f(z)$ une "Spitzenforme" de poids $n+2$ pour Γ et ω_f l'image de f par l'injection.

$$S_{n+2}(\Gamma) \to \Omega^1(V_n)^\Gamma \quad .$$

On a alors

$$\omega_f = \frac{(t-z)^n}{n!} f(z)\, dz$$

(les éléments de V_n sont des polynômes en t de degré au plus n). Considérons la fonction

$$P_f(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{(z-\zeta)^n}{n!} f(\zeta)\, d\zeta \quad .$$

Pour $\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ on a alors

$$(cz+d)^n P_f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = P_f(z) + \alpha_\gamma(z)$$

où $\alpha_\gamma(z)$ est un polynôme de degré $\leq n$ en z ; l'application $\gamma \rightsquigarrow \alpha_\gamma$ de Γ dans V_n est un cocycle de Γ à valeur dans le Γ-module V_n dont la classe de cohomologie définit l'élément $\delta\omega_f \in H^1(\Gamma, V_n)$.

On peut se poser la question de savoir quelle est l'image de l'application

$$S_{n+2}(\Gamma) \to H^1(\Gamma, V_n) \quad .$$

Une réponse partielle est fournie par le théorème ci-après. Si Γ' est un sous-groupe de Γ et V un Γ-module, nous noterons les Γ/Γ' l'application canonique

$$\mathrm{res}_{\Gamma/\Gamma'} : H^1(\Gamma, V) \to H^1(\Gamma', V) \quad .$$

On a alors le théorème suivant :

(3.2.6) THÉORÈME. - Soit Γ un groupe fuchsien de première espèce et $f \in S_{n+2}(\Gamma)$; alors la restriction de la classe $\delta f \in H^1(\Gamma, V_n)$ à tout sous-groupe parabolique de Γ est nulle.

Reprenons le cocycle $\gamma \rightsquigarrow \alpha_\gamma$, du théorème (3.2.5) ; un calcul immédiat montre que

$$\alpha_\gamma(z) = \int_{z_0}^{z_0} \left(\frac{z-\zeta}{n!}\right)^n f(\zeta)\, d\zeta \qquad ;$$

évidemment, lorsqu'on change z_0 la classe de cohomologie correspondante ne change pas. Soit p une pointe parabolique de Γ et Γ_p le sous-groupe parabolique correspondant. Nous pouvons prendre comme cocycle

$$\alpha'_\gamma(z) = \int_p^{\gamma p} \left(\frac{z-\zeta}{n!}\right)^n f(\zeta)\, d\zeta$$

(l'intégrale a un sens car f est une "<u>Spitzenforme</u>"). Prenant $\gamma \in \Gamma_p$ on voit que

$$\alpha'_\gamma(z) = 0 \qquad .$$

C. Q. F. D.

Dans la suite de l'exposé nous noterons $\tilde{H}^1(\Gamma, V_n)$ l'ensemble des classes dont la restriction à tout sous-groupe parabolique de Γ est nulle.

3.3. <u>Dimension de</u> $\tilde{H}^1(\Gamma, V_n)$. - Le but de ce numéro est de donner le schéma de démonstration du théorème suivant :

(3.3.1) THÉORÈME. - <u>Pour tout groupe</u> Γ <u>fuchsien de première espèce, on a</u> $2 \dim S_{n+2}(\Gamma) = \dim \tilde{H}^1(\Gamma, V_n)$.

Nous utiliserons le théorème suivant ([6], exposés 11, 12, 13).

(3.3.2) THÉORÈME. -Soient X un espace topologique et Γ un groupe opérant proprement sur X, $\mathfrak{A}$ un faisceau de groupe abélien de base X sur lequel Γ opère. Nous noterons $\pi : X \to X/\Gamma$ l'application canonique de X sur son espace quotient. Nous noterons $\mathfrak{A}^\Gamma$ le faisceau sur X/Γ défini de la manière suivante : Soit U un ouvert de X/Γ ; $\pi^{-1}(U)$ est alors saturé par Γ, et par suite Γ opère sur le module $\mathfrak{A}(\pi^{-1}(U))$. Nous poserons

$$\mathfrak{A}^\Gamma(U) = \mathfrak{A}(\pi^{-1}(U))^\Gamma \qquad \text{(points fixes)} \qquad .$$

On fait sur le faisceau $\mathcal{A}$ les hypothèses suivantes:

1° Soit x un point de X, $\mathcal{A}(x)$ la fibre de $\mathcal{A}$ en x, $\Gamma(x)$ le stabilisateur de x.

Pour tout point $x \in X$, $H^i(\Gamma(x), \mathcal{A}(x)) = 0$ pour $i > 0$.

2° $H^j(X, \mathcal{A}) = 0$ pour $j \neq q$.

On a alors

$$H^i(X/\Gamma, \mathcal{A}^\Gamma) \approx H^{i-q}(\Gamma, H^q(X, \mathcal{A})) \quad . \tag{3.3.3}$$

Pour démontrer le théorème (3.3.1) nous distinguerons deux cas.

1° X/Γ <u>est compact</u>.

Nous noterons $\underset{\sim}{\Omega}^0(V_n)$ le faisceau sur X des germes de fonctions holomorphes à valeurs dans V_n, $\underset{\sim}{\Omega}^1(V_n)$ le faisceau des germes de formes différentielles. On a sur X la suite exacte de faisceau

$$0 \to \underset{\sim}{V}_n \to \underset{\sim}{\Omega}^0(V_n) \to \underset{\sim}{\Omega}^1(V_n) \to 0 \quad .$$

On en déduit immédiatement la suite exacte sur X/Γ.

$$0 \to \underset{\sim}{V}_n^\Gamma \to \underset{\sim}{\Omega}^0(V_n)^\Gamma \to \underset{\sim}{\Omega}^1(V_n)^\Gamma \to 0 \quad .$$

Nous noterons Σ la surface de Riemann X/Γ.

On a la suite exacte de cohomologie

$$\begin{array}{rl} & 0 \to H^0(\Sigma, \underset{\sim}{V}_n^\Gamma) \to H^0(\Sigma, \underset{\sim}{\Omega}^0(V_n)^\Gamma) \to H^0(\Sigma, \underset{\sim}{\Omega}^1(V_n)^\Gamma) \\ (3.3.4) & \to H^1(\Sigma, \underset{\sim}{V}_n^\Gamma) \to H^1(\Sigma, \underset{\sim}{\Omega}^0(V_n)^\Gamma) \to H^1(\Sigma, \underset{\sim}{\Omega}^1(V_n)^\Gamma) \\ & \to H^2(\Sigma, \underset{\sim}{V}_n^\Gamma) \to \dots \end{array}$$

D'après (3.3.2) $H^0(\Sigma, \underset{\sim}{V}_n^\Gamma) \approx V_n^\Gamma$.

Or Γ étant un sous-groupe fuchsien de G, Γ est algébriquement dense dans G [1] et V_n étant une représentation irréductible de G, $V_n^\Gamma = 0$.

On démontre de plus que $H^2(\Sigma, \underset{\sim}{V}_n^\Gamma) = H^2(\Gamma, V_n) = 0$. Car $H^2(\Sigma, \underset{\sim}{V}_n^\Gamma)$ est isomorphe à $H_0(\Sigma, \underset{\sim}{V}_n^\Gamma) \approx H_0(\Gamma, V_n)$ et on voit aisément que ce groupe est nul.

D'autre part puisqu'il n'y a pas d'éléments paraboliques dans Γ

$$H^{o}(\Sigma\ ,\ \underset{\sim}{\Omega}^{o}(V_n)^{\Gamma}) \approx \Omega^{o}(V_n)^{\Gamma} \approx \mathcal{S}_{o}(\Gamma\ ,\ n)$$

$$H^{o}(\Sigma\ ,\ \Omega^{1}(V_n)^{\Gamma}) \approx \Omega^{1}(V_n)^{\Gamma} \approx \mathcal{S}_{2}(\Gamma\ ,\ n) \quad .$$

De plus en examinant les développements en chaque point de Σ on remarque que $\underset{\sim}{\Omega}^{o}(V_n)^{\Gamma} \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\underset{\sim}{\Omega}^{1}(V_n)^{\Gamma}\ ,\ \Omega^{1})$ $\mathcal{O}$ désignant le faisceau des anneaux locaux de Σ et Ω^{1} le faisceau des différentielles (à valeurs scalaires). Par suite, en vertu du théorème de dualité de SERRE

$$H^{1}(\Sigma\ ,\ \underset{\sim}{\Omega}^{o}(V_n)^{\Gamma}) \quad \text{est en dualité avec} \quad H^{o}(\Sigma\ ,\ \underset{\sim}{\Omega}^{1}(V_n)^{\Gamma})$$

$$H^{1}(\Sigma\ ,\ \underset{\sim}{\Omega}^{o}(V_n)^{\Gamma}) \quad \text{est en dualité avec} \quad H^{o}(\Sigma\ ,\ \underset{\sim}{\Omega}^{o}(V_n)^{\Gamma})$$

en calculant alors la caractéristique d'Euler-Poincaré de la suite (3.3.4) on obtient le résultat.

2° X/Γ <u>est de volume fini non compact</u>.

X/Γ est alors une surface de Riemann ouverte. Nous noterons Σ la surface de Riemann complétée

$$\Sigma = X/\Gamma \cup \Sigma_{\infty}$$

les points de Σ_{∞} sont les points parabcliques de Σ. Nous définirons sur Σ cinq faisceaux dont nous allons décrire les sections. Nous allons tout d'abord décrire $\mathcal{S}_{n}^{o}$(resp $\mathcal{K}_{n}^{o}$ resp $\widetilde{\mathcal{S}}_{n}^{o}$).

- Sur un ouvert U ne contenant pas de points paraboliques

$$\mathcal{K}_{n}^{o}(U) \approx \widetilde{\mathcal{S}}_{n}^{o}(U) \approx \mathcal{S}_{n}^{o}(U) \approx \underset{\sim}{\Omega}^{o}(V_n)^{\Gamma}(U) \quad .$$

- Soit U un ouvert suffisament petit entourant un point parabolique P de Σ. Soit p une pointe parabolique de X se projetant sur P. Nous pouvons supposer U suffisament petit pour que l'image inverse de U soit composé d'un voisinage W de p et des transformés disjoints de W par Γ. Nous noterons Γ_p le stabilisateur de p.

$$\mathcal{S}_n(U) \text{ (resp } \mathcal{S}_n^o(U) \text{ resp } \tilde{\mathcal{S}}_n^o(U))$$

sera alors l'ensemble des fonctions holomorphes sur W à valeurs dans V_n invariantes par Γ_p et dont les séries de Fourier (2.2.3) ont leurs termes constants nuls (resp. quelconques, resp. stables par Γ_p) et leurs termes de rang négatif nuls. On définirait de même $\mathcal{S}_n^1$ et $\mathcal{K}_n^1$ en remplaçant les mots "fonctions holomorphes" par "formes différentielles holomorphes". Sur Σ on a la suite exacte de faisceaux

$$(3.3.5) \qquad 0 \to \mathcal{V}_n \to \mathcal{S}_n^o \xrightarrow{d} \mathcal{S}_n^1 \to 0$$

$\mathcal{V}_n$ étant le faisceau noyau de l'application différentielle.

Nous noterons $\hat{X}$ le demi plan complété par les pointes paraboliques. $\mathcal{V}_n$ est l'image d'un faisceau $\overline{\mathcal{V}}_n$ obtenu comme suit:

$$0 \to \overline{\mathcal{V}}_n \to \underset{\sim}{V}_n \to \underset{\sim}{V}_{n\infty} \to 0$$

$\underset{\sim}{V}_{n\infty}$ étant le faisceau constant $\underset{\sim}{V}_n$ restreint aux pointes paraboliques. On a par suite

$$(3.3.6) \qquad 0 \to V_n \to \prod_{\substack{\text{pointes}\\ \text{paraboliques}}} V_n \to H^1(\hat{X}, \overline{\mathcal{V}}_n) \to 0 \qquad .$$

Cette suite est une suite exacte de Γ- module. On voit aisément que le module

$$\prod_{\text{Pointes}} V_n = \prod_{\substack{\text{classes de pointes}\\ \text{paraboliques}}} \Big(\prod_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_p} V_n \Big)$$

et que le module $\prod_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_p} V_n$ est le Γ_p-module V_n induit à Γ. On a par suite

$$H^1(\Gamma, \prod_{\text{pointes}} V_n) = \prod_{\substack{\text{classes de}\\ \text{pointes}}} H^1(\Gamma_p, V_n) \qquad ;$$

de la suite (3.3.6), il vient ($V_n^\Gamma = 0$ d'après ce qui a été dit plus haut)

$$(3.3.7)\quad \begin{aligned} 0 &\to \prod_{P\in\Sigma_\infty} H^0(\Gamma_p , V_n) \to H^0(\Gamma , H^1(\hat{X} , \overline{\mathcal{V}}_n)) \to H^1(\Gamma , V_n) \\ &\xrightarrow{R} \prod_{P\in\Sigma_\infty} H^1(\Gamma_p , V_n) \to \cdots \end{aligned}$$

Or il est facile de voir que l'application R n'est autre que l'application de restriction (3.2.6) ; par suite on a la suite exacte.

$$0 \to \prod_{P\in\Sigma_\infty} H^0(\Gamma_p , V_n) \to H^0(\Gamma , H^1(\hat{X} , \overline{\mathcal{V}}_n)) \to \tilde{H}^1(\Gamma , V_n) \to 0 \quad .$$

Appliquant alors le théorème (3.3.2) (ce qui est licite ici bien que les hypothèses ne soient pas toutes vérifiées) il vient, puisque $H^i(\hat{X} , \overline{\mathcal{V}}_n) = 0$ pour $i \neq 1$

$$H^1(\Sigma , \mathcal{V}_n) \approx H^0(\Gamma , H^1(\hat{X} , \overline{\mathcal{V}}_n))$$

et par suite

$$(3.3.8)\qquad 0 \to \prod_{P\in\Sigma_\infty} H^0(\Gamma_p , V_n) \to H^1(\Sigma , \mathcal{V}_n) \to \tilde{H}^1(\Gamma , V_n) \to 0 \quad .$$

Revenons à la suite de faisceaux (3.3.5). En passant à la cohomologie, il vient

$$(3.3.9)\quad \begin{aligned} 0 &\to \mathcal{S}_0(\Gamma , n) \to \mathcal{S}_2(\Gamma , n) \to H^1(\Sigma , \mathcal{V}_n) \to H^1(\Sigma , \mathcal{S}_n^0) \\ &\to H^1(\Sigma, \mathcal{S}_n^1) \to H^2(\Sigma , \mathcal{V}_n) \quad . \end{aligned}$$

On démontre tout d'abord que $H^2(\Sigma , \mathcal{V}_n) = 0$ (On peut le tirer de la suite (3.3.7)).

On remarque ensuite en étudiant les développements en chaque point que les faisceaux $\mathcal{S}_n^0$ et $\mathcal{H}_n^1$, $\mathcal{H}_n^0$ et $\mathcal{S}_n^1$ sont en dualité au sens de SERRE. On a par suite :

$$\dim \mathcal{S}_{n+2}(\Gamma) - \dim H^1(\Sigma , \mathcal{V}_n) + \dim H_2(\Gamma , n) - \dim H_0(\Gamma , n) = 0$$

en notant $H_2(\Gamma , n)$, $H_0(\Gamma , n)$ les fonctions holomorphes à valeurs dans V_n invariantes par Γ dont les séries de Fourier peuvent avoir des termes constants (mais pas de termes de rang négatif). Or il y a pour ces fonctions un théorème analogue au théorème (3.2.1) ce qui donne

$$\dim H_2(\Gamma\ ,\ n) - \dim H_o(\Gamma\ ,\ n) = \dim H_{n+2}(\Gamma) \qquad ;$$

d'autre part, de la suite (3.3.8), il vient, en appelant h le nombre de points paraboliques de Σ et en remarquant que $\dim H^o(\Gamma_p\ ,\ V_n) = 1$,

$$\dim H^1(\Sigma\ ,\ \mathcal{V}_n) = \dim \tilde{H}^1(\Gamma\ ,\ V_n) + h$$

et par suite

$$\dim S_{n+2}(\Gamma) + \dim H_{n+2}(\Gamma) - h = \dim \tilde{H}^1(\Gamma\ ,\ V_n) \qquad .$$

Or il est bien connu en théorie classique des fonctions automorphes par la théorie des séries d'Einsenstein que

$$\dim H_{n+2}(\Gamma) = \dim S_{n+2}(\Gamma) + h$$

C. Q. F. D.

Notons $\mathcal{E}_n$ le faisceau sur Σ : $\underset{\sim}{V}_n^{\Gamma}$, $\underset{\sim}{V}_n$ étant le faisceau simple de fibre V_n sur $\hat{X}$. On a alors la suite exacte

$$(3.3.10) \qquad 0 \to \mathcal{E}_n \to \tilde{\mathcal{S}}_o \to \mathcal{S}_1^n \to 0 \qquad .$$

Or si nous notons $V_n^{\Sigma_\infty}$ le faisceau sur Σ ayant pour support Σ_∞ et pour fibre en chaque point $P \in \Sigma_\infty$ $V_n^{\Gamma_p}$, nous avons la suite exacte

$$(3.3.11) \qquad 0 \to \mathcal{V}_n \to \mathcal{E}_n \to V_n^{\Sigma_\infty} \to 0 \qquad ;$$

de là et de la suite exacte (3.3.8) il vient

$$(3.3.12) \qquad \begin{aligned} &H^1(\Sigma\ ,\ \mathcal{E}_n) \approx \tilde{H}^1(\Gamma\ ,\ V_n) \\ &H^2(\Sigma\ ,\ \mathcal{E}_n) = H^o(\Sigma\ ,\ \mathcal{E}_n) = 0 \qquad . \end{aligned}$$

La suite (3.3.10) nous donne la suite exacte de cohomologie

$$(3.3.13) \qquad 0 \to S_o(\Gamma\ ,\ n) \to S_2(\Gamma\ ,\ n) \xrightarrow{\ \delta\ } H^1(\Sigma\ ,\ \mathcal{E}_n)$$

et on peut vérifier que modulo l'isomorphisme (3.3.12) l'homomorphisme δ n'est autre que l'homomorphisme δ défini par EICHLER ((3.2.4) et (3.2.5)). La suite exacte (3.3.10) nous servira par la suite. Elle est d'ailleurs définie même si X/Γ est compact.

4. L'isomorphisme de Shimura.

4.1. Produit scalaire de Peterson. - Rappellons comment on définit le produit scalaire de Peterson pour deux fonctions f, $g \in S_{n+2}(\Gamma)$

$$(f\ ,\ g) = \int_{\mathfrak{F}} f(z)\ g(\overline{z})\ y^{n+2}\ dv$$

où $\mathfrak{F}$ est un domaine fondamental de X pour Γ et dv la mesure invariante par G

$$dv = \frac{i}{2y^2}\, dz \wedge d\overline{z} = \frac{1}{y^2}\, dx \wedge dy \qquad .$$

Muni de ce produit scalaire, $S_{n+2}(\Gamma)$ est un espace de Hilbert.

Nous noterons ω_f et ω_g les formes différentielles associées à f et g par l'injection

$$S_{n+2}(\Gamma) \to \Omega^1(V_n) \qquad .$$

Nous noterons d'autre part,

$$(x\ ,\ y) \rightsquigarrow \langle x\ ,\ y\rangle \qquad x \in V_n \quad y \in V_n$$

le produit scalaire dans V_n invariant par la représentation ρ_n (1.2.4) et J l'involution qui fait passer d'un polynôme au polynôme conjugué (passage à l'imaginaire conjuguée sur les coefficients).

(4.1.1) LEMME. - La forme différentielle $\langle \omega_f\ ,\ J\omega_g\rangle$ est proportionnelle à la forme différentielle $f(z)\ g(\overline{z})\ y^{n+2}\ dv$. En effet d'après (3.2.5)

$$(4.1.2) \qquad \begin{cases} \omega_f = f(z)\, \dfrac{(t-z)^n}{n!}\, dz \\[2ex] \omega_g = g(z)\, \dfrac{(t-z)^n}{n!}\, dz \qquad . \end{cases}$$

Par suite

$$\langle \omega_f , J\omega_g \rangle = \frac{1}{n!^2} f(z)\, g(\bar{z}) < (t - z)^n , \quad (t - \bar{z})^n > dz \wedge d\hat{z} \quad .$$

Mais, d'après le lemme (1.2.4), la forme bilinéaire invariante sur V_n s'obtient en prenant la puissance symétrique de la forme bilinéaire invariante sur V_1 et par suite

$$\langle (t - z)^n , \quad (t - \bar{z})^n \rangle = \det(t - z , t - \bar{z})^n$$

en notant $\det(u , v)$ une forme bilinéaire alternée sur V_1 . On a donc :

$$\langle (t - z)^n , \quad (t - \bar{z})^n \rangle = (2iy)^n$$

C. Q. F. D.

(4.1.3) LEMME. - La forme différentielle $\langle \mathrm{Re}\, \omega_f , \mathrm{Re}\, \omega_g \rangle$ est proportionnelle à la forme différentielle $\mathrm{Im}(f(z)\, g(\bar{z})\, y^{n+2}\, dv)$ lorsque n est pair.

En effet nous avons :

$$\begin{aligned} 4 \langle \mathrm{Re}\, \omega_f , \mathrm{Re}\, \omega_g \rangle &= \langle \omega_f + J\omega_f , \omega_g + J\omega_g \rangle \\ &= \langle \omega_f , \omega_g \rangle + \langle J\omega_f , J\omega_g \rangle + \langle \omega_f , J\omega_g \rangle + \langle J\omega_f , \omega_g \rangle \quad ; \end{aligned}$$

ω_f et ω_g étant de la forme donnée en (4.1.2), on voit que

$$\langle \omega_f , \omega_g \rangle = 0$$

$$\langle J\omega_f , J\omega_g \rangle = 0$$

de plus n étant pair, le produit scalaire dans V_n est symétrique, et par suite

$$4 \langle \mathrm{Re}\, \omega_f , \mathrm{Re}\, \omega_g \rangle = \langle \omega_f , J\omega_g \rangle - \langle \omega_g , J\omega_f \rangle$$

le lemme (4. 1.1) nous permet alors de conclure.

Nous noterons $\Lambda(f , g)$ la partie imaginaire du produit scalaire de Peterson nous avons alors pour n pair

$$\Lambda(f\ ,\ g) = C_n \int_{\mathfrak{F}} \langle \mathrm{Re}\ \omega_f\ ,\ \mathrm{Re}\ \omega_g \rangle$$

C_n étant une constante qui ne dépend que du choix de la forme bilinéaire invariante sur V_n.

4.2. Le cup-produit. - Dans tout ce numéro, n est pair. Reprenons le faisceau $\mathfrak{L}_n$ introduit en (3.3.10) ; à l'aide de l'involution J sur V_n, on peut définir $\mathfrak{L}_n^{\mathbb{R}}$ le faisceau des parties réelles. De plus, à l'aide de la forme bilinéaire invariante (que l'on peut prendre réelle sur les parties réelles), on peut définir un accouplement

$$\mathfrak{L}_n^{\mathbb{R}} \otimes \mathfrak{L}_n^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \qquad \text{faisceau simple}$$

et par suite on peut définir un cup-produit

$$H^1(\Sigma\ ,\ \mathfrak{L}_n^{\mathbb{R}}) \otimes H^1(\Sigma\ ,\ \mathfrak{L}_n^{\mathbb{R}}) \to H^2(\Sigma\ ,\ \mathbb{R}) \qquad ; \tag{4.2.1}$$

or Σ étant une surface de Riemann compacte, $H^2(\Sigma\ ,\ \mathbb{R})$ est de dimension 1 et le cup-produit définit donc une forme bilinéaire sur $H^1(\Sigma\ ,\ \mathfrak{L}_n^{\mathbb{R}})$ lorsqu'on a choisi une base de $H^2(\Sigma\ ,\ \mathbb{R})$.

Nous allons définir trois faisceaux $\mathcal{C}^0(\mathfrak{L}_n^{\mathbb{R}})$, $\mathcal{C}^1(\mathfrak{L}_n^{\mathbb{R}})$, $\mathcal{C}^2(\mathfrak{L}_n^{\mathbb{R}})$. En première approximation, ce sont les germes de fonctions indéfiniment différentielles (resp. les formes différentielles) "à valeurs" dans $\mathfrak{L}_n^{\mathbb{R}}$. De façon plus précise nous allons définir les sections de $\mathcal{C}^1(\mathfrak{L}_n^{\mathbb{R}})$ sur un petit voisinage U d'un point parabolique P. On lui fait alors correspondre comme d'habitude une demi-plan voisinage du point à l'infini. On considère alors les formes différentielles de degré 1 φ indéfiniment différentiables invariantes par translations à valeurs dans $V_n^{\mathbb{R}}$; elles s'écrivent (cf. (2.2.3))

$$\varphi(z) = \rho_n\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi(z)$$

où Φ est une forme différentielle périodique, $\{u_k\}$ étant une base de $V_n^{\mathbb{R}}$

$$\Phi = \Sigma\ u_k\ \psi_k$$

où ψ_k est une forme différentielle à valeurs scalaire périodique. Elle définit par suite une forme différentielle indéfiniment différentiable dans U privé du point P. Ceci dit, les sections de $\mathcal{C}^1(\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}})$ sur U seront les formes différentielles Φ telles que les formes ψ_k se prolongent en des formes différentielles indéfiniment différentiables définies dans U. On procède de même pour $\mathcal{C}^0(\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}})$ et $\mathcal{C}^2(\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}})$. On a alors une suite exacte

$$(4.2.2) \qquad 0 \to \mathcal{L}_n^{\mathbb{R}} \to \mathcal{C}^0(\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}) \to \mathcal{C}^1(\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}) \to \mathcal{C}^2(\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}) \to 0 \quad .$$

Les faisceaux $\mathcal{C}^p(\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}})$ étant mous, on a ainsi une résolution de $\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}$ et par suite une application

$$H^i(C^*(\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}})) \to H^i(\Sigma , \mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}) \quad ;$$

en particulier, si nous notons $Z^1(\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}})$ les sections de $\mathcal{C}^1(\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}})$ dont la différentielle s'annule on a une application

$$(4.2.3) \qquad Z^1(\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\delta'} H^1(\Sigma , \mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}) \to 0 \quad .$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat essentiel de cet exposé.

(4.2.4) THÉORÈME (SHIMURA [9]). - <u>Soient</u> f et $g \in \mathcal{S}_{n+2}(\Gamma)$, $\delta\omega_f$, $\delta\omega_g$ <u>les classes de cohomologie qui leur correspondent dans</u> $H^1(\Sigma , \mathcal{L}_n)$ et $\mathrm{Re}\,\delta\omega_f$, $\mathrm{Re}\,\delta\omega_g$ <u>les classes de cohomologie qui leur correspondent dans</u> $H^1(\Sigma , \mathcal{L}_n^{\mathbb{R}})$ <u>par l'application</u>

$$H^1(\Sigma , \mathcal{L}_n) \xrightarrow{\mathrm{Re}} H^1(\Sigma , \mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}) \quad .$$

<u>Une base étant choisie dans</u> $H^2(\Sigma , \mathbb{R})$ <u>la forme bilinéaire</u> $\mathrm{Re}\,\delta\omega_f \smile \mathrm{Re}\,\delta\omega_g$ <u>est proportionnelle à la forme bilinéaire</u> $\Lambda(f , g)$.

Remarquons d'abord que le diagramme

$$(4.2.5) \qquad \begin{array}{ccccc} S_{n+2}(\Gamma) & \to & \mathcal{S}_2(\Gamma , n) & \xrightarrow{\delta} & H^1(\Sigma , \mathcal{L}_n) \\ & & {\scriptstyle \mathrm{Re}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Re}} \\ & & Z^1(\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\delta'} & H^1(\Sigma , \mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}) \end{array}$$

est commutatif. Soient f , $g \in S_{n+2}(\Gamma)$; il leur correspond $\mathrm{Re}\ \omega_f$, $\mathrm{Re}\ \omega_g \in Z^1(\mathcal{E}_n^{\underset{\sim}{R}})$, et le lemme (4.1.4) nous montre que

$$\Lambda(f\ ,\ g) = C_n \int_\Sigma \langle \mathrm{Re}\ \omega_f\ ,\ \mathrm{Re}\ \omega_g \rangle \quad .$$

Or on sait d'après le théorème de de RHAM ([3], théorème (6.6.1), p. 257) que le cup-produit de deux classes de cohomologie est donné par le produit extérieur des formes différentielles qui représentent ces classes. Par suite

$$\langle \mathrm{Re}\ \omega_f\ ,\ \mathrm{Re}\ \omega_g \rangle \leadsto \mathrm{Re}\ \delta\omega_f \smile \mathrm{Re}\ \delta\omega_g$$

dans l'application

$$\Omega^2(\underset{\sim}{R}) \to H^2(\Sigma\ ,\ \underset{\sim}{R}) \quad ,$$

$\Omega^2(R)$ étant l'espace des formes différentielles de degré 2 .

De plus, toujours d'après de RHAM, il y a un isomorphisme canonique de $H^2(\Sigma\ ,\ \underset{\sim}{R}) \to \underset{\sim}{R}$ qui consiste à associer à une forme différentielle α de degré 2 le nombre $\int_\Sigma \alpha$, ce qui démontre le théorème.

(4.2.6) THÉORÈME (SHIMURA). - <u>L'application</u>

$$I_n\ :\ S_{n+2}(\Gamma) \to \tilde{H}^1(\Gamma\ ,\ V_n^{\underset{\sim}{R}})$$

<u>qui associe à</u> $f \leadsto \mathrm{Re}\ \delta\omega_f$ <u>est un isomorphisme</u>.

Remarquons que d'après (3.3.1) les dimensions des deux espaces sont égales. Démontrons que I_n est injectif. Soit $f \in S_{n+2}(\Gamma)$ telle que $I(f) = 0$. D'après (4.2.4), pour tout $g \in S_{n+2}(\Gamma)$

$$\Lambda(f\ ,\ g) = \mathrm{Re}\ \delta\omega_f \smile \mathrm{Re}\ \delta\omega_g = 0$$

et par suite, Λ étant une forme non dégénérée, $f = 0$.

C. Q. F. D.

5. Les variétés abéliennes (dans tout ce paragraphe n est un entier pair).

5.1. Les groupes arithmétiques.

(5.1.1) DÉFINITION. - Un groupe fuchsien de première espèce Γ est un groupe arithmétique de niveau n s'il existe un réseau invariant par Γ dans la représentation V_n, réseau sur lequel la forme bilinéaire invariante est entière.

EXEMPLE. - $SL(2, \mathbb{Z})$ et tous les groupes de congruence sont des groupes arithmétiques pour tous les niveaux.

Le groupe des unités d'un ordre d'un corps de quaternions sur $\mathbb{Q}$ indéfini sur $\mathbb{R}$ est un groupe arithmétique pour tous les niveaux pairs.

Soit Γ un groupe arithmétique de niveau n et α le réseau que Γ laisse invariant dans V_n. On peut alors définir $\tilde{H}^1(\Gamma, \alpha)$ et on voit aisément que $\tilde{H}^1(\Gamma, \alpha)$ s'injecte dans $\tilde{H}^1(\Gamma, V_n)$ et que $\tilde{H}^1(\Gamma, \alpha)$ est un réseau de $\tilde{H}^1(\Gamma, V_n)$. Soit $D(\Gamma)$ l'image réciproque par I_n (4.2.5) de $\tilde{H}^1(\Gamma, \alpha)$ dans $S_{n+2}(\Gamma)$.

(5.1.2) THÉORÈME (SHIMURA). - Lorsque Γ est un groupe arithmétique de niveau n le tore complexe $S_{n+2}(\Gamma)/D(\Gamma)$ est une variété abélienne.

Pour démontrer ce théorème, nous allons démontrer qu'il existe une constante λ telle que la forme $\lambda(f, g)$ donne une forme de Riemann sur $S_{n+2}(\Gamma)/D(\Gamma)$. On entend ici par forme de Riemann une forme hermitienne positive sur $S_{n+2}(\Gamma)$ dont la partie imaginaire est à valeurs entières sur $D(\Gamma) \times D(\Gamma)$ [10].

Or, d'après (4.2.4), $\lambda(f, g)$ est proportionnelle au cup-produit $I_n(f) \smile I_n(g)$. De plus, la forme bilinéaire invariante prenant des valeurs entières sur α, le cup-produit envoie

$$\tilde{H}^1(\Gamma, \alpha) \otimes \tilde{H}^1(\Gamma, \alpha) \to H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$$

$H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$ étant un réseau de $H^2(\Sigma, \mathbb{R})$. Par suite, il existe une constante λ telle que $\lambda\, \Lambda(f, g)$ prenne des valeurs entières sur le réseau $D(\Gamma)$.

C. Q. F. D.

On voit que pour $n = 0$ la variété abélienne $S_2(\Gamma)/D(\Gamma)$ n'est autre que la variété jacobienne de la surface Σ.

5.2. Les opérateurs T_σ. - Γ' étant un sous-groupe de Γ d'indice fini et M étant un Γ-module nous noterons

$$\mathrm{res}_{\Gamma/\Gamma'} : H^i(\Gamma, M) \to H^i(\Gamma', M)$$

$$\mathrm{cores}_{\Gamma'/\Gamma} : H^i(\Gamma', M) \to H^i(\Gamma, M) \quad .$$

Soit $\sigma \in GL(2, \mathbb{R})$ tel que $\sigma\Gamma\sigma^{-1}$ soit commensurable à Γ (i. e. $\sigma\Gamma\sigma^{-1} \cap \Gamma$ d'indice fini dans Γ et dans $\sigma\Gamma\sigma^{-1}$) : Nous prolongerons les représentations ρ_n à $GL(2, \mathbb{R})$ en les prolongeant trivialement sur le centre de $GL(2, \mathbb{R})$.

Reprenant les notations (3.1.1) et (3.1.2), le diagramme suivant est commutatif. Posons $\Gamma' = \sigma\Gamma\sigma^{-1} \cap \Gamma$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \Omega^0(V_n)^{\Gamma} & \to & \Omega^1(V_n)^{\Gamma} & \to & H^1(\Gamma, V_n) \\
& \downarrow \mathrm{res}_{\Gamma/\Gamma'} & & \downarrow \mathrm{res}_{\Gamma/\Gamma'} & & \downarrow \mathrm{res}_{\Gamma/\Gamma'} \\
0 \to & \Omega^0(V_n)^{\Gamma'} & \to & \Omega^1(V_n)^{\Gamma'} & \to & H^1(\Gamma', V_n) \\
& \downarrow \mathrm{cores} & & \downarrow \mathrm{cores} & & \downarrow \mathrm{cores} \\
0 \to & \Omega^0(V_n)^{\sigma\Gamma\sigma^{-1}} & \to & \Omega^1(V_n)^{\sigma\Gamma\sigma^{-1}} & \to & H^1(\sigma\Gamma\sigma^{-1}, V_n) \\
& \downarrow \mathrm{Aut}\ \sigma & & \downarrow \mathrm{Aut}\ \sigma & & \downarrow \mathrm{Aut}\ \sigma \\
0 \to & \Omega^0(V_n)^{\Gamma} & \to & \Omega^1(V_n)^{\Gamma} & \to & H^1(\Gamma, V_n)
\end{array} \tag{5.2.1}$$

l'homomorphisme Aut σ étant l'homomorphisme évident.

On vérifie aisément que ces homomorphismes conservent les "Spitzenformen", et par suite en notant $T_\sigma = \mathrm{Aut}\ \sigma \circ \mathrm{cores}_{\Gamma'/\sigma\Gamma\sigma^{-1}} \circ \mathrm{res}_{\Gamma/\Gamma'}$

$$\begin{array}{ccccc}
S_0(\Gamma, n) & \to & S_2(\Gamma, n) & \to & \tilde{H}^1(\Gamma, V_n) \\
\downarrow T_\sigma & & \downarrow T_\sigma & & \downarrow T_\sigma \\
S_0(\Gamma, n) & \to & S_2(\Gamma, n) & \to & \tilde{H}^1(\Gamma, V_n)
\end{array} \quad . \tag{5.2.2}$$

On en déduit le diagramme

$$(5.2.3)\qquad \begin{array}{ccc} S_{n+2}(\Gamma) & \longrightarrow & \tilde{H}^1(\Gamma\ ,\ V_n^R) \\ {\scriptstyle T_\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T_\sigma} \\ S_{n+2}(\Gamma) & \longrightarrow & \tilde{H}^1(\Gamma\ ,\ V_n^R) \end{array}$$

l'opérateur T_σ ainsi défini sur $S_{n+2}(\Gamma)$ n'est autre que l'opérateur de Hecke consistant à prendre une fonction f , à la rendre invariante par $\sigma\Gamma\sigma^{-1}$ et à la retransformer en une fonction invariante par Γ à l'aide de l'automorphisme σ .

(5.2.4) THÉORÈME. - Γ étant un groupe arithmétique de niveau n , soit α le réseau dans V_n conservé par Γ . Si $\rho_n(\sigma^{-1})$ conserve le réseau α , T_σ donne alors un endomorphisme de la variété abélienne $S_{n+2}(\Gamma)/D(\Gamma)$.

En effet, il est immédiat de voir alors que $\tilde{H}^1(\Gamma\ ,\ \alpha)$ est envoyé par T_σ dans $\tilde{H}^1(\Gamma\ ,\ \alpha)$. La vue du diagramme (5.2.3) achève la démonstration.

(5.2.5) COROLLAIRE. - Les valeurs propres de T_σ sont dans les hypothèses du théorème (5.2.4) des entiers algébriques de degré $2h(n)$ en notant $h(n)$ la dimension de $S_{n+2}(\Gamma)$ sur $\mathbb{C}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Armand). - Density properties for certain subgroups of semi-simple groups without compact components, Annals of Math., Series 2, t. 72, 1960, p. 179-188.

[2] EICHLER (M.). - Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale, Math. Z., t. 67, 1957, p. 267-298.

[3] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

[4] HECKE (E.). - Grundlagen einer Theorie der Integralgruppen und der Integralperioden bei den Normalteilern der Modulgruppe, Math. Annalen, t. 116, 1938, p. 469-510.

[5] KUGA (M.) and SHIMURA (G.). - On vector differential forms attached to automorphic forms, J. Math. Soc. Japan, t. 12, 1960, p. 258-270.

[6] Séminaire CARTAN, t. 3, 1950/51 : Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux, 2e éd. - Paris, Secrétariat mathématique, 1955 (multigraphié).

[7] Sémihaire CARTAN, t. 6, 1953/54 : Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes ; exposés n° 3, 4, 5. - Paris, Ecole Normale Supérieure (multigraphié).

[8] Séminaire GODEMENT, t. 1, 1960/61 : Fonctions automorphes, d'après les travaux de Shimura et de Eichler (à paraître).

[9] SHIMURA (Goro). - Sur les intégrales attachées aux formes automorphes, J. Math. Soc. Japan, t. 11, 1959, p. 291-311.

[10] WEIL (André). - Variétés kählériennes. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1267 ; Publ. Inst. math. Univ. Nancago, 6).