SÉMINAIRE N. BOURBAKI

BERNARD MALGRANGE

Équations différentielles sans solutions

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. nº 213, p. 119-125
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__119_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 213

Février 1961

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SANS SOLUTIONS

par Bernard MALGRANGE

[d'après Lars HÖRMANDER]

I. Notations.

$x = (x_1 , \dots , x_n)$ [resp. $= (\xi_1 , \dots , \xi_n)$] désigne le point courant de $\mathbb{R}^n$; $\alpha = (\alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ désigne un système d'entiers compris entre 1 et n ; on note ξ_α le polynôme $\xi_{\alpha_1} \dots \xi_{\alpha_n}$, et $|\alpha| (= n)$ son degré.

Au polynôme ξ_α , on associe l'opérateur différentiel D_α obtenu en remplaçant ξ_j par $- i \frac{\partial}{\partial x_j}$. Plus généralement, à une fonction de x à valeurs dans les polynômes de degré $\leqslant n$ en ξ :

$$P(x , \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} a_\alpha(x) \xi_\alpha \quad ,$$

on associe l'opérateur différentiel

$$P(x , D) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} a_\alpha(x) D_\alpha \quad .$$

On pose encore :

$$\overline{P}(x , \xi) = \Sigma \overline{a_\alpha}(x) \xi_\alpha$$

$$P^\alpha(x , \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha_n}} P(x , \xi)$$

$$P_\alpha(x , \xi) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_n}} P(x , \xi) \quad .$$

Dans toute la suite, nous supposerons les a_α définis et indéfiniment dérivables dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

II. Résultats positifs.

Désignons par $p(x , \xi)$ la "partie principale" $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi_\alpha$ de $P(x , \xi)$. Dans sa thèse [1] (voir aussi [6]), HÖRMANDER avait établi le résultat suivant :

THÉORÈME 1. - Supposons que p vérifie les conditions suivantes :

1° $\forall\ x \in \Omega$, les polynômes $p^j(x, \xi)$ ($|j| = 1$) n'ont pas de zéro réel commun $\neq 0$.

2° $p = \bar{p}$.

Alors tout $x \in \Omega$ possède un voisinage ouvert Ω_x tel que, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x)$, on ait :

$$\| {}^tP(x, D)\ \varphi \| \geqslant C \sum_{|k| \leqslant m-1} \| D^k \varphi \|$$

(où C désigne un nombre > 0, $\| \ \|$ la norme dans L^2, et ${}^tP$ le transposé de Lagrange de P).

De là résulte (HAHN-BANACH) que, $\forall\ f \in L^2(\Omega)$, $\forall\ x \in \Omega$, il existe $g \in L^2(\Omega)$ tel que, dans Ω_x, on ait $P(x, D)\ g = f$; il suffit même de supposer que f est somme de dérivées d'ordre $\leqslant m - 1$ de fonctions $\in L^2(\Omega)$; un procédé de régularisation donné dans [2] permet d'établir ceci (en restreignant au besoin Ω_x d'une manière qui dépendra de k) : si f est choisi dans $L^2(\Omega)$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre k ($k \in \mathbb{N}$), on peut choisir g dans $L^2(\Omega)$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $k + m - 1$.

Par la même méthode, HÖRMANDER [2] montre que les résultats précédents subsistent lorsque la condition 2° est remplacée par la condition plus générale 2° bis ci-dessous.

Avant d'énoncer cette condition, donnons encore une notation : soit $C(x, D)$ la partie principale (d'ordre $2m - 1$) de l'opérateur différentiel $[p(x, D), \bar{p}(x, D)]$; la condition 2° bis est alors la suivante :

2° bis. Il existe un polynôme en ξ de degré $m - 1$, $q(x, \xi)$ à coefficients indéfiniment dérivables tel qu'on ait :

$$C(x, \xi) = \bar{q}(x, \xi)\ p(x, \xi) + q(x, \xi)\ \bar{p}(x, \xi) \quad .$$

III. Opérateurs différentiels sans solutions.

Dans [2] et [3] (les résultats de [2], partiels, sont complétés dans [3], et repris dans [4] avec une rédaction plus simple : je suivrai de près [4] dans cet exposé), HÖRMANDER établit une réciproque partielle des résultats précédents :

THÉORÈME 2. - Supposons que, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant $P(x, D)\ f = \varphi$. Alors la condition suivante est vérifiée :

(C) $\forall\ x \in \Omega$, les conditions " $\xi \in \mathbb{R}^n$, $p(x, \xi) = 0$ " entraînent $C(x, \xi) = 0$.

Supposons que la condition précédente ne soit pas vérifiée en un point x_0 ; alors, dans tout voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de x_0, il y aura des $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ qui ne seront pas de la forme $P(x, D) f$, $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

COROLLAIRE. - Supposons que, pour un ensemble de points dense dans Ω, la condition (C) ne soit pas vérifiée : alors il existe $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ tel que, dans tout ouvert $\mathcal{O} \subset \Omega$, on ait $f_{\mathcal{O}} \notin P(x, D)\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ ($f_{\mathcal{O}}$ = restriction de f à $\mathcal{O}$).

Soient en effet $\mathcal{O}$ un ouvert $\subset \Omega$, et m un entier $\geqslant 0$; considérons l'espace $V_{m,\mathcal{O}}$ des $g \in \mathcal{D}'^m(\mathcal{O})$ tel que $P(x, D) g$ soit dans la restriction $\mathcal{E}(\Omega)_{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{E}(\Omega)$ à $\mathcal{O}$; muni de la topologie évidente, c'est un espace de Fréchet : d'après le théorème précédent, et un théorème classique de Banach, son image par P dans $\mathcal{E}(\Omega)_{\mathcal{O}}$ est maigre : donc l'ensemble des $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ tels qu'on ait : $f_{\mathcal{O}} \in P(x, D)\mathcal{D}'^m(\mathcal{O})$ est maigre.

Soit alors $\mathcal{O}_p$, $p \in \mathbb{N}$, une base des ouverts $\subset \Omega$; l'ensemble des $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ tels qu'on ait pour un p et un m : $f_{\mathcal{O}_p} \in P(x, D)\mathcal{D}'^m(\mathcal{O}_p)$ est maigre, donc $\neq \mathcal{E}(\Omega)$ d'après le théorème de Baire.

EXEMPLES.

1. Le premier exemple de ce genre, antérieur au travail de HÖRMANDER, est dû à H. LEWY [5] :

$$P(x, D) = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} - 2i(x_1 + ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3} \quad , \qquad \text{avec } \Omega = \mathbb{R}^3 .$$

On a en effet : $p(x, \xi) = i\xi_1 - \xi_2 + 2(x_1 + ix_2)\xi_3$, et $C(x, \xi) = -8\xi_3$; la condition (C) n'est vérifiée en aucun point (prendre $\xi_1 = -2x_2$, $\xi_2 = 2x_1$, $\xi_3 = 1$).

Soit alors $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$ tel que l'équation $P(x, D) g = f$ n'ait de solution au voisinage d'aucun point : alors l'équation homogène $P(x, D)u = fu$ n'a, au voisinage d'aucun point, de solution $\mathcal{C}^1$ et $\neq 0$ (prendre $v = \log u$) : la question de savoir si l'on peut choisir f de manière qu'il n'y ait aucune solution distribution est ouverte, à ma connaissance.

2. Plus généralement, soit $P(x, D) = \sum_{|j|=1} a_j(x) D_j$ un "champ de vecteurs complèxes" dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et supposons que le système $P(x, \xi)$, $\overline{P}(x, \xi)$ soit, $\forall x$, de rang constant r ($r = 1$ ou 2) sur $\mathbb{C}$. Alors la condition (C), qui équivaut ici à la condition 2° bis, équivaut encore à la suivante (théorème de

Frobenius complexe) : au voisinage de tout point, on peut faire un changement C^∞ de coordonnées tel que $P(x , D)$ soit ramené à l'une des formes suivantes

$$a(x) \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad (\text{si } r = 1) \quad ,$$

$$a(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \qquad (\text{si } r = 2) \quad .$$

Même si l'on trouve cette histoire immorale (ce n'est pas l'avis du conférencier), on conviendra qu'il s'imposerait d'étudier de ce même point de vue les sytèmes "surdéterminés", au moins lorsqu'ils sont d'ordre 1 .

3. Soit $P(D)$ un opérateur à coefficients constants de <u>type principal</u> (i. e. les $\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(\xi)$ n'ont pas de zéro réel commun $\neq 0$), mais <u>non elliptique</u> ; on voit facilement qu'il existe un $P(x , D)$ vérifiant $P(0 , D) = P(D)$, mais ne vérifiant pas (C) à l'origine.

IV. Démonstration du théorème 2.

1. Supposons qu'on ait $P(x , D)\, \mathcal{D}'(\Omega) \supset \mathcal{D}(\Omega)$, et soit $\mathcal{O}$ un ouvert relativement compact dans Ω .

Munissons $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ de sa topologie habituelle d'espace de Fréchet, et soit V l'espace $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ muni de la topologie induite par l'application ${}^tP(x , D) : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \to \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$: V est un espace métrisable.

Sur $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}) \times V$, on considère la forme bilinéaire : $(f , v) \to \int fv\, dx$; elle est séparément continue puisque, par hypothèse, il existe $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $P(x , D)\, g = f$: elle est donc continue.

Par conséquent, il existe $k , \ell \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel qu'on ait, $\forall\ f , v \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$:

$$\left| \int fv\, dx \right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{Max} |D_\alpha f| \sum_{|\beta| \leq \ell} \operatorname{Max} |D_\beta\, {}^tPv|$$

(le maximum est pris sur x).

Pour démontrer ce théorème 2, il nous suffira donc d'établir ceci :

<u>Si</u> (C) <u>n'est pas vérifiée en</u> 0 (on suppose $0 \subset \Omega$), <u>il existe</u>, $\forall\ k , \ell \in \mathbb{N}$ <u>une famille</u> v_τ ($\tau > 0$) <u>de fonctions</u> $\in \mathcal{D}(\Omega)$, <u>à support dans un compact fixe, telle que</u>

1° <u>Pour</u> $t \to \infty$, v_τ <u>ne converge pas vers</u> 0 <u>dans</u> $\mathcal{D}'^k(\Omega)$;

2° <u>Pour</u> $t \to \infty$, ${}^tP\, v_\tau$ <u>converge vers</u> 0 <u>dans</u> $\mathcal{D}^\ell(\Omega)$.

On va fabriquer v_τ par un développement asymptotique analogue à ceux que l'on rencontre dans la théorie des paquets d'onde, et qui avaient déjà servi à HADAMARD et à LAX à donner des conditions nécessaires pour qu'une équation soit hyperbolique (mais ici, la situation est plus subtile).

2. Supposons donc que (C) ne soit pas vérifiée en 0, et soit $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel qu'on ait $p(0, \xi) = 0$, $C(0, \xi) \neq 0$; désignons par m le degré de P ; on a (vérification facile)

$$C(0, \xi) = \sum_{j=1}^{n} i[p^j(0, \xi)\, \bar{p}_j(0, \xi) - p_j(0, \xi)\, \bar{p}^j(0, \xi)] \quad .$$

C étant réel et de degré impair, on peut supposer $C(0, \xi) < 0$.

LEMME 1. - Il existe une série formelle w en $(x_1, \dots, x_n)$, qui possède les propriétés suivantes :

1° $p(x, \operatorname{grad} w) = 0$,

2° $w(x) = i \langle x, \xi \rangle + \frac{1}{2} \Sigma a_{jk} x_j x_k$ + termes d'ordre $\geqslant 3$, la matrice (a_{jk}) étant symétrique et de partie réelle définie négative.

(dans 1°, p a été, évidemment, identifié à sa série formelle en 0).

Prenons d'abord $w_1 = i \langle x, \xi \rangle$; alors $p(x, \operatorname{grad} w_1)$ s'annule en 0 ; soit $w_2 = \Sigma a_{jk} x_j x_k$, et écrivons que $p(x, \operatorname{grad}(w_1 + w_2))$ a ses dérivées nulles en 0 : on trouve que les a_{jk} doivent vérifier

$$\forall\, j, \qquad i p_j(0, \xi) + \sum_k p^k(0, \xi)\, a_{jk} = 0 \quad .$$

Une fois obtenus les a_{jk}, on déterminera de proche en proche les termes homogènes successifs, par exemple par Cauchy-Kovalevski formel. Reste à montrer que l'on peut choisir les a_{jk} avec les propriétés de l'énoncé ; or cela résulte aussitôt du lemme suivant :

LEMME 2. - Étant donnés deux vecteurs $(z_1, \dots, z_n)$ et $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$, pour qu'il existe une matrice symétrique (a_{jk}) à partie réelle définie négative vérifiant $\Sigma a_{jk} z_j = \zeta_k$, il faut et il suffit qu'on ait $\Re \Sigma \zeta_k \bar{z}_k < 0$.

3. Une fois w obtenu, on construit par récurrence des séries formelles $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r, \dots$ possédant la propriété suivante, $\forall\, r \in \mathbb{N}$:

Soit $u_{\tau, r} = e^{\tau w} \sum_0^r \varphi_\mu \tau^{-\mu}$; alors ${}^tP(x, D)\, u_{\tau, r} = \tau^m e^{\tau w} \sum_{r+1}^{r+m} \psi_\mu \tau^{-\mu}$.

Pour déterminer φ_μ , supposant $\varphi_0 , \dots , \varphi_{\mu-1}$ déterminés, on écrit l'équation qu'elle doit satisfaire pour que le terme en $\tau^{m-\mu-1}$ s'annule ; elle est du type suivant :

$$\sum_1^n A_j D_j \varphi_\mu + B \varphi_\mu + C_\mu = 0 \quad ,$$

où $A_j = - p^j(x , i \operatorname{grad} w)$, B est une série fixe, et C_μ une série dépendant de $\varphi_0 , \dots , \varphi_{\mu-1}$: comme les A_j ne sont pas tous nuls en 0 , Cauchy-Kovalevski formel montre l'existence de φ_μ . En outre, (pour la suite), on choisit $\varphi_0(0) = 1$.

Soient alors $\bar{w} , \bar{\varphi}_0 , \dots , \bar{\varphi}_r , \dots$ des fonctions $\in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ ($\mathcal{O}$ ouvert relativement compact $\subset \Omega$) ayant respectivement $w , \varphi_0 , \dots , \varphi_r , \dots$ pour séries formelles en 0 ; on peut supposer qu'il existe $A > 0$ tel que $\Re w \leqslant - A|x|^2$.

Prenons $r = n + m + k + \ell + 1$, et posons

$$v_\tau = \tau^{k+n} e^{\tau \bar{w}} \sum_0^r \bar{\varphi}_\mu \tau^{-\mu} \quad .$$

Comme $|e^{\tau w}| \leqslant e^{-A|x|^2}$, on voit immédiatement que ${}^t P v_\tau$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Reste à montrer que v_τ ne converge pas vers 0 dans $\mathcal{D}'^k(\Omega)$. Or, soit $f \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$, et posons $f_\tau(x) = \tau^{-k} f(\tau x)$; il est clair que les f_τ forment un ensemble borné dans $\mathcal{D}^k(\underset{\sim}{R}^n)$ (et aussi dans $\mathcal{D}^k(\Omega)$), dès que $\tau \geqslant \tau_0$. Or

$$\int f_\tau v_\tau \, dx = \int f(x) \, e^{\tau \bar{w}(x/\tau)} \sum_0^r \bar{\varphi}_\mu\left(\frac{x}{\tau}\right) \tau^{-\mu} \, dx \to \mathcal{F}f(- \xi)$$

(puisque $\varphi_0(0) = 1$).

V. Autres résultats.

Par les mêmes méthodes, HÖRMANDER démontre entre autres les résultats suivants [4] :

THÉORÈME 3. - Soit $P(x , D)$ un opérateur du premier ordre, à coefficients analytiques, dans un ouvert $\Omega \supset 0$; soit $\xi \in \underset{\sim}{R}^n$ tel que $p(0 , \xi) = 0$, et $C(0 , \xi) \neq 0$. Il existe un nombre $c > 0$ et une fonction f holomorphe dans $\Im \langle z , \xi \rangle < c$ tel que la restriction de f à Ω n'appartienne pas à $P(x , D)\mathcal{D}'(\Omega)$.

THÉORÈME 4. - Soient $P(x , D)$ et $Q(x , D)$ deux opérateurs du premier ordre tels que, pour un ensemble dense dans Ω , (C) ne soit pas vérifiée ; supposons que $p(x , D)$ ne s'annule en aucun point, et qu'on ait $P\mathcal{D}'(\Omega) \supset Q\mathcal{D}(\Omega)$. Alors il existe $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ tel que $Q(x , D) f = P(x , D)(\varphi f)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (Lars). - On the theory of general partial differential operators, Acta Math., t. 94, 1955, p. 161-248 (Thèse).

[2] HÖRMANDER (Lars). - Differential operators of principal type, Math. Annalen, t. 140, 1960, p. 124-146.

[3] HÖRMANDER (Lars). - Differential equations, without solutions, Math. Annalen, t. 140, 1960, p. 169-173.

[4] HÖRMANDER (Lars). - Traité sur les équations différentielles (en préparation).

[5] LEWY (Hans). - An exemple of a smooth linear partial differential equation without solution, Annals of Math., Series 2, t. 66, 1957, p. 155-158.

[6] TREVES (François). - Thèse d'Hörmander, I , II , Séminaire Bourbaki, 2e éd., t. 8, 1955/56, n° 130 et 135, 10 et 7 p.