

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

BERNARD MALGRANGE

Division des distributions

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 203, p. 477-481

http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__477_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

DIVISION DES DISTRIBUTIONS

par Bernard MALGRANGE

L. SCHWARTZ, dans la "Théorie des distributions", avait posé le problème suivant : soient Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, f une fonction analytique réelle dans Ω , et T une distribution dans Ω ($T \in \mathcal{O}'_\Omega$) ; existe-t-il $S \in \mathcal{O}'_\Omega$ tel qu'on ait $fS = T$? Par dualité, ce problème est équivalent au suivant : soit \mathcal{E}_Ω l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω ; $f\mathcal{E}_\Omega$ est-il un idéal fermé de \mathcal{E}_Ω ?

L. HÖRMANDER [1] et S. ŁOJASIEWICZ [2] ont résolu indépendamment ce problème par l'affirmative, le premier dans le cas où f est un polynôme, le second dans le cas général ; plus exactement, tous les deux ramènent le problème à la démonstration d'une inégalité (cf. n° 2 ci-dessous), que HÖRMANDER démontre pour les polynômes, tandis que ŁOJASIEWICZ la démontre dans le cas général. Leurs méthodes diffèrent aussi en ceci, que HÖRMANDER travaille sur \mathcal{E} (i. e. sur le second problème dont il vient d'être question), tandis que ŁOJASIEWICZ travaille directement sur \mathcal{O}' , i. e. sur le "problème de division".

J'ai suivi ici essentiellement la méthode de ŁOJASIEWICZ, qui permet, moyennant quelques modifications, d'arriver à un "théorème de division" plus général (théorème 3). On trouvera les détails des démonstrations dans le séminaire Schwartz, 1959/60, exposés n° 21-25.

1. Distributions prolongeables.

A et B étant des bornés $\subset \mathbb{R}^n$, et Λ un compact $\subset \mathbb{R}^n$, on dira que " A et B sont régulièrement séparés par Λ " s'il existe $C > 0$, $\rho > 0$ tels que, $\forall x \in A$, on ait :

$$d(x, B) \geq Cd(x, \Lambda)^\rho \quad (d = \text{distance}) \quad .$$

Il est immédiat que cette relation est symétrique par rapport à A et B .

L'intérêt de cette notion réside dans le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - A et B étant deux compacts $\subset \mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° A et B sont régulièrement séparés par $A \cap B$;

2° Toute distribution T de support $\subset A \cup B$ est de la forme $T_1 + T_2$, avec support $(T_1) \subset A$, support $(T_2) \subset B$.

(En langage canonique : $\mathcal{E}'_{A \cup B} = \mathcal{E}'_A + \mathcal{E}'_B$).

Il est facile de voir que $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ (supposer que A et B ne sont pas régulièrement séparés par $A \cap B$, et prendre une suite $(x_n, y_n) \subset A \times B$, telle que $d(x_p, y_p)$ tende très vite vers zéro, mais non $d(x_n, A \cap B)$, et considérer une distribution de la forme

$$\sum \alpha_p [\delta(x - x_p) - \delta(x - y_p)] \quad ,$$

les α_n étant des scalaires convenables).

La démonstration du fait que $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ va être esquissée dans un instant. Soit Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, $b\Omega$ sa frontière ; on dira que $T \in \mathcal{D}'_\Omega$ est "prolongeable" (on notera : $T \in \mathcal{D}'_\Omega$) s'il existe $\bar{T} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R}^n}$ tel que la restriction à Ω de \bar{T} soit égale à T ; on dira d'autre part que $f \in \mathcal{E}_\Omega$ est "à croissance lente dans Ω " (on notera : $f \in \mathcal{O}_\Omega$) si, $\forall k \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_k > 0$ et $\rho_k > 0$ tels que $\forall x \in \Omega$, on ait $|D^k f(x)| \leq C_k d(x, b\Omega)^{-\rho_k}$.

Si Ω est borné (c'est le seul cas qui nous intéresse) le théorème de Hahn-Banach montre ceci : " $T \in \mathcal{D}'_\Omega$ " équivaut à la propriété suivante : $\exists C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall \varphi \in \mathcal{D}_\Omega$, on ait $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_m$ (on pose $\|\varphi\|_m = \sup_{x \in \Omega} \sum_{|k| \leq m} |D^k \varphi(x)|$). De là résulte qu'on peut supposer \bar{T} à support dans $\bar{\Omega}$ (prolonger la distribution égale à T sur Ω et 0 sur $\bar{\Omega}$) ; de là résulte aussi (calcul élémentaire) que l'on a : $\mathcal{O}_\Omega \cap \mathcal{D}'_\Omega \subset \mathcal{D}'_\Omega$.

Cela étant, pour démontrer que $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$, on s'appuie sur le résultat suivant (non trivial) : supposons que A et B soient régulièrement séparés par $A \cap B = \Lambda$, et soit $\Omega = \mathbb{R}^n - \Lambda$; il existe $f \in \mathcal{O}_\Omega$, $f = 1$ au voisinage de $A - \Lambda$, $f = 0$ au voisinage de $B - \Lambda$. Cela étant, soient T' la restriction de T à Ω , et $T'_1 = fT'$: comme $f \in \mathcal{O}_\Omega$ et $T' \in \mathcal{D}'_\Omega$, on a $T'_1 \in \mathcal{D}'_\Omega$; il suffit alors de prendre pour T_1 un prolongement de T'_1 , et de poser $T_2 = T - T_1$ pour obtenir la décomposition cherchée de T .

2. L'inégalité de Łojasiewicz.

THÉOREME 2. - Soient Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, f une fonction analytique dans Ω , et V l'ensemble des zéros de f ; pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $C > 0$,

$\rho > 0$ tels qu'on ait, $\forall x \in K : |f(x)| \geq C d(x, V)^\rho$ (autrement dit : si $\Omega_1 \subset \Omega$ est un ouvert relativement compact dans Ω , on a : $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}_{\Omega_1 - V}$).

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - Si E et F sont deux sous-ensembles analytiques de Ω , et si K et L sont deux compacts $\subset \Omega$, ($K \subset L$), $E \cap K$ et $F \cap K$ sont régulièrement séparés par $E \cap F \cap L$.

Le principe de la démonstration est le suivant :

a. Supposant vrai le théorème pour $n - 1$ variables, on montre, par récurrence sur k , la propriété suivante : si E est un sous-ensemble analytique de Ω , de dimension $k \leq n - 1$, il existe C' et ρ' tels que, $\forall x \in K \cap E$, on ait

$$|f(x)| \geq C' d(x, V \cap E)^{\rho'}$$

(La question étant locale, on peut se placer au voisinage d'un point a ; et l'on peut supposer le germe E_a irréductible et $\not\subset V_a$; en utilisant un dévissage classique, on montre alors facilement qu'il existe un sous-ensemble analytique $W \subset E$ au voisinage de a , $\dim W_a < k$ tel qu'on ait sur E dans un voisinage de a :

$$|f(x)| \geq C'' d(x, W)^{\rho''}$$

comme l'inégalité analogue est vraie sur W , par hypothèse de récurrence, on en déduit immédiatement le résultat).

b. Pour démontrer le théorème, on se place au voisinage d'un point a , et l'on suppose que f est un polynôme distingué en $x_n - a_n$, de degré p . Soit W l'ensemble des zéros de $\frac{\partial f}{\partial x_n}$; comme (par l'hypothèse de récurrence, et (a)), l'inégalité cherchée est vraie sur W , il suffit de montrer que l'on a, dans un voisinage de a :

$$|f(x)| \geq C' d(x, V \cup W)^{\rho'}$$

or, si $d(x, V \cup W) > \delta$, f et $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ ne s'annulent pas sur les segments joignant (x_1, \dots, x_n) à $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \pm \delta)$, et, sur l'un des deux segments, on a :

$$|f(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi)| \leq |f(x_1, \dots, x_n)|$$

On en déduit l'inégalité cherchée en remarquant que $\frac{\partial^p f}{\partial x_n^p} = p!$ s'obtient par une formule d'interpolation portant sur $(p + 1)$ points de ce segment (ou par

toute autre astuce du même genre).

3. Le "théorème de division".

THÉORÈME 3. - Soient Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$ et f_{ij} ($1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq m$) des fonctions analytiques réelles dans Ω . Soient T_j des distributions $\in \mathcal{D}'_\Omega$, vérifiant la condition suivante : au voisinage de tout point $a \in \Omega$, toute relation à coefficient analytique entre les F_j ($F_j = (f_{1j}, \dots, f_{pj})$) est une relation entre les T_j (i. e., si $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ analytiques au voisinage de a vérifient

$$\forall i \quad \sum \varphi_j f_{ij} = 0$$

au voisinage de a , elles vérifient : $\sum \varphi_j T_j = 0$ au voisinage de a).

Alors il existe $S_1, \dots, S_p \in \mathcal{D}'_\Omega$ telles qu'on ait

$$\forall j \quad \sum f_{ij} S_i = T_j \quad .$$

(En fait, en utilisant le "théorème A" de la théorie des faisceaux analytiques cohérents, il suffirait d'imposer les "conditions de compatibilité" pour les relations globales dans Ω entre les F_j).

Le théorème résulte aussitôt, par localisation et récurrence de l'énoncé suivant : supposons que les T_j soient portés au voisinage de 0 par un ensemble analytique E de dimension k , et qu'ils vérifient les "conditions de compatibilité", sauf sur F , ensemble analytique de dimension $< k$; alors il existe au voisinage de 0 des S_j portées par E , et F_1 , ensemble analytique de dimension $< k$ tel qu'on ait, en dehors de F_1 : $\sum f_{ij} S_i = T_j$.

On peut supposer le germe E_0 irréductible (d'après le théorème 1 et le corollaire du théorème 2). Si g_1, \dots, g_N sont des fonctions analytiques dont les germes en 0 engendrent l'idéal de E_0 , on a certainement, pour un certain q : $g_\ell^q T_j = 0$; on voit alors qu'il existe un entier q' tel que si l'on rajoute aux équations proposées les conditions : $g_\ell^{q'} S_i = 0$, les "conditions de compatibilité" continuent d'être satisfaites en dehors de F (utiliser le fait que l'anneau des germes de fonctions analytiques est noethérien, et le théorème de cohérence d'Oka), on opère alors à peu près comme suit : ce fait permet en dehors d'un F_1 contenant F et la partie singulière de E (i. e. les points qui ne sont pas des points réguliers où E soit de dimension k) de chercher les S_i sous forme d'une somme finie de dérivées transversales d'ordre borné de distributions sur E , i. e. de se ramener à un système fini d'équations à coefficients fonctions analytiques sur E ;

en vidant encore les zéros d'un "déterminant principal" on est ramené à la méthode traditionnelle de résolution des équations linéaires (comme si l'on était sur un corps) : il reste à montrer que les distributions obtenues sont bien prolongeables, et qu'elles admettent des prolongements portés par E ; or, cela résulte facilement des résultats établis aux numéros 1 et 2.

4. Conséquences.

THÉOREME 4. - f_{ij} ($1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq m$) étant des fonctions analytiques dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et φ_i des fonctions $\in \mathcal{E}'_\Omega$, pour qu'il existe des $\psi_j \in \mathcal{E}'_\Omega$ telles qu'on ait $\varphi_i = \sum f_{ij} \psi_j$, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

En tout point $a \in \Omega$, le développement de Taylor formel de $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est combinaison linéaire à coefficients séries formelles, des développements de Taylor des $F_j = (f_{1j}, \dots, f_{pj})$.

D'après le théorème de Whitney sur les idéaux de fonctions différentiables, il suffit de démontrer que l'image de $[\mathcal{E}'_\Omega]^p$ dans $[\mathcal{E}'_\Omega]^m$ par l'application $(\psi_j) \rightarrow (\sum f_{ij} \psi_j)$ est fermée, i. e. que l'application en question est un homomorphisme. Il suffit donc par dualité, de démontrer que l'image de $[\mathcal{E}'_\Omega]^m$ dans $[\mathcal{E}'_\Omega]^p$ par l'application $(S_j) \rightarrow (\sum f_{ij} S_i)$ est fermée : or, cela résulte aussitôt du théorème 3 (qui s'applique visiblement aussi bien à \mathcal{E}'_Ω qu'à \mathcal{D}'_Ω !)

COROLLAIRE (pour faire plaisir à SERRE !). - Au voisinage de tout point $a \in \Omega$, le sous- \mathcal{E}'_Ω -module de $[\mathcal{E}'_\Omega]^p$ formé des systèmes (ψ_1, \dots, ψ_p) vérifiant $\sum f_{ij} \psi_j = 0$ est \mathcal{E}'_Ω -engendré par les systèmes analytiques qu'il contient (résulte immédiatement du théorème 4 et du théorème de cohérence d'Oka).

Si l'on suppose maintenant que les $\Omega = \mathbb{R}^n$, et que les f_{ij} sont des polynômes on déduit facilement (par transformation de Fourier) du théorème 3, le théorème suivant :

THÉOREME 5. - D_{ij} étant des opérateurs différentiels à coefficients constants et T_j des distributions $\in \mathcal{S}'$, pour qu'il existe des $S_i \in \mathcal{S}'$ telles qu'on ait $\sum D_{ij} S_i = T_j$, il suffit (et il faut!) que toute relation à coefficients polynômes différentiels entre les $\Delta_j = (D_{1j}, \dots, D_{pj})$ soit une relation entre les T_j .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HÖRMANDER (Lars). - On the division of distributions by polynomials, Arkiv för Mat., t. 3, 1958, p. 555-568.
- [2] ŁOJASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division, Studia Mathematica, t. 18, 1959, p. 87-136.