SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ALEXANDER GROTHENDIECK

Géométrie formelle et géométrie algébrique

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. nº 182, p. 193-220

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__193_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1959)

GÉOMÉTRIE FORMELLE ET GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

par Alexander GROTHENDIECK

1. Schémas.

On sait qu'un espace algébrique affine défini sur un corps k est essentiellement déterminé par son algèbre affine A (anneau des fonctions régulières définies sur k), les morphismes d'espaces algébriques $X \longrightarrow Y$ correspondant biunivoquement aux homomorphismes de k-algèbres $A(Y) \longrightarrow A(X)$. L'algèbre affine correspondant à un espace algébrique est une k-algèbre de type fini et dans le point de vue "classique", elle n'a pas d'éléments nilpotents ; inversement, toute algèbre de ce type est obtenue comme algèbre affine d'un espace algébrique défini sur k. Il y a alors un dictionnaire connu permettant d'interpréter les situations concernant des espaces algébriques affines en termes d'algèbre commutative. On a constaté depuis longtemps qu'on obtenait alors des énoncés plus généraux, car il n'était généralement plus besoin de supposer que les anneaux en jeu étaient du type juste envisagé, l'hypothèse noethérienne étant le plus souvent suffisante. En particulier, qu'il y ait ou non un corps de base donné, il n'y avait pas lieu d'exclure le cas où ces anneaux contiennent des éléments nilpotents. Jusqu'à présent, les géomètres s'étaient refusés à tenir compte de ces indications et se sont obstinés à se restreindre à la considération d'algèbres affines sans éléments nilpotents, i.e. d'espaces algébriques dans les faisceaux structuraux desquels il n'y a pas d'éléments nilpotents (et même le plus souvent, des espaces algébriques "absolument irréductibles"). Le conférencier pense que cet état d'esprit a été un obstacle sérieux au développement des méthodes vraiment naturelles en Géométrie algébrique.

Soit A un anneau commutatif. Il est bien connu que l'ensemble $X = \mathrm{Spec}(A)$ des idéaux premiers de A est muni d'une topologie naturelle, la "topologie de Zariski" ou tppologie spectrale. D'autre part, il y a un faisceau d'anneaux commutatifs O_X sur X, dont la fibre en $\mathfrak{p} \in X$ est l'anneau localisé $A_{\mathfrak{p}}$, et dont l'anneau des sections s'identifie à A. Ainsi, X devient un espace annelé, appelé spectre premier de A. Un homomorphisme d'anneaux $f : A \longrightarrow B$ définit un morphisme d'espaces annelés $f' : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$, l'application ensembliste sous-jacente n'étant autre que $\mathfrak{p} \longrightarrow f^{-1}(\mathfrak{p})$. Les homomorphismes d'espaces annelés de Spec(B) dans Spec(A) obtenus de cette façon sont exactement ceux pour lesquels les homomorphismes $O_x \longrightarrow O_y$ $(x = f'(y))$ sont locaux (i.e. l'image inverse de l'idéal maximal est l'idéal maximal).

On appelle <u>schéma affine</u> un espace annelé isomorphe à un Spec(A) , et <u>préschéma</u> un espace annelé localement affine, i.e. dont tout point a un voisinage ouvert qui est un schéma affine pour la structure induite. On définit de façon évidente les <u>morphismes</u> des préschémas ; localement ils correspondent à des homomorphismes d'anneaux.

Quand on se fixe un préschéma S , et qu'on regarde des morphismes de préschémas $X \longrightarrow S$, alors S joue le rôle d'un corps ou d'un anneau de base (ou mieux, d'un espace de base dans une fibration). On dit alors que X est un S-préschéma ; si S = Spec(A) , cela signifie aussi que O_X est un faisceau de A-<u>algèbres</u>. Ainsi, tout préschéma peut être regardé de façon unique comme un Z-préschéma. Bien entendu, les S-préschémas forment une catégorie, de plus on montre que dans cette catégorie le produit de deux objets X , Y existe toujours, il est noté $X \times_S Y$. Cette notion de produit permet de définir le changement de base dans un S-préschéma, correspondant à un morphisme $S' \longrightarrow S$: en effet, $X \times_S S'$ pourra être considéré comme un S'-préschéma.

On dit que X est <u>séparé</u> au-dessus de S si la diagonale de $X \times_S X$ est fermée. On appelle <u>schéma</u> un préschéma séparé au-dessus de Z ; il est alors séparé au-dessus de n'importe quoi. Pour simplifier, nous ne parlerons plus que de schémas, que de plus nous supposerons <u>noethériens</u>, i. e. réunions finies d'ouverts affines, spectres d'anneaux noéthériens. X est <u>dit de type fini</u> sur S, si pour tout ouvert affine U de S , son image inverse dans X est réunion finie d'ouverts affines dont les anneaux sont des algèbres de type fini sur l'anneau de U . Ce sont de tels S-schémas qui se prêtent à une étude proprement géométrique. En particulier, pour tout $s \in S$, la fibre $f^{-1}(s)$ de X au-dessus de s est un schéma algébrique sur le corps résiduel $\varkappa(s)$ de l'anneau local O_s de s dans S . Ainsi, X peut dans une certaine mesure être considéré comme une famille d'"espaces algébriques" $f^{-1}(s)$ le paramètre s parcourant S (i. e., du point de vue local, l'ensemble des idéaux premiers d'un anneau donné). Bien entendu, les $\varkappa(s)$ peuvent avoir des caractéristiques différentes. Si S = Spec(k) , où k est un corps, on retrouve essentiellement la notion usuelle d'"espace algébrique", avec la seule différence que maintenant le faisceau structural peut avoir des éléments nilpotents.

En s'inspirant de notions bien connues, on définit la notion de morphisme projectif, et plus généralement de morphisme propre. Un tel morphisme est de type fini, de plus il transforme parties fermes en parties fermées, et garde cette propriété par changement de base quelconque.

X étant un schéma (noethérien, comme toujours) le faisceau O_X est un faisceau cohérent d'anneaux au sens de [2]. Les faisceaux cohérents de modules sur X sont donc aussi les faisceaux qui localement sont isomorphes à un conoyau d'un homomorphisme $O_X^m \longrightarrow O_X^n$.

2. Schémas formels.

Soient X un schéma, et X' une partie fermée de X. Alors il existe un sous-faisceau cohérent J de O_X tel que $X' = \operatorname{supp} O_X/J$ (et il en existe même un plus grand). Muni de O_X/J, X' devient un schéma, noté X_o ; un tel schéma est appelé "sous-schéma fermé de X". On peut aussi pour tout n considérer X' muni de O_X/J^{n+1}, noté X_n, c'est un sous-préschéma fermé de X dont l'ensemble sous-jacent est encore X', mais ayant un autre faisceau structural, soit $O_{X_n} = O_X/J^{n+1}$. Evidemment les O_{X_n} forment un système projectif de faisceaux d'anneaux sur X, dont la limite projective $\bar{O}_X$ est appelée complété formel de O_X le long de X'. Muni de ce faisceau d'anneaux, X' est appelé complété formel de X le long de X', c'est donc un espace annelé, mais pas un schéma en général. Pour tout faisceau cohérent F sur X, on peut considérer de même le complété formel $\bar{F} = \varprojlim_n F_n$ de F le long de X' (où $F_n = F \otimes_{O_X} O_X/J^{n+1}$), c'est un faisceau de modules sur $\bar{X}$. Ses sections s'appellent les "sections formelles de F le long de X'" et s'identifient aux éléments de $\varprojlim_n \Gamma(X', F_n)$. Pour $F = O_X$, on trouve les "fonctions holomorphes" de X le long de X' au sens de ZARISKI, (dont nous ne suivrons pas la terminologie à cause de ces interférences avec la terminologie classique).

On appelle schéma formel (sous-entendu : noethérien) un espace topologique $\mathfrak{X}$, muni d'un faisceau d'anneaux topologiques $O_{\mathfrak{X}}$ satisfaisant à la condition suivante : on a un isomorphisme de faisceaux d'anneaux topologiques $O_{\mathfrak{X}} = \varprojlim_n O_n$, où les O_n forment un système projectif de faisceaux d'anneaux sur $\mathfrak{X}$, faisant chacun de $\mathfrak{X}$ un schéma $\mathfrak{X}_n$, et tel que pour $m \geqslant n$, l'homomorphisme $O_m \longrightarrow O_n$ soit surjectif et ait pour noyau J_m^{n+1}, où J_m est le noyau de $O_m \longrightarrow O_o$. On montre alors que $O_{\mathfrak{X}}$ est un faisceau cohérent d'anneaux locaux noethériens.

En vertu des définitions, un complété formel $\bar{X}$ comme plus haut est un schéma formel, et inversement, tout schéma formel est localement de ce type. En fait, la donnée d'un schéma formel affine (i. e. tel que $\mathfrak{X}_o$ soit affine, ce qui implique que tous les $\mathfrak{X}_n$ le sont) est équivalente à la donnée d'un anneau topologique noéthérien, J-adique séparé et complet.

Les définitions habituelles : morphisme, morphisme de type fini, morphisme propre, etc., pour les schémas ordinaires, s'étendent sans difficulté aux schémas formels.

3. Les trois théorèmes fondamentaux.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre de schémas (noethériens comme toujours), soient Y' une partie fermée de Y , X' son image inverse dans X , considérons les complétés formels $\bar{Y}$, $\bar{X}$ correspondants. Alors f induit un morphisme $\bar{f} : \bar{X} \longrightarrow \bar{Y}$ de schémas formels, qui est d'ailleurs propre. Soit F un faisceau cohérent sur X , alors $\bar{F}$ est un faisceau cohérent sur $\bar{X}$. Dans le théorème 1 , on oublie X , Y , F et on ne regarde que le morphisme propre $\bar{f}$ de schémas formels, et le faisceau cohérent $\bar{F}$ sur $\bar{X}$.(Cependant, le conférencier n'a écrit de démonstration complète que dans le cas où on part de X , Y , f , F) .

THÉORÈME 1 (théorème de finitude).

i. Les $R^q\bar{f}_*(\bar{F})$ sont des faisceaux cohérents sur $\bar{Y}$.

ii. Les homomorphismes naturels

$$R^q \bar{f}_*(\bar{F}) \longrightarrow \varprojlim_n R^q f_{n*}(F_n)$$

sont des isomorphismes.

Dans cet énoncé, on suppose choisi un sous-faisceau cohérent J de O_Y définissant Y' , d'où par image réciproque un sous-faisceau cohérent de O_X définissant X' , d'où par suite la définition des F_n , X_n , Y_n et $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ comme au n° 2 . Les changements mineurs à faire dans l'explicitation de ces notations sont évidents, si on partait d'un morphisme propre quelconque de deux schémas formels.

Le théorème 1 ne concernait que la "cohomologie formelle". Le théorème suivant la met en rapport avec la "cohomologie algébrique", et s'apparente à un théorème bien connu de SERRE [4] sur la comparaison entre cohomologie algébrique et cohomologie analytique.

THÉORÈME 2 (Premier théorème de comparaison). - *Les* $R^q f_*(F)$ *sont des faisceaux cohérents sur* Y (ce qui est un cas particulier du théorème 1), *et les homomorphismes naturels*

$$\overline{R^q f_*(F)} \longrightarrow \varprojlim_n R^q f_{n*}(F_n)$$

sont des isomorphismes.

COROLLAIRE 1. - *On a des isomorphismes canoniques* : $\overline{R^q f_*(F)} = R^q \bar{f}_*(\bar{F})$.

Ce corollaire est, pour $q = 0$, une généralisation du "théorème fondamental des fonctions holomorphes" de Zariski, dont nous déduirons une généralisation du "théorème de connexion" de Zariski. Notons d'ailleurs que, alors que le théorème 1 (ii) est trivial pour $q = 0$, il n'en est plus du tout de même pour le théorème 2 ou pour sa formulation équivalente (corollaire 1). En fait, la démonstration procède par récurrence descendante sur q (étant trivial pour q grand, car alors les deux membres sont nuls), et le cas $q = 0$ apparaît donc comme le dernier pas de la récurrence, donc si on peut dire le cas "le plus difficile".

COROLLAIRE 2. - *Supposons* $Y = \mathrm{Spec}(A)$, Y' *étant défini par l'idéal* J *de* A . *Alors pour tout faisceau cohérent* F *sur* X , *les* $H^q(X , F)$ *sont des* A*-modules de type fini, dont les complétés* J*-adiques sont les* $H^q(\bar{X} , \bar{F})$.

Appliquant enfin ce corollaire à $H = \mathcal{H}om_{O_X}(F , G)$, on trouve :

COROLLAIRE 3. - *Supposons* $Y = \mathrm{Spec}(A)$, Y' *étant défini par l'idéal* J *de* A . *Soient* F , G *deux faisceaux cohérents sur* X , *alors* $\mathrm{Hom}(F , G)$ *est un module de type fini sur* A , *dont le complété* J*-adique s'identifie à* $\mathrm{Hom}(\bar{F} , \bar{G})$.

Bien entendu, l'application naturelle $\mathrm{Hom}(F , G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bar{F} , \bar{G})$ est celle qui associe à un homomorphisme $u : F \longrightarrow G$ son prolongement "par continuité" $\bar{u} : \bar{F} \longrightarrow \bar{G}$ (moyennant quoi $\bar{F}$ devient un foncteur en F) .

Supposons maintenant que A soit séparé et complet pour sa topologie J-adique, alors les corollaires 2 et 3 précédents donnent :

$$H^q(X , F) = H^q(\bar{X} , \bar{F}) , \qquad \mathrm{Hom}(F , G) = \mathrm{Hom}(\bar{F} , \bar{G}) .$$

Cette dernière identité montre que la catégorie des faisceaux cohérents sur X s'identifie à une sous-catégorie (avec comme morphismes les morphismes induits) de la catégorie des faisceaux cohérents sur $\bar{X}$. En fait, on a même :

THÉORÈME 3. - *Pour qu'un faisceau de modules sur* $\bar{X}$ *soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à un faisceau de la forme* $\bar{F}$, *où* F *est un faisceau cohérent sur* X (déterminé à un isomorphisme canonique près en vertu du théorème 2, corollaire 3).[On rappelle que maintenant $Y = \mathrm{Spec}(A)$, A étant un anneau topologique noethérien J-adique séparé et complet].

COROLLAIRE 1. - *Les sous-schémas fermés de* X *correspondent biunivoquement aux sous-schémas formels fermés de* $\bar{X}$.

En effet, ils correspondent aux sous-faisceaux cohérents de O_X resp. de $O_{\bar{X}}$. Regardant les graphes de morphismes comme des sous-schémas fermés, on déduit du corollaire 1 :

COROLLAIRE 2. - *Soient* X , Z *deux schémas propres au-dessus de* A , (anneau noethérien J-adique, séparé et complet). *Alors l'application* $g \longrightarrow \bar{g}$ *définit une correspondance biunivoque entre les* Y*-morphismes de* X *dans* Z , *et les* $\bar{Y}$*-morphismes de* $\bar{X}$ *dans* $\bar{Z}$.

En d'autres termes, *les schémas algébriques propres sur* A *apparaissent comme une sous-catégorie* (avec comme morphismes les morphismes induits) de la catégorie des schémas formels propres sur $\bar{Y}$. On fera attention cependant *qu'il existe des schémas formels propres sur* $\bar{Y}$ *qui ne sont pas "algébrisables"*, i. e. isomorphes à un $\bar{X}$, avec X propre sur A (tout comme il existe des variétés analytiques complexes compactes qui ne proviennent pas de variétés algébriques définies sur le corps des complexes). De tels schémas formels s'introduisent de façon naturelle en "*théorie des modules*". Notons cependant un cas particulier intéressant où un schéma formel est algébrisable :

THÉORÈME 4. - *Soit* A *un anneau noethérien local complet de corps résiduel* k , *et soit* $\mathfrak{X}$ *un schéma formel propre sur* A (muni de sa topologie $\mathfrak{r}(A)$-adique). On suppose

i. *que les anneaux locaux de* $O_{\mathfrak{X}}$ *sont des modules plats sur* A , *ou ce qui revient au même, si on munit* $O_{\mathfrak{X}}$ *et* A *de la filtration définie par les puissances de l'idéal maximal de* A , *on a pour les gradués associés la relation* $\mathrm{gr}(O_{\mathfrak{X}}) \simeq \mathrm{gr}^{o}(O_{\mathfrak{X}}) \otimes_k \mathrm{gr}(A)$.

ii. *Considérant* $\mathfrak{X}_o = \mathfrak{X} \otimes_A k$ *comme un schéma algébrique sur* k , *on a*

$H^2(\mathfrak{X}_0, O_{\mathfrak{X}_0}) = 0$.

iii. $\mathfrak{X}_0$ est projectif .

Sous ces conditions, $\mathfrak{X}$ est algébrisable, et de façon précise est isomorphe à $\bar{X}$, où X est un A-schéma projectif.

Les conditions (ii) et (iii) seront vérifiées en particulier si $\mathfrak{X}_0$ est une courbe simple sur k , et le théorème 4 pourra s'appliquer en particulier dans la "théorie des modules" pour les courbes de genre donné ... Indiquons comment on démontre le théorème 4 : on montre (cf. proposition 3 plus bas) que (i) et (ii) impliquent que tout faisceau cohérent sur $\mathfrak{X}_0$, localement isomorphe au faisceau fondamental, s'obtient par réduction à partir d'un faisceau de même nature sur $\mathfrak{X}$. Partant alors d'un faisceau "ample" sur $\mathfrak{X}_0$ (il en existe d'après (iii)) on le remonte en un faisceau inversible sur $\mathfrak{X}$, et utilisant le théorème 1 on prouve qu'un multiple de ce dernier définit une immersion de X dans le complété formel d'un schéma P_A^r ("projectif type" de dim r au-dessus de A) .

Pour la démonstration des théorèmes 1 à 3 , on se reportera à [1] .

4. Application au théorème de connexion et au "Main theorem" de Zariski.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre de schémas, alors d'après le théorème de finitude $f_*(O_X) = \underset{\sim}{A}$ est un faisceau cohérent sur Y, c'est d'ailleurs un faisceau d'algèbres commutatives, donc il correspond à un Y-schéma $g : Y' \longrightarrow Y$ fini au-dessus de Y (défini par la condition d'être affine au-dessus de Y , i. e. l'image inverse d'un ouvert affine est affine, et que $g_*(O_{Y'}) = \underset{\sim}{A}$). Il est immédiat que f se factorise alors canoniquement en $f = gf'$, où $f' : X \longrightarrow Y'$ est un morphisme de X dans Y' qui cette fois-ci est tel que $f'_*(O_X) = O_{Y'}$. Cette factorisation de f est appelée la factorisation de Stein de f . Appliquant le premier théorème de comparaison, corollaire 1, à f' et à la partie de Y' réduite à un point y' on trouve que $f'^{-1}(y') = X'$ est connexe (autrement, les sections formelles de X le long de X' ne formeraient pas un anneau local, or le complété de $f'_*(O_X)_{y'} = O_{y'}$ est local !) . On a prouvé :

THÉORÈME 5 ("Théorème de connexion" de Zariski). - *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre, alors f se factorise de façon unique (à un isomorphisme près) en $f = gf'$, où $g : Y' \longrightarrow Y$ est fini et $f' : X \longrightarrow Y'$ est tel que $f'_*(O_X) = O_{Y'}$ (d'où $g_*(O_{Y'}) = f_*(O_X)$) . Les fibres de f' sont connexes,*

i. e. l'ensemble des composantes connexes d'une fibre $f^{-1}(y)$ de f est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des points de Y' au-dessus de y, i. e. l'ensemble des idéaux maximaux dans $f_*(O_X)_y$.

On en déduit immédiatement les variantes habituelles du théorème de connexion. Notons ici seulement le

COROLLAIRE 1. - Pour qu'un point x de X soit isolé dans sa fibre $f^{-1}(y)$ il faut et il suffit que la fibre $f'^{-1}(y')$ (où $y' = f'(x)$) soit réduite à x, ou encore que f' induise un isomorphisme d'un voisinage de x sur un voisinage de y'. L'ensemble de ces points est un ouvert U, et f' induit un isomorphisme de U sur un ouvert de Y'.

Pour montrer que f' est un isomorphisme local en x, on note que f' induit un isomorphisme $O_{y'} \longrightarrow O_x$, comme on voit grâce à $f'(O_X) = O_{Y'}$, et au fait que (f' étant une application fermée dont la fibre en y' est réduite à x) les $f'^{-1}(V)$ parcourent un système fondamental de voisinages de x quand V parcourt un système fondamental de voisinages de y'. On en déduit aussitôt le résultat suivant, dû à CHEVALLEY dans le cas "géométrique".

COROLLAIRE 2. - Pour que f soit un morphisme fini, il faut et il suffit qu'il soit propre et que ses fibres soient finies.

S'il en est ainsi, f' est en effet un isomorphisme d'après ce qui précède.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme non nécessairement propre, mais supposons que X soit contenu comme ouvert dans un Y-schéma propre $\bar{f} : \bar{X} \longrightarrow Y$ (ce qui sera le cas en particulier si f est quasi-projectif). Appliquant le corollaire 1, on voit que $\bar{f}'$ induit un isomorphisme de l'ensemble U des points de X isolés dans leur fibre sur un ouvert de Y' (et que U est bien ouvert). On en déduit la variante globale suivante du "Main Theorem" de Zariski.

THÉORÈME 6 ("Main Theorem" de Zariski). - Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de type fini. Alors l'ensemble U des points de X qui sont isolés dans leur fibre est ouvert, et si f est quasi-projectif, U est Y-isomorphe à une partie ouverte d'un schéma Y' fini au-dessus de Y.

Comme un morphisme de type fini est localement affine, et a fortiori localement quasi-projectif, on déduit aussitôt du théorème 6 les variantes usuelles locales du Main Theorem.

5. Application à l'étude cohomologique des morphismes propres et plats.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre, soit F un faisceau cohérent sur X,

F étant supposé Y-plat, i. e. les F_x sont des modules plats sur les anneaux O_y $(y = f(x))$. Cela signifie aussi que pour tout $y \in Y$, si nous filtrons F le long de la fibre $f^{-1}(y)$ par les $\mathfrak{m}_y^n F$, ($\mathfrak{m}_y$ étant l'idéal maximal de O_y) le gradué associé est isomorphe à $(F/\mathfrak{m}_y F) \otimes_{\chi(y)} gr(O_y)$, en d'autres termes on a

$$\mathfrak{m}_y^n F/\mathfrak{m}_y^{n+1} F = F_y \otimes_{\chi(y)} (\mathfrak{m}_y^n/\mathfrak{m}_y^{n+1})$$

pour tout entier n, où X_y désigne la fibre $f^{-1}(y)$ considérée comme schéma propre au-dessus du corps résiduel $\chi(y)$ de y, et F_y le faisceau $F/\mathfrak{m}_y F$ induit par F sur X_y. Tenant compte de cet isomorphisme et du théorème 2, on arrive à des majorations et parfois des computations des $R^q f_*(F)$ au voisinage de y, connaissant la cohomologie de X_y à coefficients dans F_y. Le théorème 2 prend ici la forme

$$\overline{R^q f_*(F)_y} = \varprojlim_n H^q(F_y, F/\mathfrak{m}_y^n F)$$

Nous allons en signaler seulement la conséquence suivante :

PROPOSITION 1. - <u>Soient</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>un morphisme propre</u>, F <u>un faisceau sur</u> X <u>cohérent et</u> Y-<u>plat</u>. <u>Soit</u> $y \in Y$, <u>soit</u> q <u>un entier, et supposons que</u> $H^q(X_y, F_y) = 0$. <u>Alors</u> $R^q f_*(F)$ <u>est nul au voisinage de</u> y, <u>et pour tout</u> n, <u>l'homomorphisme naturel</u> $R^{q-1} f_*(F)_y \longrightarrow H^{q-1}(X_y, F_y/\mathfrak{m}_y^n F_y)$ <u>est surjectif</u>.

En particulier, si f est un morphisme plat (i. e. O_X est Y-plat) alors tout faisceau cohérent localement libre F sur X est Y-plat. Soient F, G deux tels faisceaux, appliquons la proposition 1 à $\underline{Hom}_{O_X}(F, G)$ et à $q = 1$, on trouve :

THÉORÈME 7. - <u>Soit</u> f <u>un morphisme propre et plat, soient</u> F, G <u>deux faisceaux cohérents localement libres sur</u> X, <u>soit</u> $y \in Y$ <u>et supposons que</u> $H^1(X_y, \underline{Hom}_{O_X}(F_y, G_y)) = 0$, <u>alors tout homomorphisme</u> $u_o : F_y \longrightarrow G_y$ <u>est induit par un homomorphisme</u> u ; $F|V \longrightarrow G|V$, où $V = f^{-1}(U)$ <u>est l'image inverse d'un voisinage</u> U <u>de</u> y.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> u_o <u>est un isomorphisme</u> (resp. un monomorphisme, un épimorphisme) <u>alors il en est de même de</u> u, <u>pour</u> U <u>assez petit</u>.

En particulier :

COROLLAIRE 2. - Soit E_o un faisceau cohérent localement libre sur X_y tel que $H^1(X_y\ ;\ \underset{\sim}{Hom}_{O_X}(E_o\ ,\ E_o)) = 0$, alors deux faisceaux localement libres dont des restrictions à X_y sont isomorphes à E_o , sont isomorphes dans un voisinage de X_y.

Ainsi :

COROLLAIRE 3. - Supposons $H^1(X_y\ ,\ O_{X_y}) = 0$. Alors deux faisceaux inversibles sur X (i. e. localement isomorphes à O_X) dont les restrictions à X_y sont isomorphes, sont isomorphes.

On en déduit :

PROPOSITION 2. - Soient Y un schéma connexe, E un faisceau cohérent localement libre sur Y , considérons le fibré en espaces projectifs $X = P(E)$ associé à E , muni de son faisceau inversible bien connu $O_X(1)$. Alors tout faisceau inversible L sur X est isomorphe à un faisceau de la forme $f^*(L') \otimes O_X(n)$, où L' est un faisceau inversible sur Y et n un entier. Ce dernier est déterminé de façon unique, et L' est déterminé à un isomorphisme près.

La corollaire 3 précédent prouve que L est isomorphe à un $O_X(n)$ au voisinage de chaque fibre. Le reste est à peu près formel.

La proposition 2 permet de déterminer les Y-morphismes de $X = P(E)$ dans un autre fibré projectif. On trouve en particulier :

COROLLAIRE. - Soit u un automorphisme de $X = P(E)$. Alors il existe un faisceau inversible L' sur Y et un isomorphisme v de E sur $E \otimes L'$ tel que u soit l'isomorphisme correspondant $P(E) \xrightarrow{\sim} P(E \otimes L') = P(E)$; le couple (v , L') est déterminé à un isomorphisme près.

Soit Γ l'ensemble des classes de fibrés inversibles L' sur Y tels que $E \otimes L'$ soit isomorphe à E. Les éléments sont de torsion, car si n est le rang de E , on voit (en prenant les puissances extérieures n-ièmes) que l'on doit avoir $L'^{\otimes n} \simeq O_Y$. Le corollaire peut alors s'exprimer en disant qu'on a une suite exacte de groupes.

$$e \longrightarrow \mathrm{Aut}(E)/\Gamma\ (Y\ ,\ O_Y^*) \longrightarrow \mathrm{Aut}_Y(X) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow e$$

(d'ailleurs déduite de la suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte suivante de faisceaux de groupes

$$e \longrightarrow O_X^* \longrightarrow \underset{\sim}{Aut}(E) \longrightarrow \underset{\sim}{Aut}_Y(X) \longrightarrow e$$

où O_X^* est le faisceau des "unités" de O_X, identifié au centre de $\underset{\sim}{Aut}(E)$) .

6. Application à des théorèmes d'existence et d'unicité pour des faisceaux et schémas sur un anneau J-adique complet.

Le théorème 7 donnait un résultat d'unicité sur des faisceaux cohérents localement libres, en utilisant les théorèmes 1 et 2. Utilisant le théorème 3, nous déduisons maintenant des théorèmes d'existence de faisceaux, de morphismes de schémas, ou de schémas. Dans la suite, A désigne un anneau noethérien local, séparé et complet. La méthode générale consiste toujours à faire des constructions formelles, ce qui consiste essentiellement à faire de la géométrie algébrique sur un anneau artinien, et à en tirer des conclusions de nature "algébrique" en utilisant les trois théorèmes fondamentaux.

PROPOSITION 3. - Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel propre et plat au-dessus de A, soit F_0 un faisceau localement libre sur X_0 tel que $H^2(X_0, \underset{\sim}{Hom}_{O_{X_0}}(F_0, F_0)) = 0$. Alors il existe un faisceau localement libre F sur $\mathfrak{X}$ qui induit sur X_0 un faisceau isomorphe à F_0. (Cet F est d'ailleurs unique à un isomorphisme près si $H^1(X_0, \underset{\sim}{Hom}_{O_{X_0}}(F_0, F_0)) = 0$) .

On construit de proche en proche des faisceaux localement libres F_n sur les X_n, s'induisant l'un l'autre. La construction de F_n rencontre une obstruction dans $H^2(X_0, \underset{\sim}{Hom}_{O_{X_0}}(F_0, F_0)) \otimes_{A/J} (J^n/J^{n+1})$, qui est donc nulle par hypothèse. Utilisant maintenant le théorème 3, on trouve :

COROLLAIRE 1. - Soit X un schéma propre et plat au-dessus de A, et soit F_0 comme ci-dessus. Alors il existe un faisceau localement libre F sur X induisant sur X_0 un faisceau isomorphe à F_0. Cet F d'ailleurs unique à un isomorphisme près si $H^1(X_0, \underset{\sim}{Hom}_{O_{X_0}}(F_0, F_0)) = 0$.

Soit X_0 un schéma de type fini sur le corps k, on suppose X_0 simple (par quoi nous entendons absolument simple) sur k, mais pas nécessairement propre sur k. Soit A un anneau artinien local de corps résiduel k. Nous nous intéressons à trouver les schémas X plats sur A, tels que $X \otimes_A k = X_0$ (c'est le point de départ de la "théorie des modules" ou des "variations de structure" de X_o). Il revient au même de se donner un tel X, ou sur l'espace topologique X_o un faisceau O_X muni des structures suivantes :

i. C'est un faisceau de A-algèbres.

ii. Il est muni d'un homomorphisme d'augmentation $O_X \longrightarrow O_{X_o}$ (compatible avec les structures de A-algèbres); ces données étant assujetties aux conditions suivantes : l'augmentation induit un isomorphisme $O_X \otimes_A k \xrightarrow{\sim} O_{X_o}$; O_X est plat sur A, i. e. le gradué associé à O_X filtré par les puissances de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A est isomorphe à $\mathrm{gr}^o(O_X) \otimes_k \mathrm{gr}(A)$, i. e. on a des isomorphismes $\mathfrak{m}^n O_X/\mathfrak{m}^{n+1} O_X = O_{X_o} \otimes_k (\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1})$. Le fait fondamental est le suivant :

THÉORÈME 8. - Soit X_o un schéma de type fini et simple sur le corps k, supposons X_o affine. Soit A un anneau local artinien de corps résiduel k, alors il existe un A-schéma X plat sur A tel que $X \otimes_A k = X_o$, et deux tels schémas sont nécessairement isomorphes.

Notons que l'isomorphisme en question n'est pas canonique, car X aura en général des A-automorphismes non triviaux induisant l'identité sur X_o. D'autre part, il n'y a pas en général de choix "canonique" d'un X satisfaisant les conditions données, sauf dans le cas ou A est une k-algèbre, (cas d'égales caractéristiques) où on peut prendre $X = X_o \otimes_k A$, i. e. $O_X = O_{X_o} \otimes_k A$ (que X_o soit affine ou non d'ailleurs). Dans le cas d'inégales caractéristiques, j'ignore en général, quand X_o n'est pas affine, si on peut "remonter" X_o en un X défini sur X. Cependant, soit n un entier > 0, posons $A_{n-1} = A/\mathfrak{m}^n$, et supposons qu'on ait remonté X_o en un A_{n-1}-schéma plat X_{n-1}, on se propose de remonter X_{n-1} en un A_n-schéma plat X_n. On sait déjà en vertu du théorème 8 que c'est possible localement, d'autre part on vérifie facilement que, si U_n remonte un ouvert U_{n-1} de X_{n-1}, alors le faisceau des groupes d'automorphismes de U_n (induisant l'identité sur U_{n-1}) est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{G}_{X_o/k} \otimes_k \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ restreint à U_{n-1}, et en particulier est commutatif ($\mathfrak{G}_{X_o/k}$ désignant le faisceau des germes de k-dérivations sur X_o). Il s'ensuit facilement que l'on a une obstruction à construire X_n remontant X_{n-1}, qui se trouve dans $H^2(X_o, \mathfrak{G}_{X_o/k}) \otimes \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$. Par suite :

COROLLAIRE 1. - Soit X_o un schéma de type fini simple sur k, supposons

$H^2(X_o, \mathfrak{G}_{X_o/k}) = 0$. Alors pour tout anneau local artinien A de corps résiduel k il existe un A-schéma plat X tel que $X \otimes_A k = X_o$.

D'ailleurs, si on a pu trouver un X plat sur A remontant X_o , alors en vertu du théorème 8, l'ensemble des classes (à un isomorphisme près) de A-schémas plats qui remontent X_o s'identifie à $H^1(X_o, \underset{\sim}{Aut}(X))$, où bien entendu $\underset{\sim}{Aut}(X)$ désigne le faisceau des germes d'automorphismes du faisceau de A-algèbres O_X compatibles avec l'augmentation. La filtration de O_X définit une filtration de $\underset{\sim}{Aut}(X)$, le quotient de ce faisceau par le n-ième sous-groupe de la filtration étant $\underset{\sim}{Aut}(X_n)$; le gradué associé à cette filtration est commutatif, et s'identifie à $\mathfrak{G}_{X_o/k} \otimes_k gr(A)$. En particulier, si $\mathfrak{m}^{n+1}$ est la première puissance de $\mathfrak{m}$ qui est nulle, alors $F^n(\underset{\sim}{Aut}(X))$ (le dernier cran de la filtration) est dans le centre de $\underset{\sim}{Aut}(X)$ et isomorphe à $\mathfrak{G}_{X_o/k} \otimes_k \mathfrak{m}^n$; c'est aussi le faisceau des germes d'automorphismes de X qui induisent l'identité sur $X_{n-1} = X \otimes_A A/\mathfrak{m}^n$. Utilisant ces résultats, on obtient aussitôt les énoncés suivants :

COROLLAIRE 2. - Soit X_o un schéma de type fini simple sur k , soit A un anneau local artinien de corps résiduel k et d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, on suppose $\mathfrak{m}^{n+1} = 0$, soit $A_{n-1} = A/\mathfrak{m}^n$, et enfin soit X_{n-1} un A_{n-1}-schéma plat tel que $X_{n-1} \otimes_A k = X_o$. Alors l'ensemble des classes (à un isomorphisme près induisant l'identité sur X_{n-1}) de A-schémas plats X_n tels que $X \otimes_A A_{n-1} = X_{n-1}$ est vide, ou est un espace principal homogène sous $H^1(X_o, \mathfrak{G}_{X_o/k}) \otimes_k \mathfrak{m}^n$.

(Noter que en général, il n'y a pas d'élément origine privilégié dans de dernier espace, car il n'y a pas de façon privilégiée de remonter X_{n-1} en X_n) .

COROLLAIRE 3. - Soit X_o un schéma de type fini simple sur k , et supposons $H^1(X_o, \mathfrak{G}_{X_o/k}) = 0$. Alors pour tout anneau local artinien A de corps résiduel k , il existe au plus (à un isomorphisme près) un A-schéma plat X tel que $X \otimes_A k = X_o$.

Les corollaires 1 et 3 impliquent immédiatement les énoncés, en apparence plus généraux, obtenus en y supposant seulement que A est un anneau local noethérien complet de corps résiduel k , pourvu qu'on y introduise X comme un schéma formel sur A :

THÉORÈME 9. - Soient k un corps, X_o un schéma de type fini simple sur k , Pour tout anneau local noethérien complet A de corps résiduel k , soit $F(A)$ l'ensemble des classes (à un isomorphisme près induisant l'identité sur X_o)

de schémas formels $\mathfrak{X}$ sur A, de type fini et plats sur A, tels que $X \otimes_A k = X_o$. Avec ces notations :

i. Si $H^1(X_o, \mathfrak{G}_{X_o/k}) = 0$, alors pour tout A, $F(A)$ a au plus un élément.

ii. Si $H^2(X_o, \mathfrak{G}_{X_o/k}) = 0$, alors pour tout A, $F(A)$ a au moins un élément.

COROLLAIRE 1. - Supposons X_o propre sur k. Sous la condition (i), pour tout A, il existe au plus (à un isomorphisme près induisant l'identité sur X_o) un schéma X propre et plat sur A, tel que $X \otimes_A k = X_o$.

On utilise le théorème 3, corollaire 2. Par exemple :

COROLLAIRE 2. - Si X est un schéma propre et plat sur A tel que $X \otimes_A k$ soit isomorphe au schéma projectif type $\mathfrak{P}_k^r$ de dimension r sur k, alors X est isomorphe à $\mathfrak{P}_A^r$.

(On peut aussi déduire ce résultat de la proposition 3, corollaire 1).

COROLLAIRE 3. - Soit X_o un schéma simple et projectif sur k, supposons que l'on ait

$$H^2(X_o, O_{X_o}) = H^2(X_o, \mathfrak{G}_{X_o/k}) = 0 .$$

Alors pour tout A, il existe un schéma projectif et plat X sur A, tel que $X \otimes_A k = X_o$.

On conjugue le théorème 9(ii) et le théorème 4. En particulier :

COROLLAIRE 4. - Soit X_o le schéma d'une courbe algébrique complète et simple sur k. Alors pour tout anneau local noethérien complet A de corps résiduel k, il existe un "schéma de courbe simple" X sur A, tel que $X \otimes_A k = X_o$.

REMARQUES.

1) Les corollaires 3 et 4 sont surtout intéressants si k est de caractéristique $p \neq 0$, en prenant pour A un anneau de valuation discrète de caractéristique 0, de corps résiduel k ; par exemple le "plus petit A possible", savoir celui pour lequel p engendre l'idéal maximal. (En fait, à cause des théorèmes de Cohen, il suffit de connaître les corollaires 3 et 4 pour un tel anneau A). Signalons à ce propos que, selon les spécialistes, on ne sait pas s'il existe des schémas sur un corps k qui ne sont pas réduction mod p d'un schéma plat défini sur un tel anneau A. Du moins les résultats de ce numéro donnent-ils un moyen d'investigation systématique de cette question. Il faudrait commencer

par regarder si la première obstruction qu'on a dans $H^2(X_o, \mathcal{G}_{X_o/k})$ est nécessairement nulle.

2) On notera que le théorème 3 , et la technique correspondante, n'est valable que pour un anneau de base (local pour fixer les idées) complet.

Pour passer de résultats connus pour le complété d'un anneau local à des résultats correspondants pour cet anneau local lui-même, il faudrait un quatrième "théorème fondamental", dont l'énoncé définitif reste à trouver.

3) On comparera les résultats de ce numéro (notamment les corollaires 1 et 2 précédents) et du suivant, avec les résultats de Kodaira-Spencer sur la variation des structures complexes. Utilisant le théorème conjectural auquel il vient d'être fait allusion, on devrait pouvoir conclure, sous les conditions du corollaire 1, mais où A ne serait plus supposé complet, qu'il existe un anneau A' contenant A , fini et non ramifié sur A , tel que $X \otimes_A A'$ et $X' \otimes_A A'$ soient A'-isomorphes, (X , X' étant deux A-schémas propres et plats donnés, tels que $X \otimes_A k = X' \otimes_A k = X_o$) . C'est ce qu'on peut prouver du moins quand $X_o = \mathcal{P}_k^r$, en utilisant le corollaire à la proposition 2 . En tout cas, lorsque $H^1(X_o, \mathcal{G}_{X_o/k})=0$, on peut prouver que les fibres de X , X' au-dessus de tout point y de $Y = \mathrm{Spec}(A)$ sont isomorphes, du moins quand on passe à la clôture algébrique du corps résiduel $\kappa(y)$. (On a un résultat local, plus fort en apparence, en ne supposant plus nécessairement A local). En ce qui concerne les "variations de structure" pour l'espace projectif, signalons encore la question suivante, suggérée par un problème correspondant de Kodaira-Spencer. Soit X un schéma propre et plat au-dessus de l'anneau local intègre A de corps des fractions K , de corps résiduel k , supposons que $X \otimes_A K$ soit isomorphe à $\mathcal{P}_K^r$, est-il vrai que $X \otimes_A k = X_o$ est isomorphe à $\mathcal{P}_k^r$ (du moins sur la clôture algébrique de k) ? Dans ce problème, on peut supposer que A est un anneau de valuation discrète complet. On a un problème analogue quand X_o est une variété abélienne.

7. Application à la "Théorie des modules".

Le conférencier venant seulement lui-même d'aborder cette théorie, nous serons obligés de nous limiter à quelques indications. Pour simplifier, nous nous plaçons sur un corps k , i. e. nous travaillons en égale caractéristique, bien que le théorème 8 permette aussi de traiter le cas général, sans changement essentiel, semble-t-il. Nous n'avons pas dépassé actuellement le stade "formel", cependant le conférencier espère pouvoir construire à partir de là des schémas de modules véritables dans certains cas, et en particulier construire pour tout entier g un schéma sur les entiers, jouant le rôle d'un schéma des modules universel pour les courbes simples de genre g.

Reprenons la situation et les notations du théorème 9, en supposant maintenant que A est une algèbre locale de rang fini sur k, supposé algébriquement clos pour simplifier. Alors $F(A)$ peut être regardé comme un foncteur covariant de A, à valeurs dans la catégorie des ensembles, un homomorphisme de k-algèbres $A \longrightarrow B$ définissant une application $F(A) \longrightarrow F(B)$, puisque tout A-schéma plat X tel que $X \otimes_A k = X_o$ donne naissance à un B-schéma $X \otimes_A B$ ayant les mêmes propriétés. Supposons qu'on puisse trouver une k-algèbre locale complète noethérienne $\mathcal{O}$, et un isomorphisme fonctoriel

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, A) \xrightarrow{\sim} F(A)$$

(où le premier membre désigne les homomorphismes de k-algèbres). On voit facilement qu'un tel $\mathcal{O}$ est déterminé à un isomorphisme canonique près, on appelle alors le spectre formel $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{O}$ (i. e. l'espace topologique réduit à un point muni d'un faisceau d'anneaux topologiques réduit à $\mathcal{O}$) le schéma formel des modules pour X_o. (Notons qu'il n'existe pas nécessairement). Soit $\mathfrak{r}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$, pour tout n soit $O_n = \mathcal{O}/\mathfrak{r}^{n+1}$ (donc $O_o = k$), alors l'homomorphisme canonique $\mathcal{O} \longrightarrow O_n$ est un élément de $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, O_n)$, donc définit un élément de $F(O_n)$, i. e. un O_n-schéma plat X_n dont la réduction mod $\mathfrak{r}$ est X_o. Ces X_n se déduisent les uns des autres par extension des scalaires (i. e. ici par réductions), d'où résulte qu'ils proviennent d'un schéma formel $\mathcal{X}$ bien déterminé sur le schéma formel des modules $\mathcal{Y}$; $\mathcal{X}$ est plat sur $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}_o = X_o$. L'isomorphisme (*) est alors donné, comme on voit aussitôt, en associant à tout homomorphisme de k-algèbres $\mathcal{O} \longrightarrow A$ la classe du A-schéma $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}} A$ (i. e. à tout morphisme de k-schémas $\mathcal{Y}' = \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathcal{Y}$, on associe le $\mathcal{Y}'$-schéma $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{Y}} \mathcal{Y}'$ obtenu par changement de base). De plus, on voit que l'isomorphisme (*) et sa description précédente seront valables encore si on suppose seulement que A est une k-algèbre locale noethérienne et complète (pas nécessairement artinienne). Bien entendu, comme d'habitude, $\mathcal{O}$ peut fort bien à priori avoir des éléments nilpotents, et il semble probable qu'il doive exister des cas où $\mathcal{O}$ est lui-même artinien, sans être identique à k. C'est dire à quel point le point de vue de Kodaira-Spencer (se bornant à prendre des A qui sont des anneaux réguliers) est inadéquat a priori dans le cas général.

Il reste à donner des conditions suffisantes pour qu'il existe un schéma formel des modules pour X_0, supposé propre sur k, .De façon générale, il est facile de donner des conditions nécessaires et suffisantes simples sur un foncteur $A \longrightarrow F(A)$ (de k-algèbres locales de rang fini, à valeurs dans les ensembles) pour qu'il puisse se mettre sous la forme $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, A)$ pour $\mathcal{O}$ convenable. Nous ne les détaillerons pas ici. Signalons seulement que dans le cas qui nous occupe, ces conditions imposent des conditions non triviales de nature cohomologique sur X_0, et il semble peu probable qu'elles soient toujours vérifiées, bien que le conférencier n'ait pas construit de contre-exemple. Il semble plausible par contre que la condition $H^0(X_0, \mathcal{G}_{X_0/k}) = 0$ soit une condition <u>suffisante</u> (bien que nullement nécessaire) pour l'existence d'un schéma formel de modules. Nous nous bornons à énoncer ici un théorème dans un cas particulièrement simple (dont l'analogue en théorie des espaces analytiques est bien connu, cf. KODAIRA-SPENCER), qui s'établit sans difficulté à l'aide des résultats du numéro précédent :

THÉORÈME 10. - <u>Soit</u> X_0 <u>un schéma propre et simple sur le corps</u> k, <u>tel que</u>

$$H^0(X_0, \mathcal{G}_{X_0/k}) = H^2(X_0, \mathcal{G}_{X_0/k}) = 0$$

<u>Alors il existe un schéma formel des modules pour</u> X_0, <u>correspondant à un anneau local régulier</u> $\mathcal{O}$ (i. e. une algèbre de séries formelles sur k) .

Comme nous l'avons déjà signalé, il n'est pas vrai en général que le schéma formel $\mathfrak{X}$ sur $\mathcal{O}$ soit algébrisable ; mais on sait que c'est vrai cependant quand X_0 est projectif et $H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = 0$ (théorème 4) , par exemple quand X_0 est de dimension 1. C'est ce qui donne quelque support à l'espoir de construire un schéma de modules sur les entiers pour les courbes de genre donné ...

Remarquons aussi que des méthodes comme celles exposées dans ce numéro peuvent s'appliquer dans la construction et l'étude des variétés de Picard, et bien d'autres constructions encore. Nous y reviendrons prochainement.

8. <u>Application au groupe fondamental.</u>

Les techniques exposées permettent d'aborder l'étude systématique du groupe fondamental, sur le modèle de la théorie topologique. Les deux premiers théorèmes énoncés dans ce numéro sont des généralisations de résultats d'un travail récent de LANG-SERRE.

Soit X un schéma, alors un X-schéma X' est appelé un <u>revêtement non ramifié</u>

de X si

i. X' est fini sur X, i. e. est défini par un faisceau cohérent d'algèbres $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}(X')$ sur X

ii. $\underset{\sim}{A}$ est un faisceau localement libre sur X

iii. Pour tout $x \in X$, le quotient $\underset{\sim}{A}_x / \mathfrak{m}_x \underset{\sim}{A}_x = \underset{\sim}{A}_x \otimes_{O_x} \mathcal{K}(x)$ est une algèbre séparable sur $\mathcal{K}(x)$.

Cette notion de revêtement non ramifié (due à SERRE et au conférencier) possède toutes les propriétés élémentaires auxquelles on peut s'attendre raisonnablement, et dont nous ne dresserons pas la liste. Bornons-nous à dire qu'elle donne lieu à une théorie de Galois calquée sur la théorie de Galois classique (et la contenant ; les démonstrations étant plûtot plus simples que les démonstrations généralement reçues pour cette dernière) et la théorie galoisienne des revêtements topologiques. De façon précise, appelons point géométrique d'un schéma X un morphisme a du spectre ξ d'un corps algébriquement clos Ω dans X, i. e. la donnée d'une extension algébriquement close du corps résiduel $\mathcal{K}(x)$ d'un point $x = |a|$ de X (appelé localité du point géométrique a). Si alors X' est un revêtement non ramifié de X, on peut lui associer l'ensemble $E_a(X')$ des "points géométriques de X' au-dessus de a", i. e. l'ensemble des couples formés d'un $x' \in X'$ au-dessus de x et d'un $\mathcal{K}(x)$-homomorphisme dans Ω. On obtient ainsi (pour (X, a) fixés) un foncteur $F(X, a)$ de la catégorie $R(X)$ des revêtements non ramifiés X' de X dans la catégorie des ensembles finis. Si X est connexe, le couple formé par $R(X)$ et $F(X, a)$ possède les propriétés formelles qu'il faut pour être isomorphe au couple analogue défini par un groupe topologique compact totalement discontinu π (i. e. limite projective de groupes finis) convenable : on prend la catégorie $C(\pi)$ des ensembles finis E sur lesquels π opère continûment, et le foncteur identique $F(\pi)(E) = E$ de cette catégorie dans la catégorie des ensembles finis. D'ailleurs le groupe π est déterminé à un isomorphisme canonique près par la condition que $(C(\pi), F(\pi))$ soit isomorphe à un couple donné. En l'occurence, π s'appelle le groupe fondamental du schéma connexe X en le point géométrique a, et se désigne par $\pi_1(X, a)$. Si X n'est pas connexe, on le remplace par la composante connexe de $x = |a|$. Si cependant X est connexe, alors les groupes $\pi_1(X, a)$ pour deux points géométriques a', a'' de X sont isomorphes (l'isomorphisme étant déterminé à des automorphismes intérieurs près), de sorte que comme d'habitude on peut choisir a au mieux de son intérêt, par exemple au point générique de

X supposé irréductible. Bien entendu, $\pi_1(X , a)$ est un *foncteur covariant en le schéma pointé* (X , a). Tout énoncé concernant la classification de revêtements inséparables peut se traduire alors en langage de théorie des groupes, suivant le dictionnaire bien connu (à cela près qu'il faut tenir compte du fait qu'ici on a des *groupes topologiques*).

Notre but est de développer l'analogue de la suite exacte d'homotopie des espaces fibres, relativement à un morphisme propre $f : X \longrightarrow Y$. Evidemment, faute de savoir ce que sont les groupes d'homotopie supérieurs, on n'aura que des résultats nécessairement incomplets. Pour pouvoir appliquer les théorèmes fondamentaux du n°3, nous devons d'abord expliciter quelques lemmes élémentaires concernant les schémas sur des corps ou des anneaux d'Artin (conformément au procédé général !).

LEMME 1. - *Soit* (X' , a') *un revêtement non ramifié ponctué associé à une représentation ponctuée de* $\pi_1(X , a)$ *dans un ensemble fini* E (muni du point marqué e). *Alors le morphisme canonique* $\pi_1(X' , a') \longrightarrow \pi_1(X , a)$ *identifie le premier groupe au stabilisateur de* e *dans* $\pi_1(X , a)$ (et est par suite *injectif*).

LEMME 2. - *Soit* X *un schéma algébrique sur le corps* k, k' *une extension radicielle de* k, *alors tout revêtement non ramifié de* $X \otimes_k k'$ *provient par image réciproque* (i. e. extension des scalaires) *d'un revêtement non ramifié de* X, *déterminé à un isomorphisme canonique près*.

Il résulte en particulier de ces deux lemmes que pour *toute* extension algébrique K de k, et tout point géométrique a' de $X' = X \otimes_k K$ se projetant sur le point géométrique a de X, l'homomorphisme fonctoriel $\pi_1(X' , a') \rightarrow \pi_1(X , a)$ est injectif.

LEMME 3. - *Soit* Z *un schéma complet au-dessus d'un anneau local artinien* A, *tel que* $H^0(X , \mathcal{O}_X) = A$, *soit* X' *un revêtement non ramifié de* X *et soit* $A' = H^0(X' , \mathcal{O}_{X'})$, *qui est donc un anneau fini sur* A (pouvant a priori être ramifié sur A). *Soient* X_0, X'_0 *les sous-schémas réduits associés à* X, X' (obtenus en divisant par les faisceaux des éléments nilpotents dans $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_{X'}$), *soit* k *un sous-corps de* $A/\mathfrak{r}(A)$ *sur lequel* $A/\mathfrak{r}(A)$ soit fini (ainsi X_0 est un schéma algébrique complet sur k, et X'_0 en est un revêtement non ramifié). *Soit enfin* Ω *une extension algébriquement close de* k, *et considérons le revêtement non ramifié* $X'_0 \otimes_k \Omega$ de $X_0 \otimes_k \Omega$. *Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

i. $X'_o \otimes_k \Omega$ est complètement décomposé sur $X_o \otimes_k \Omega$.

ii. Le morphisme naturel $X' \longrightarrow X \otimes_A A'$ est un isomorphisme.

Sous ces conditions, A' est une extension non ramifiée de A . Enfin, si X' est connexe, la condition (i) équivaut à la condition suivante plus faible en apparence :

i. bis $X'_o \otimes_k \Omega$ admet une section régulière au-dessus de $X_o \otimes_k \Omega$.

Lorsque la condition (ii) est vérifiée, nous dirons que le revêtement non ramifié X' de X est géométriquement trivial.

LEMME 4. - Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre tel que $f_*(O_X) = O_Y$. Soient a un point géométrique de X , b sa projection sur Y . Alors $\pi_1(X , a) \longrightarrow \pi_1(Y , b)$ est surjectif.

Il faut montrer en effet ceci : si un revêtement non ramifié Y' de Y , (correspondant à un faisceau d'algèbres localement libre $\underset{\sim}{A}$) est tel que $X \otimes_Y Y'$ est disconnexe, alors Y' l'est aussi. En effet $f_*(\underset{\sim}{A})$ sera somme directe de deux faisceaux d'anneaux non nuls, donc son image directe aussi, or cette dernière n'est autre que $\underset{\sim}{A} \otimes f_*(O_X) = \underset{\sim}{A}$.

LEMME 5. - Soit X un schéma complet au-dessus d'un corps k , on suppose que $H^o(X , O_X)$ est un anneau local A et que $A/\mathfrak{r}(A)$ est radiciel sur k . Soit Ω une clôture algébrique de k , et soit $\bar{X} = X \otimes_k \Omega$ (il est connexe). Choisissons un point géométrique $\bar{a}$ de $\bar{X}$, se projetant sur le point géométrique a de X , alors on a une suite exacte

$$e \longrightarrow \pi_1(\bar{X} , \bar{a}) \longrightarrow \pi_1(X , a) \longrightarrow \pi_1(k , b) \longrightarrow e$$

(où $\pi_1(k , b)$ est le groupe de Galois de Ω sur k) .

Le fait que le premier homomorphisme est injectif a été vu avec les lemmes 1 et 2 , l'exactitude au milieu résulte du lemme 3 , enfin la surjectivité du dernier homomorphisme (qui seul fait appel au fait que $A/\mathfrak{r}(A)$ soit radiciel) résulte du lemme 4 .

PROPOSITION 4. - Soit $f : X \longrightarrow X$ un morphisme propre et plat tel que pour tout $y \in Y$, $H^o(f^{-1}(y) , O_{f^{-1}(y)})$ soit une algèbre séparable sur le corps résiduel $\chi(y)$ (ce qui est le cas par exemple si $f^{-1}(y)$ est un schéma séparable sur $\chi(y)$, i. e. réduit et tel que les corps correspondants à ces composantes irréductibles soient des extensions séparables de $\chi(y)$) . Alors le revêtement

Y' <u>de</u> Y <u>associé à</u> $f_*(O_X)$ est non ramifié.

La démonstration est facile grâce au théorème 2 .

Cette proposition, jointe au lemme 1 , ramène pratiquement l'étude homotopique des morphismes propres et plats (à fibres séparables) au cas où on a $f_*(O_X) = O_Y$ (car utilisant la factorisation de Stein, on remplacera Y par Y') .

REMARQUE. - Un morphisme plat de type fini dont les fibres sont des schémas séparables (resp. simples) est appelé <u>séparable</u> (resp. simple). On montre que si f est plat et si $f^{-1}(y)$ est séparable (resp. simple) alors il existe un voisinage de $f^{-1}(y)$ sur lequel f est séparable (resp. simple). Le même résultat est valable pour "absolument normal" ("<u>théorème de Bertini</u>").

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre tel que

(i) $$f_*(O_X) = O_Y$$

et soit X' un schéma fini sur X . Soit Y' le revêtement de Y correspondant à la factorisation de Stein de $X' \longrightarrow Y$ (cf théorème 5) . Soit $y \in Y$, donc l'ensemble des composantes connexes de la fibre F' de X' sur y s'identifie à l'ensemble des points y' de Y' au-dessus de y (théorème 5). Considérons le morphisme évident

(*) $$X' \longrightarrow X \times_Y Y'$$

déduit des morphismes naturels $X' \longrightarrow X$ et $X \longrightarrow Y'$; ce sera un isomorphisme chaque fois que X' est de la forme $X \times_Y Y''$, où Y'' est un revêtement non ramifié de Y , et alors Y' ne sera autre que Y'' et (*) sera l'identité. Nous voulons précisément donner des conditions moyennant lesquelles X' est de la forme qu'on vient d'indiquer, i. e. que Y' est non ramifié et (*) un isomorphisme . Pour ceci, introduisons la fibre F de X en y , c'est un schéma propre sur $\mathcal{K}(y)$ dont F' est un revêtement (non ramifié si X l'est). Soit F'_1 une composante connexe de F' correspondant à un point y'_1 de Y' au-dessus de y . Supposons de plus

(ii) X' est non ramifié sur X aux points de F'_1
(par suite F'_1 est un revêtement non ramifié de F) , et

(iii) F'_1 est un revêtement géométriquement trivial de F (cf. lemme 3)

THÉORÈME 11. - <u>Sous ces conditions, il existe un voisinage ouvert</u> U' <u>de</u> y'_1

dans Y', tel que (*) soit un isomorphisme au-dessus de U'. De plus Y' est non ramifié en y'_1 au-dessus de Y (mais peut être ramifié aux autres points y' de Y' au-dessus de y).

Bien entendu, les conditions (ii) et (iii) sont aussi nécessaires pour la validité de la conclusion du théorème. La démonstration du théorème est facile, à l'aide du lemme 3 et du théorème 2.

COROLLAIRE 1. - Supposons toujours (i) satisfait. Pour qu'un revêtement non ramifié sur X soit isomorphe à l'image réciproque d'un revêtement non ramifié Y' de Y, il faut et il suffit que X' induise sur chaque fibre $f^{-1}(y)$ un revêtement géométriquement trivial.

Comme d'après le théorème 11, l'ensemble des points de Y pour lesquels cette condition est remplie est ouvert, il suffit de la vérifier sur les points y qui sont fermés ... Notons l'énoncé suivant équivalent au corollaire 1 : Le noyau de l'homomorphisme (surjectif d'après le lemme 4) $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ est le sous-groupe invariant fermé engendré par les images dans $\pi_1(X)$ des $\pi_1(\overline{f^{-1}(y)})$, où $\overline{f^{-1}(y)}$ désigne le schéma $f^{-1}(y) \otimes_{k(y)} \overline{\kappa(y)}$, ($\overline{\kappa(y)}$ désignant une clôture algébrique de $\kappa(y)$). On notera que, faute de pouvoir choisir le même point base pour toutes les fibres, les homomorphismes $\pi_1(f^{-1}(y)) \longrightarrow \pi_1(X)$ ne sont de toutes façons déterminés (une fois choisi un point base pour X, et par suite pour Y) que modulo composition par un automorphisme intérieur dans $\pi_1(X)$.

COROLLAIRE 2. - Sous les conditions générales du théorème 11, supposons de plus Y, X, X' intègres, et soient K, L, L' leurs corps. Alors il existe une sous-extension séparable K' de K dans L', linéairement disjointe de L, telle que $L' = LK'$ (d'où $L' = L \otimes_K K'$).

(On applique la dernière partie du lemme 3 à la fibre générique de X). Le cas d'application le plus intéressant du théorème 11 est obtenu quand f est un morphisme séparable. Alors X' est aussi séparable sur Y, donc en vertu de la proposition 4, Y' est non ramifié sur Y, donc le deuxième membre $X \times_Y Y'$ dans (*) est non ramifié sur X. On en conclut facilement :

COROLLAIRE 3. - Supposons, en plus de (i), que f soit séparable. Soit X' un revêtement non ramifié et connexe de X, pour que X soit image inverse d'un revêtement non ramifié Y' de Y, il faut et il suffit que le revêtement $\bar{F}'$ induit sur une fibre géométrique $\bar{F} = f^{-1}(y)$ admette une section régulière.

On notera qu'il n'était pas nécessaire de supposer que $\bar{F}'$ soit géométriquement trivial sur $\bar{F}$ (ce qui sera vrai a posteriori, bien que a priori cette condition soit beaucoup plus forte). Le corollaire 3 est en fait équivalent à l'énoncé suivant :

COROLLAIRE 4. - Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre et séparable tel que $f_*(O_X) = O_Y$, soit $\bar{F}$ la fibre géométrique d'un point $y \in Y$, et choisissons un point géométrique dans $\bar{F}$, d'où par les morphismes $\bar{F} \longrightarrow X \longrightarrow Y$ des points gépmétriques dans X, Y, qui seront pris comme points bases pour les groupes fondamentaux de $\bar{F}$, X, Y. Sous ces conditions on a la suite exacte

$$\boxed{\pi_1(\bar{F}) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow e}$$

On en déduit facilement les deux énoncés suivants de SERRE-LANG, débarassés ici de toute hypothèse de normalité :

COROLLAIRE 5. - Soient X, Y des schémas connexes sur un corps k, on suppose que le schéma réduit $X_{\text{réd}}$ est séparable sur k (ce qui est automatiquement vrai si k est parfait) et complet. Choisissons un point géométrique a (resp. b) dans X (resp. Y) d'où un point géométrique $c = (a, b)$ dans $X \times_k Y$ et un morphisme naturel

$$\pi_1(X \times_k Y, c) \longrightarrow \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$$

(déduits des morphismes fonctoriels de $\pi_1(X \times Y, c)$ dans $\pi_1(X, a)$ et $\pi_1(Y, b)$). Ce morphisme est injectif, et même bijectif si k est algébriquement clos.

(La surjectivité dans ce dernier cas étant à peu près triviale). On en déduit, avec SERRE-LANG :

COROLLAIRE 6. - Soit X un schéma algébrique connexe sur un corps algébriquement clos k, soit K une extension algébriquement close de k, alors les groupes fondamentaux de X et $X \otimes_k K$ sont les mêmes, i. e. tout revêtement non ramifié de ce dernier schéma provient par extension des scalaires d'un revêtement non ramifié (unique à un isomorphisme près) de X.

REMARQUES.

1) Utilisant la proposition 4, on voit que l'hypothèse $f_*(O_X) = O_Y$ dans le corollaire 4 n'est pas essentielle. Dans le cas général, il faut, au lieu de mettre le groupe unité e après $\pi_1(Y)$, continuer par $\pi_0(\bar{F}) \longrightarrow \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y) \longrightarrow e$

comme en Topologie algébrique.

2) En général, on ne peut rien dire pour l'instant sur le noyau de $\pi_1(\bar{F}) \to \pi_1(X)$, qui devrait faire intervenir un $\pi_2(Y)$. Il semble cependant qu'on doive pouvoir démontrer que $\pi_1(\bar{F}) \to \pi_1(X)$ est <u>injectif</u> si Y est le spectre d'un anneau local A, en s'appuyant sur le théorème 12 plus bas (qui affirme qu'il en est ainsi si A est <u>complet</u>).

Le théorème 11 n'utilisait que les théorèmes 1 et 2. Nous allons appliquer maintenant le théorème 3, en nous appuyant sur le lemme élémentaire suivant :

LEMME 6. - <u>Soit</u> X <u>un schéma,</u> X_o <u>le schéma réduit correspondant</u> (i. e. où on a tué les éléments nilpotents). <u>Alors tout revêtement non ramifié</u> X'_o <u>de</u> X_o <u>est induit par un revêtement non ramifié</u> X' <u>de</u> X, <u>déterminé à un isomorphisme canonique près.</u>

Ce lemme, de nature purement locale, joue ici un rôle analogue à celui du théorème 8, en théorie des modules. Le conjuguant avec le théorème d'existence (théorème 3), on en déduit ici :

THÉORÈME 12. - <u>Soit</u> A <u>un anneau local noethérien et complet de corps résiduel</u> k. <u>Soit</u> X <u>un schéma propre sur</u> A. <u>Alors tout revêtement non ramifié</u> X'_o <u>de</u> $X_o = X \otimes_A k$ <u>est induit par un revêtement non ramifié</u> X' <u>de</u> X, <u>unique à un isomorphisme près.</u>

En d'autres termes :

COROLLAIRE 1. - <u>Choisissons un point géométrique dans</u> X_o <u>comme point base pour les groupes fondamentaux de</u> X_o <u>et</u> X. <u>Alors l'homomorphisme canonique</u> $\pi_1(X_o) \to \pi_1(X)$ <u>est un</u> isomorphisme.

Appliquons maintenant à X_o le lemme 5, (en supposant que $H^o(X_o, O_{X_o}) = k$ pour simplifier), et remarquons que A étant complet, ses extensions non ramifiées correspondent aux extensions non ramifiées de son corps résiduel, i. e. on a $\pi_1(Y) = \pi_1(k)$ (où $Y = \mathrm{Spec}(A)$). On trouve la suite exacte :

$$e \to \pi_1(\bar{X}_o) \to \pi_1(X) \to \pi_1(Y) \to e$$

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> $f : X \to Y$ <u>un morphisme propre et plat, soient</u> y_1 <u>un point de</u> Y <u>et</u> y_o <u>une spécialisation de</u> y_1, <u>considérons les fibres "géométriques" correspondantes</u> $\bar{X}_1$ <u>et</u> $\bar{X}_o$, <u>on suppose</u> $\bar{X}_o$ <u>séparable et connexe</u> (ce qui implique que $\bar{X}_1$ satisfait aux mêmes conditions). <u>On peut alors trouver un homomorphisme de groupes</u> $\pi_1(X_1) \to \pi_1(X_o)$, <u>défini à un automorphisme intérieur près, et cet homomorphisme est</u> surjectif.

On pourrait espérer que cet homomorphisme est toujours bijectif, malheureusement il n'en est rien en général si $\mathcal{K}(y_0)$ est de caractéristique > 0. Nous allons obtenir cependant plus bas une majoration du noyau de cet homomorphisme (du moins si $\bar{X}_0$ est simple), impliquant que si $\mathcal{K}(y_0)$ est de caractéristique 0, alors l'homomorphisme ci-dessus est bijectif (résultat qu'on pourrait aussi prouver par voie transcendante). Du moins obtenons-nous déjà, en tous cas, une majoration du π_1 d'une fibre spéciale à l'aide de celui d'une fibre générique. Utilisant par exemple le fait qu'une courbe algébrique en caractéristique p se remonte en une courbe en caractéristique 0 (théorème 9, corollaire 4.) on trouve par voie transcendante :

COROLLAIRE 3. - Soit X_0 le schéma d'une courbe complète simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, soit g le genre de X_0, alors $\pi_1(X_0)$ admet $2g$ générateurs topologiques, liés par la relation bien connue.

On en déduit, par une technique bien connue de sections hyperplanes :

COROLLAIRE 4. - Soit X un schéma projectif simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, alors $\pi_1(X)$ admet un nombre fini de générateurs topologiques.

Cherchons le noyau de l'homomorphisme $\pi_1(\bar{X}_1) \longrightarrow \pi_1(\bar{X}_0)$. Pour ceci, on peut supposer que Y est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet $V = O_Y(y = y_0)$. La question est équivalente à la suivante : étant donné un revêtement non ramifié $\bar{X}'_1$ de $\bar{X}_1$ (qu'on peut si on veut supposer galoisien), déterminer sous quelles conditions il provient d'un revêtement non ramifié de X_0. A priori, le revêtement donné provient, par extension des scalaires, d'un revêtement non ramifié X'_1 de $X_1 \otimes_K K'$, où K' est une sous-extension finie de la clôture algébrique $\bar{K}$ du corps des fractions K de V ; si X'_1 était galoisienne de groupe G, on peut choisir X'_1 galoisienne de groupe G. On a alors : Pour que $X'_1 \otimes_{K'} \bar{K} = \bar{X}'_1$ provienne d'un revêtement non ramifié de X_0, il faut et il suffit que l'on puisse trouver une extension finie K'' de K' dans $\bar{K}$ telle que $X''_1 = X'_1 \otimes_{K'} K''$ soit de la forme $X'' \otimes_{V''} K''$, où V'' est la clôture normale de V dans K'', et où X'' est un revêtement non ramifié de $X \otimes_V V''$. Supposons par exemple X_0 absolument normale, d'où résulte que $X \otimes_V V''$ est normale (car plat sur V'' et à fibre spéciale normale), dont le corps des fonctions est identique à celui $K''(X_1)$ de

$$X_1 \otimes_K K'' = (X \otimes_V K) \otimes_K K'' = X \otimes_V K'' = (X \otimes_V V'') \otimes_{V''} K'' .$$

Soit $L'' = K''(X_1')$ le corps des fonctions de $X_1' \otimes_{K'} K''$, c'est une extension finie séparable de $K''(X_1)$, et la condition ci-dessus signifie aussi que L'' est une extension non ramifiée du corps des fonctions de $X \otimes_V V''$ (i. e. le normalisé de $X \otimes_V V''$ dans L'' est non ramifié sur $X \otimes_V V''$). Il suffit d'ailleurs de vérifier que L'' est non ramifié aux points de la fibre spéciale de $X \otimes_V V''$ (puisqu'il est non ramifié au-dessus de la fibre générique $X_1 \otimes_K K''$). Si maintenant X_o est simple, il résulte du "théorème de pureté" de NAGATA-ZARISKI qu'il suffit même de vérifier que L'' est non ramifié au-dessus de l'anneau local $\mathcal{O}''$ du point générique de la fibre spéciale de $X \otimes_V V''$, qui est un anneau de valuation discrète, normalisé dans $K''(X_1)$ de l'anneau local $\mathcal{O} \subset K(X_1)$ du point générique de la fibre spéciale de X. Donc on a obtenu :

COROLLAIRE 5. - Sous les conditions et avec les notations précédentes, pour que le revêtement non ramifié $X_1' \otimes_{K'} \bar{K}$ de $\bar{X}_1 = X_1 \otimes_K \bar{K}$ provienne d'un revêtement non ramifié de $\bar{X}_o$, il faut et il suffit qu'il existe une sous-extension finie K'' de $\bar{K}/K'$ telle que $K''(X_1')$ soit non ramifié au-dessus de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}'' \subset K''(X_1)$.

Notons maintenant que $\mathcal{O}''$ est normalisé dans $K''(X_1)$ de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}' \subset K'(X_1)$ (normalisé de $\mathcal{O}$ dans $K'(X_1)$), et que $\mathcal{O}'$ contient le normalisé V' de V dans K', une uniformisante u de V' étant aussi une uniformisante de $\mathcal{O}'$. Supposons maintenant X_1' galoisien de groupe de Galois G d'ordre n premier à la caractéristique p de $\mathcal{K}(y_o)$, (qui est aussi la caractéristique du corps résiduel de $\mathcal{O}'$). Donc $K'(X_1')$ est "tamely ramified" au-dessus de $\mathcal{O}'$, d'où il résulte facilement ("lemme de Abhyankar") que si on lui adjoint une racine n-ième v d'une uniformisante de $\mathcal{O}'$, il devient non ramifié au-dessus du normalisé de $\mathcal{O}'$ dans $K'(X_1)(v)$. Or on peut prendre pour v une racine n-ième d'une uniformisante de V', ce qui prouve que la condition du corollaire 5 est satisfaite. (Cette possibilité d'utiliser le lemme de Abhyankar et le théorème de pureté m'a été vendue par SERRE). Pour exprimer le résultat obtenu, introduisons pour tout groupe compact totalement discontinu π le groupe quotient $\bar{\bar{\pi}}$ de π par le sous-groupe fermé engendré par ses p-sous-groupes de Sylow, i. e. la limite projective des groupes quotients discrets de π qui sont d'ordre premier à p. Avec cette notation, on obtient :

THÉORÈME 13. - Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre et plat, soient y_1 un point de Y et y_o une spécialisation de y_1, on suppose $\bar{X}_o$ connexe et simple. Alors l'homomorphisme $\bar{\bar{\pi}}_1(\bar{X}_1) \longrightarrow \bar{\bar{\pi}}_1(\bar{X}_o)$ déduit de l'homomorphisme surjectif du théorème 12, corollaire 2, est un isomorphisme.

En d'autres termes :

COROLLAIRE 1. - La classification des revêtements galoisiens non ramifiés, de groupe de Galois d'ordre premier à la caractéristique p de $\mathcal{K}(y_o)$ est la même pour $\bar{X}_o$ et pour $\bar{X}_1$.

En particulier, si $\mathcal{K}(y_o)$ est caractéristique nulle, on obtient par voie algébrique le fait que $\pi_1(\bar{X}_1) \longrightarrow \pi_1(\bar{X}_o)$ est bijectif.

Signalons enfin que les techniques utilisées donnent aussi le résultat suivant, plus général que le théorème 13 :

THÉORÈME 14. - Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre et simple, soit D un sous-schéma fermé de X, simple au-dessus de Y, de codimension 1 en tous ces points. Pour une fibre $Z = f^{-1}(z)$ de f, soit $Z' = Z - Z \cap D$ et soit $\pi_1^t(\bar{Z}')$ le quotient du groupe fondamental $\pi_1(Z')$ qui classifie les revêtements non ramifiés de $\bar{Z}'$ qui sont "tamely ramified" au-dessus de $\bar{Z} \cap D$. Soient y_o, y_1 comme dans le théorème 13. Alors on a un homomorphisme surjectif (défini à un automorphisme intérieur près) $\pi_1^t(\bar{X}_1') \longrightarrow \pi_1^t(\bar{X}_o')$, et l'homomorphisme correspondant $\bar{\pi}_1^t(\bar{X}_1') \longrightarrow \bar{\pi}_1^t(\bar{X}_o')$ est un isomorphisme.

On en déduit des variantes correspondantes des corollaires au théorème 13, et du corollaire 4 au théorème 12. De même, utilisant le théorème 9, corollaire 3, on trouve par voie transcendante :

COROLLAIRE. - Soit X_o le schéma d'une courbe complète simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, soit $S = (s_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partie finie à n éléments de X_o. Alors $\pi_1^t(X_o - S)$ admet $2g + n$ générateurs topologiques x_i, y_i $(1 \leq i \leq g)$ et σ_j $(1 \leq j \leq n)$ liés par la relation

$$\left(\prod_i x_i\, y_i\, x_i^{-1}\, y_i^{-1}\right) \sigma_1 \ldots \sigma_n = 1$$

où les σ_j sont des générateurs des groupes d'inertie correspondants aux s_j. Pour tout groupe fini G d'ordre premier à la caractéristique, engendré par des éléments $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $\bar{\sigma}_j$ satisfaisant la relation précédente, il existe un revêtement galoisien non ramifié de $X_o - S$, de groupe G, ayant des groupes d'inertie aux points s_j engendrés par les $\bar{\sigma}_j$.

Lorsque X_o est de genre 0 et que $n = 3$, on a une solution du "Problème des trois points", du moins pour les revêtements galoisiens d'ordre premier à la caractéristique. (Ici, le théorème 9 est d'ailleurs inutile, et il semble d'autre part qu'on puisse déduire le corollaire précédent du cas particulier envisagé dans le problème des trois points).

REMARQUES

1) Une étude plus complète, faisant sans doute intervenir des revêtements galoisiens généralisés de X, X_o, X_1 (à groupe de Galois éventuellement infinitésimal), devrait permettre de récupérer le noyau dans le théorème 12, corollaire 2. Par contre, une étude des revêtements admettant de la ramification pas "tame" semble devoir être beaucoup plus difficile.

2) Le lemme 6, joint à un résultat de Grauert concernant le complété formel d'un schéma projectif non singulier le long d'une section hyperplane (ou au théorème, non prouvé pour l'instant, mentionné dans la remarque 2 après le théorème 11), permet aussi de démontrer en géométrie algébrique "abstraite" le classique théorème de Lefschetz sur le groupe fondamental.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIEUDONNÉ (J.) et GROTHENDIECK (A.). - Eléments de géométrie algébrique, Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (à paraître).

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - The cohomology theory of abstract algebraic varieties, International Congress of Mathematicians [1958. Edinburgh] (à paraître).

[3] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Institut Fourier Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 1-42.