ROGER GODEMENT

Introduction aux travaux de A. Selberg

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. nº 144, p. 95-110

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__95_0>

Séminaire BOURBAKI
(février 1957)

INTRODUCTION AUX TRAVAUX DE A. SELBERG

par Roger GODEMENT.

Dans un article récent, A. SELBERG annonce des résultats très importants concernant la théorie des fonctions automorphes d'une ou plusieurs variables. Ces résultats reposent essentiellement sur une extension aux espaces de Riemann symétriques de la transformation de Fourier et de la formule sommatoire de Poisson. On se propose d'exposer ici les méthodes générales qui conduisent à une généralisation aussi complète que possible de la transformation de Fourier dans le cadre des espaces symétriques. On espère pouvoir donner une idée, dans un prochain exposé, des applications arithmétiques de la théorie, lesquelles constituent la principale contribution de SELBERG.

1. Fonctions sphériques.

On considère un groupe localement compact G et un sous-groupe compact K de G ; pour des fonctions (ou mesures, ou distributions) sur G, une expression telle que "invariante à droite" signifiera "invariante par les translations $g \to gk$, $k \in K$ ". Un élément générique de G sera noté g, ou s, ou t ; un élément générique de K sera noté k, ou u, ou v. On suppose, par prudence uniquement ! , que la mesure de Haar de G vérifie $dg = d(g^{-1})$.

Si E est un "espace fonctionnel" sur lequel G opère à droite (resp. à gauche) on notera $\overset{o}{E}$ (resp. ${}^{o}E$) l'ensemble des $x \in E$ invariants par K ; si G opère à droite et à gauche sur E, on aura à distinguer les sous-espaces ${}^{o}E$, E^{o} et ${}^{o}E^{o} = {}^{o}E \cap E^{o} = {}^{o}(E^{o}) = \dots$. Dans tous les cas "raisonnables" on aura des projecteurs canoniques $x \to {}^{o}x$, $x \to x^{o}$, $x \to {}^{o}x^{o}$ de E sur ces sous-espaces, obtenus en intégrant sur K les transformés de x par les éléments de K ; par exemple, s'il s'agit de fonctions continues, on posera

$$(1.1) \qquad {}^{o}f^{o}(g) = \iint_{K\times K} f(ugv)\, du\, dv$$

D'autre part, si F est le dual de E, auquel cas G opère sur F par "transposition", alors le dual de ${}^{o}E^{o}$, par exemple, sera canoniquement isomorphe à ${}^{o}F^{o}$; car une forme linéaire sur ${}^{o}E^{o}$ se prolonge à E (Hahn-Banach) donc définit un $f \in F$; on projette alors f sur ${}^{o}F^{o}$. On laisse bien entendu au lecteur le soin de justifier tout cela du point de vue vectoriel-topologique.

Désignons par L l'espace des fonctions continues à support compact sur G ; on a sur L une multiplication

(1.2) $$f*g(s) = \int f(st^{-1})\, g(t)\, dt \quad ;$$

évidemment ${}^{\circ}L$, L° et ${}^{\circ}L^{\circ}$ sont des sous-algèbres de L ; tout ce qui va suivre repose sur la seule et unique hypothèse que ${}^{\circ}L^{\circ}$ est commutative ; on verra plus loin qu'elle est vérifiée dans le cas des espaces symétriques. Il est immédiat de vérifier qu'alors le produit de composition est encore commutatif lorsqu'il s'agit plus généralement de mesures ou de distributions bi-invariantes. Rappelons en passant que la composée $S*T$ de deux distributions est l'image par $(s,t)\longrightarrow st$ de la distribution produit $S \times T$ sur $G \times G$.

On dit qu'une mesure (ou une distribution) ζ est sphérique si elle est bi-invariante, non nulle, et si l'application

$$f\longrightarrow \zeta(f) = \int f(s)d\zeta(s)$$

est un homomorphisme de l'algèbre ${}^{\circ}L^{\circ}$ dans le corps complexe (pour les distributions il faudrait bien entendu se borner aux f indéfiniment différentiables). On a donc $\zeta(f*g) = \zeta(f)\,\zeta(g)$ pour $f,g \in {}^{\circ}L^{\circ}$; il suffit même que l'on ait $f \in {}^{\circ}L^{\circ}$ et $g \in L$ comme on le voit en utilisant les identités

$${}^{\circ}(f*g)^{\circ} = f*{}^{\circ}g^{\circ} \quad \text{si} \quad f \in {}^{\circ}L^{\circ}$$

$$\zeta(h) = \zeta({}^{\circ}h^{\circ}) \ .$$

Or pour $f,g \in L$ on a, en désignant par ε_s la mesure de Dirac en s , la relation

$$\zeta(f*g) = \int \zeta(f*\varepsilon_s)g(s)ds \quad ;$$

prenant $f \in {}^{\circ}L^{\circ}$ telle que $\zeta(f) \neq 0$ et posant $\zeta(s) = \zeta(f*\varepsilon_s)/\zeta(f)$ on en conclut que

$$\zeta(g) = \int \zeta(s)\, g(s)\, ds \ .$$

Autrement dit, une mesure (resp. distribution) sphérique est nécessairement de la forme $\zeta(s)\, ds$ où $\zeta(s)$ est une fonction continue (resp. analytique) . En ce qui concerne la dernière assertion, le raisonnement précédent (avec f,g différentiables) montre déjà que $\zeta(s)$ est différentiable ; or si ζ est sphérique il est visible d'après ce qui précède que, pour toute fonction f bi-invariante à support compact, $f*\zeta$ est proportionnelle à ζ ; par continuité c'est encore vrai si f est une distribution bi-invariante ; prenant f concentrée à l'origine, on voit que $\zeta(s)$ est fonction propre de tous les opérateurs différentiels qui commutent aux translations $g \longrightarrow sgk$ $(s \in G, k \in K)$; or parmi eux figurent des opérateurs elliptiques (par exemple, le laplacien de G/K), d'où le résultat.

Inversement, les équations différentielles qu'on vient de définir caractérisent les fonctions sphériques ; cela tient essentiellement au fait que, pour la topologie définie par les fonctions analytiques, les distributions de support e sont partout denses dans l'espace de toutes les distributions à support compact (ceci toutefois suppose G connexe, bien entendu).

On remarquera que les opérateurs différentiels considérés, lesquels s'identifient canoniquement aux invariants de K dans l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G, forment une algèbre à engendrement fini (théorème des invariants) ; les fonctions sphériques sont donc caractérisées par un nombre fini d'équations différentielles, qui d'ailleurs commutent deux à deux lorsqu'on les applique à des fonctions bi-invariantes.

On peut naturellement traduire ces propriétés en se plaçant sur l'espace homogème $X = G/K$, sur lequel G opère à gauche, le stabilisateur $K(x)$ de tout $x \in X$ étant un sous-groupe compact de G. Les fonctions sphériques correspondent alors aux fonctions $\zeta(x)$ sur X, qui sont invariantes par les rotations autour d'un point, et qui sont fonctions propres de tous les opérateurs différentiels sur X invariants par G. Si l'on veut une formulation plus intrinsèque, ne faisant pas intervenir de point x particulier, on considère sur $X \times X$ les noyaux $\zeta(x,y)$ qui sont invariants par G, i.e. tels que $\zeta(gx,gy) = \zeta(x,y)$; les noyaux sphériques sont alors caractérisés par les deux propriétés équivalentes que voici :

(i) : Si L est un opérateur différentiel invariant sur X, on a

$$L_x \zeta(x,y) = \hat{L}(\zeta).\ \zeta(x.y)$$

où $\hat{L}(\zeta)$ est une constante ;

(ii) : Pour tout noyau invariant $k(x,y)$, qui est continu et "à support compact" (i.e., tel que la fonction $x \longrightarrow k(x,y)$ soit à support compact pour un y, donc pour tout y), on a une relation

$$\int k(x,y)\zeta(y,z)dy = \hat{k}(\zeta).\ \zeta(x,z)$$

où $\hat{k}(\zeta)$ est une constante, et où dy est une mesure invariante sur X. Bien entendu la propriété (i) suppose G groupe de Lie.

Enfin, on peut aussi caractériser les fonctions sphériques sur G par une équation fonctionnelle, à savoir

$$\int_K \zeta(sut)du = \zeta(s).\ \zeta(t)$$

(on notera que cette équation <u>implique</u> la bi-invariance de ζ) ; la démonstration est triviale.

EXEMPLE. - Prenons pour G le groupe hyperbolique : matrices

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad (a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d \text{ réels, } ad - bc = 1)\ ,$$

pour K le sous-groupe des rotations

$$k = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\ ;$$

G/K est alors de demi-plan de Poincaré $Im(z) > 0$, sur lequel G agit par

$$gz = \frac{az + b}{cz + d}\ ;$$

il y a ici essentiellement un seul opérateur différentiel invariant, à savoir $y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ comme il est bien connu ; et les noyaux invariants ne sont que les fonctions $k(z'\ ,\ z'')$ qui ne dépendent que de la distance hyperbolique de z' à z'' .

Soit alors ζ une fonction sphérique sur le groupe G ; comme elle est bi-invariante il suffit de l'étudier sur le sous-groupe formé des matrices diagonales

$$\delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

et en posant $\lambda = e^{t/2}$ (t paramètre réel) on voit qu'en fait ζ est une fonction de $\operatorname{ch} t$, soit $P(\operatorname{ch} t)$; l'équation fonctionnelle s'écrit alors aussitôt sous la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\operatorname{ch} t.\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} t.\operatorname{sh} u.\cos\theta)\, d\theta = P(\operatorname{ch} t)\quad P(\operatorname{ch} u)\quad ;$$

en écrivant l'équation différentielle correspondante on voit que la solution générale du problème est constituée par les <u>fonctions de Legendre</u>

$$P_\rho(\operatorname{ch} t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t.\cos\theta)^\rho\, d\theta\ ; \tag{1.3}$$

l'équation fonctionnelle précédente est, dans la théorie classique, une conséquence triviale du théorème d'addition des fonctions de Legendre, celui-ci n'étant pas autre chose que le développement de $\zeta(sut)$ en série de Fourier par rapport à u.

Signalons en passant que la formule (1.3) a une interprétation générale. Considérons un groupe de Lie semi-simple connexe G et prenons pour K un sous-groupe compact maximal de G ; on supposera le centre de G fini. Il existe alors (IWASAWA) un sous-groupe résoluble B de G tel que $G = B.K$, $B \cap K = e$. Soit α une représentation de dimension 1 de B ; prolongeons α à G en posant $\alpha(bk) = \alpha(b)$, puis formons la fonction bi-invariante

$$\zeta_\alpha(g) = \int \alpha(kg)\, dk \quad ; \tag{1.4}$$

alors ζ_α est une fonction sphérique, vérification facile, et on obtient ainsi toutes les fonctions sphériques de G/K. Ce théorème, dû à HARISH-CHANDRA, ne peut se démontrer jusqu'à nouvel ordre qu'en étudiant de façon détaillée l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie de G ; on montre essentiellement que les fonctions (1.4) épuisent tous les systèmes de valeurs propres possibles figurant dans les équations différentielles des fonctions sphériques. On ne connait encore, c'est regrettable, aucune démonstration de ce résultat par des méthodes "globales".

Cela étant, la formule (1.4) se réduit à (1.3) dans le cas du groupe hyperbolique ; B est formé des matrices

$$b = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0$$

les représentations sont les fonctions

$$\alpha(b) = \lambda^{-2\rho}$$

et (1.3) s'obtient en explicitant (1.4).

Pour terminer ce numéro, donnons une condition suffisante pour que l'algèbre $°L°$, i.e. l'algèbre des noyaux invariants à support compact sur $X = G/K$, soit commutative. Il suffit pour cela qu'il existe un automorphisme s de l'espace X possédant les propriétés suivantes :

(i) : $s^2 \in G$, $sGs^{-1} = G$;

(ii) : Quels que soient $x, y \in X$ il existe $g \in G$ tel que

$$sx = gy \quad , \quad sy = gx \; .$$

Posant en effet

$$k^s(x,y) = k(sx,sy)$$

pour tout noyau k, et observant que d'après la première condition (i) la mesure dx est invariante par s, on voit que $k \rightarrow k^s$ est un automorphisme pour le produit de composition ; mais vu (ii) et l'invariance de k on a

$$k^s(x,y) = k(y,x) \quad ;$$

donc $k \rightarrow k^s$ est aussi un antiautomorphisme ; d'où le résultat.

2. Fonctions sphériques de type positif.

Etant donnée une fonction f sur G on pose $\tilde{f}(s) = \overline{f(s^{-1})}$; on a $(f*g)^{\sim} = \tilde{g} * \tilde{f}$ dans la mesure où cette relation a un sens. On rappelle qu'une mesure μ sur G est de type positif si $\mu(\tilde{f}*f) \geqslant 0$ pour toute $f \in L$; notion analogue pour les distributions, et a fortiori pour les fonctions.

Soit d'autre part $s \rightarrow U(s)$ une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$; pour toute mesure α à support compact sur G posons $U(\alpha) = \int U(x)\, d\alpha(x)$; on a alors $U(\alpha * \beta) = U(\alpha)\, U(\beta)$ et $U(\tilde{\alpha}) = U(\alpha)^*$; prenant un vecteur $\underline{a} \in \mathcal{H}$ et introduisant la fonction continue

(2.1) $$\varphi(x) = (U(x)\underline{a}\,,\, \underline{a}) \quad ;$$

pour toute $f \in L$ on a alors

$$\int \tilde{f}*f(s)\, \varphi(s)\, ds = (U(f)\underline{a}\,,\, U(f)\underline{a}) \geqslant 0$$

ce qui prouve que φ est de type positif. Inversement, on démontre facilement que toute fonction continue de type positif s'écrit sous la forme (2.1) ; la représentation U est même entièrement déterminée par φ si l'on impose au vecteur $\underline{a}$ d'être un "générateur" (cela signifie que les $U(s)\underline{a}$ engendrent $\mathcal{H}$) ; nous supposerons cette condition réalisée dans ce qui suit.

On a alors les résultats suivants :

(i) La fonction φ est bi-invariante si et seulement si $\underline{a} \in {}^{\circ}\mathcal{H}$, i.e. si $U(k)\underline{a} = \underline{a}$ pour tout $k \in K$;

(ii) La condition (i) étant remplie, pour que φ soit sphérique il faut et il suffit que la représentation U soit irréductible et cette propriété équivaut encore au fait que

$$\dim({}^{\circ}H) = 1 \ .$$

La démonstration de (i) est triviale, celle de (ii) est facile, modulo le fait qu'une représentation irréductible d'une algèbre commutative (en l'espèce

$^{\circ}L^{\circ}$, qui opère de façon évidente sur $^{\circ}H$) est de dimension 1 (lemme de Schur hilbertien).

Du point de vue G/K , les fonctions sphériques de type positif correspondent aux noyaux invariants sphériques qui sont positifs au sens habituel :

$$\iint \zeta(x,y)\, f(x)\, \overline{f(y)}\, dx\, dy \geqslant 0 .$$

On a alors

$$|\zeta(x,y)| \leq \zeta(x,x) = 1 \quad ; \quad \zeta(y,x) = \overline{\zeta(x,y)} . \tag{2.2}$$

Il peut être utile de préciser que, contrairement à ce qui se passe dans les groupes abéliens, les propriétés (2.2) ne suffisent pas à entraîner la positivité de la fonction sphérique ζ : on connaît des contre-exemples pour le groupe de Lorentz déjà (NAIMARK, [2]).

Revenons à G et considérons les fonctions sphériques de type positif ; elles sont continues et bornées ; on peut donc munir l'ensemble $\mathfrak{Z}$ de ces fonctions de la topologie de la convergence compacte : on démontre alors que, pour cette topologie, $\mathfrak{Z}$ est localement compact (même démonstration que pour le dual d'un groupe abélien). Etant donnée sur G une fonction intégrable bi-invariante f , on posera

$$\hat{f}(\zeta) = \int \hat{f}(x)\, \zeta(x)\, dx \qquad \text{pour} \quad \zeta \in \mathfrak{Z} \quad ; \tag{2.3}$$

les fonctions $\hat{f}$ sont continues, tendent vers 0 à l'infini, et on a les formules usuelles

$$\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g} \quad ; \quad \widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g} \quad ; \quad \hat{\tilde{f}} = \bar{\hat{f}} . \tag{2.4}$$

Le résultat fondamental à ce sujet est le

THÉORÈME de Plancherel. - Soit μ une mesure de type positif sur G ; il existe sur $\mathfrak{Z}$ une mesure positive $\hat{\mu}$, et une seule, possédant les propriétés suivantes :

(Pl 1) : Toutes les fonctions $\hat{f}$, $f \in {}^{\circ}L^{\circ}$, sont de carré sommable pour $\hat{\mu}$; elles sont même partout denses dans $L^2(\hat{\mu})$;

(Pl 2) : Quelles que soient $f,g \in {}^{\circ}L^{\circ}$ on a

$$\mu(f*\tilde{g}) = \int \hat{f}(\zeta)\, \overline{\hat{g}(\zeta)}\, d\hat{\mu}(\zeta) . \tag{2.5}$$

Par exemple prenons $\mu(f) = f(e)$, mesure de Dirac à l'origine ; on trouve alors sur $\mathfrak{Z}$ une mesure positive $d\zeta$ telle que

$$\int f(s)\, \overline{g(s)}\, ds = \int \hat{f}(\zeta)\, \overline{\hat{g}(\zeta)}\, d\zeta$$

pour $f,g \in {}^{\circ}L^{\circ}$, et l'application $f \longrightarrow \hat{f}$ se prolonge en un isomorphisme de l'espace des fonctions bi-invariantes de carré sommable sur l'espace L^2 de la mesure $d\zeta$; c'est le théorème de Plancherel proprement dit. Si au contraire on prend

$$d\mu(x) = \varphi(x)\, dx$$

où φ est continue de type positif, on constate par des majorations triviales que $\hat{\mu}$ est <u>bornée</u> ; si de plus φ est bi-invariante, (2.5) implique immédiatement

$$\varphi(x) = \int \zeta(x)\, d\hat{\mu}(x) \quad ;$$

c'est le théorème de Bochner pour les fonctions bi-invariantes de type positif.

Enfin, si G est un groupe de Lie, il va de soi que le théorème de Plancherel s'applique aussi aux <u>distributions</u> de type positif ; la démonstration que nous allons donner s'applique en effet tout aussi bien à ce cas (à condition de remplacer la considération des fonctions continues bi-invariantes par celle des fonctions différentiables bi-invariantes). D'ailleurs, tout résulte d'un théorème de Plancherel "abstrait" suffisamment général pour absorber tous les résultats de ce genre.

3. <u>Démonstration du théorème de Plancherel</u>.

Définissons ce qu'on entend par une <u>algèbre unitaire</u> (qui sera généralement <u>sans</u> élément unité...). C'est une algèbre A sur le corps complexe, munie d'une "involution" $x \longrightarrow x^*$ et d'un <u>produit scalaire</u> (x,y) , non nécessairement "séparé", avec les axiomes suivants :

$$(xy,z) = (y,x^*z) \quad ; \quad (x,y) = (y^*, x^*) \quad ;$$

les opérateurs $L(x) \;:\; y \longrightarrow xy$, sont continus ; les sommes $\sum x_i\, y_i$ sont partout denses dans A .
Bien entendu on munit A de la topologie déduite du produit scalaire (x,y) .
Supposons A <u>commutative</u>.

On appellera <u>caractère</u> de A tout homomorphisme ζ de A <u>sur</u> le corps complexe, et qui est continu en ce sens que l'on suppose

$$(3.1) \qquad |\zeta(x)| \leq \|L(x)\| \;.$$

Soit $\mathcal{Z}$ l'ensemble de ces caractères, muni de la topologie "faible" usuelle : il est clair que $\mathcal{Z}$ est <u>localement compact</u> (car en ajoutant 0 on trouverait un ensemble compact) , et à tout $x \in A$ on peut attacher sur $\mathcal{Z}$ la fonction $\hat{x}(\zeta) = \zeta(x)$; celle-ci est continue et tend vers 0 à l'infini.

Le <u>théorème de Plancherel abstrait</u>, dû au conférencier, affirme qu'il existe sur $\mathfrak{X}$ une mesure positive $d\zeta$ et une seule telle que les fonctions $\hat{x}$ soient de carré sommable (et même partout denses dans L^2 de $d\zeta$) , et vérifient

$$(x,y) = \int \hat{x}(\zeta)\, \overline{\hat{y}(\zeta)}\, d\zeta \quad ;$$

comme d'ailleurs on a évidemment $\widehat{xy} = \hat{x}\hat{y}$ ce théorème affirme que toute algèbre unitaire commutative peut se réaliser, à un isomorphisme près, et même canoniquement, par des fonctions continues de carré sommable.

La démonstration est assez facile, mais assez longue dans ses détails (du moins si l'on veut tout démontrer, ce que beaucoup d'auteurs se dispensent de faire) ; en voici le principe. On complète tout d'abord A en un espace de Hilbert $\mathcal{H}$; puis on forme dans $\mathcal{H}$ l'algèbre $\hat{A}$ des opérateurs continus qui sont limites, au sens de la norme, d'opérateurs $L(x) + \mathrm{Cte}$; c'est une algèbre commutative, autoadjointe, fermée, contenant $\mathcal{l}$. D'après le théorème fondamental relatif aux algèbres de ce type, $\hat{A}$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre des fonctions continues sur un espace compact convenable $\hat{\mathfrak{X}}$, à savoir l'espace des homomorphismes (nécessairement continus) de $\hat{A}$ sur le corps complexe. Evidemment, l'injection de A dans $\hat{A}$ définit une surjection de $\hat{\mathfrak{X}}$ sur $\mathfrak{X}_\infty$ (compactifié de $\mathfrak{X}$ par adjonction de 0).

De là, et de la définition des mesures, résulte alors que, quels que soient $x,y,z \in A$, il existe sur $\mathfrak{X}$ une mesure bornée $d\mu_{y,z}(\zeta)$ et une seule telle que l'on ait

$$(xy,z) = \int \hat{x}(\zeta)\, d\mu_{y,z}(\zeta) \ .$$

Les propriétés essentielles de ces mesures sont les suivantes :

(a) : L'application $(x,y) \to \mu_{x,y}$ de $A \times A$ dans l'espace des mesures sur $\mathfrak{X}$ est "hermitienne positive" en un sens évident ;

(b) : On a l'identité $d\mu_{xy,z}(\zeta) = \hat{x}(\zeta)\, d\mu_{y,z}(\zeta)$.

A partir de là, et comme dans la démonstration du théorème de Plancherel pour les groupes abéliens on déduit l'existence et l'unicité d'une mesure positive $d\zeta$ sur $\mathfrak{X}$ telle que

$$d\mu_{y,z}(\zeta) = \hat{y}(\zeta)\, \overline{\hat{z}(\zeta)}\, d\zeta$$

quels que soient $y,z \in A$. Le théorème annoncé résulte alors facilement de là.

Notons en passant que, dans l'isomorphisme canonique entre l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ complété de A et l'espace L^2 construit sur la mesure $d\zeta$, les opérateurs $L(x)$, $x \in A$, se trouvent réalisés comme opérateurs $f \to \hat{x}.f$ de multiplication par $\hat{x}$. On en déduit facilement que, si T est un opérateur continu dans $\mathcal{H}$, limite en norme d'opérateurs $L(x)$, il existe sur $\mathcal{Z}$ une fonction continue $\hat{T}$ et une seule, tendant vers 0 à l'infini, telle que T soit donné par $f \longrightarrow \hat{T}.f$ (Plus généralement, tout opérateur continu dans $\mathcal{H}$ permutant aux $L(x)$ se réalise, dans L^2 , comme opérateur de multiplication par une fonction mesurable et bornée, unique à ensemble localement négligeable près.)

Venons en maintenant au théorème de Plancherel pour les fonctions sphériques. Soit μ la mesure de type positif considérée sur G . Munissons l'algèbre ${}^\circ L^\circ$ du produit scalaire

$$(f,g)_\mu = \mu(f * \tilde{g}) \; ; \tag{3.2}$$

il est immédiat de voir qu'on obtient ainsi une algèbre unitaire commutative $S(\mu)$, à laquelle s'applique donc le théorème "abstrait". Il est du reste utile de considérer en même temps le produit scalaire (3.2) sur L tout entier, et l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ obtenu en complétant L ; noter qu'on a une représentation unitaire U de G dans $\mathcal{H}$, obtenue en observant que (3.2) est invariant par les translations à droite sur G . Evidemment le complété de $S(\mu)$ se plonge dans $\mathcal{H}$, et l'on vérifie immédiatement que les opérateurs $L(f)$: $g \longrightarrow f*g = g*f$ de l'algèbre $S(\mu)$ se prolongent, dans $\mathcal{H}$, en les opérateurs $U(f) = \int U(x)\, f(x)\, dx$; on a donc $\|L(f)\| \leq \int |f(x)|dx$, et l'inégalité (3.1), avec des raisonnements faciles de dualité, nous montre que les caractères de $S(\mu)$ s'identifient à des fonctions mesurables, bornées et bi-invariantes :

$$\zeta(f) = \int f(s)\, \zeta(s)\, ds \qquad (f \in {}^\circ L^\circ) \; ;$$

comme $\zeta(f*g) = \zeta(f)\, \zeta(g)$, ces fonctions sont nécessairement sphériques donc continues ; reste à prouver qu'elles sont de type positif. Pour cela on observe que, d'après la majoration (3.1) et le fait que, si une algèbre fermée d'opérateurs d'un espace de Hilbert contient un opérateur hermitien positif elle contient aussi sa racine carrée, tout caractère ζ de $S(\mu)$ vérifie $\zeta(h) \geqslant 0$ dès que l'opérateur $L(h)$, $h \in {}^\circ L^\circ$, est hermitien positif ; soit alors $f \in L$ quelconque ; on aura $\zeta(\tilde{f}*f) = \zeta(h)$ où $h = {}^\circ(\tilde{f}*f)^\circ$, d'où immédiatement le résultat.

Cela fait on voit que le $\mathcal{Z}$ de l'algèbre unitaire $S(\mu)$ se plonge canoniquement, homéomorphiquement, et proprement, dans l'espace $\mathcal{Z}$ des fonctions sphériques de type positif, de sorte qu'en "transportant" le théorème abstrait on obtient immédiatement le résultat annoncé à la fin du n°2.

Bien entendu tout cela démontre simultanément le théorème de Plancherel classique (groupes abéliens) et le résultat relatif aux espaces symétriques, ce qui prouve que les espaces symétriques constituent le cadre naturel de la transformation de Fourier, comme disait A. WEIL à propos des groupes abéliens.

Soient μ une mesure de type positif sur G et $\hat{\mu}$ la mesure qui lui correspond sur $\mathcal{Z}$; la démonstration du théorème "abstrait" nous indique quel est le support de $\hat{\mu}$ (on pourrait l'appeler le "spectre" de μ) ; pour $f \in L$, notons $\|f\|_\mu$ la norme de l'opérateur $g \longrightarrow f*g$ relativement au produit scalaire défini par μ ; alors le spectre de μ est exactement l'ensemble des $\zeta \in \mathcal{Z}$ qui vérifient

(3.3) $$|\zeta(f)| \leq \|f\|_\mu \quad \text{pour toute } f \in {}^oL^o .$$

Enfin, le théorème nous indique que la "transformation de Fourier" transforme l'opérateur $g \longrightarrow f*g$ en l'opérateur de multiplication par $\hat{f}$ dans $L^2(\hat{\mu})$ (pour $f \in {}^oL^o$, plus généralement pour f bi-invariante sommable sur G)

Notons que la formule

$$\int f(s)\, \overline{g(s)}\, ds = \int \hat{f}(\zeta)\, \overline{\hat{g}(\zeta)}\, d\zeta$$

valable en supposant f de g bi-invariantes s'étend à des fonctions beaucoup plus générales. Désignons, dans l'espace $L^2(G)$, par $\mathcal{H}$ le plus petit sous-espace fermé contenant les fonctions bi-invariantes et stable par toutes les translations $s \longrightarrow g'sg''$; $\mathcal{H}$ contient en particulier les fonctions invariantes à droite ou à gauche. D'autre part, pour tout $\zeta \in \mathcal{Z}$, notons $s \rightarrow U(s\ ;\zeta)$ la représentation unitaire irréductible définie par ζ, et $\mathcal{H}(\zeta)$ l'espace de Hilbert correspondant. Alors on peut attacher à toute $f \in \mathcal{H}$ des opérateurs $\hat{f}(\zeta)$ dans les espaces $H(\zeta)$, qui sont presque partout dans la classe de Hilbert-Schmidt, et ce de telle sorte qu'on ait

$$(f,g) = \int \mathrm{tr}(\hat{f}(\zeta)\hat{g}(\zeta)^* d\zeta \qquad \text{pour } f,g \in \mathcal{H} ;$$

si de plus f est sommable alors

$$\hat{f}(\zeta) = \int U(x\ ;\zeta)\, f(x)\, dx .$$

Lorsque f est bi-invariante, l'opérateur $\hat{f}(\zeta)$ se réduit au scalaire $\hat{f}(\zeta)$ sur le sous-espace ${}^o\mathcal{H}(\zeta)$ et est nul sur le sous-espace supplémentaire : c'est pourquoi les tr disparaissent alors de la formule de Plancherel !

Une autre façon, équivalente, de regarder la formule de Plancherel est de former la représentation unitaire évidente de G dans l'espace L^2 de $X = G/K$; la théorie des fonctions sphériques consiste essentiellement à décomposer cette représentation en somme continue de représentations irréductibles. On notera que les ensembles de mesure nulle "exceptionnels" de la théorie générale disparaissent ici totalement : tout est irréductible, on trouve un espace "dual" localement compact, etc. ; c'est le Paradis, où tout fonctionne canoniquement. Il va sans dire que son exploration est à peine commencée ; en particulier, on ignore à peu près tout des nouvelles fonctions spéciales qui résultent nécessairement de la théorie : on sait seulement qu'elles ont des représentations par des intégrales du type de Legendre ou Poisson, qu'elles vérifient un "théorème d'addition", et sont caractérisées par des équations différentielles. Mais on n'a encore rien d'analogue aux formules de Hankel par exemple, ou à l'intégrale de Gauss pour les fonctions hypergéométriques, et on ignore tout des développements en série.

4. Cas du groupe hyperbolique : formule explicite.

Nous allons calculer la mesure $d\zeta$ pour le groupe hyperbolique. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; il est immédiat de voir que les fonctions bi-invariantes sur G sont celles qui ne dépendent que de l'expression $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \mathrm{tr}\,({}^t g.g)$: nous prendrons donc comme paramètre

$$x = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \quad \text{d'où} \quad x \geqslant 1 . \tag{4.1}$$

Considérons le sous-groupe N d'élément générique

$$n = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} , \quad s > 0 \ ;$$

on a $G = K.N$, $K \cap N = \{e\}$, d'où pour la mesure de Haar de G une décomposition

$$\int f(g)\, dg = \iint f(nk)\, dk\, dn \tag{4.2}$$

où

$$dn = s^{-2}\, ds\, dt \tag{4.3}$$

est invariante à gauche sur N (la mesure invariante à droite est $ds\,dt$). Rappelons les formules (1.3) et (1.4) ; soit

$$\alpha(n) = s^{-2\rho}$$

un caractère de N ; alors la fonction sphérique

$$\zeta_\mu(g) = \int \alpha(kg)\, dk \qquad \text{où} \qquad \alpha(nk) = \alpha(n)$$

qui lui correspond est donnée, en fonction du paramètre (4.1), par

$$P_\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x + \cos\theta\sqrt{x^2 - 1})^\rho\, d\theta .$$

Soit alors f une fonction bi-invariante à support compact ; la transformée de

Fourier de f s'identifie à la fonction

$$\hat{f}(\rho) = \int f(g)\, \zeta_\rho(g)\, dg = \iint f(nk)\, \zeta_\rho(nk)\, dk\, dn = \int f(n)\, \zeta_\rho(n)\, dn$$

ou aussi à

$$\hat{f}(\rho) = \iint f(g)\, \alpha(kg)\, dk\, dg = \iint f(k^{-1}g)\, \alpha(g)\, dk\, dg = \int f(g)\, \alpha(g)\, dg = \iint f(nk)\, \alpha(nk)\, dn\, dk =$$
$$= \int f(n)\, \alpha(n)\, dn\ .$$

d'où

$$\hat{f}(\rho) = \iint f\left(\frac{s^2 + s^{-2} + t^2}{2}\right) s^{-2\rho-2}\, ds\, dt\ ; \tag{4.4}$$

posant

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(u + \tfrac{1}{2}\, t^2\right) dt \qquad (u \geqslant 1) \tag{4.5}$$

il vient donc

$$\hat{f}(\rho) = \int_0^{+\infty} F\left(\frac{s^2 + s^{-2}}{2}\right) s^{-2\rho-2}\, ds \tag{4.6}$$

Nous devons nous borner à considérer les valeurs de ρ pour lesquelles la fonction sphérique correspondante est <u>de type positif</u> ; cela exige, comme on le voit facilement en écrivant $\zeta_\rho(g^{-1}) = \overline{\zeta_\rho(g)}$, que l'on ait $R(\rho) = -\frac{1}{2}$, et cette condition est suffisante. Posant

$$-2\rho - 1 = -i\nu \qquad , \nu \text{ réel}, \tag{4.7}$$

il vient donc

$$\hat{f}(\rho) = \int_0^{+\infty} F\left(\frac{s^2 + s^{-2}}{2}\right) s^{-i\nu}\, \frac{ds}{s}\ : \tag{4.8}$$

on a à effectuer une transformation de Fourier sur le groupe des réels > 0 (c'est ce qu'on appelle une tranformation de Mellin...) et l'on en déduit, en supposant que la fonction (4.8) soit sommable par rapport à ν , que

$$2\pi . F\left(\frac{s^2 + s^{-2}}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\rho)\, s^{i\nu}\, d\nu\ ; \tag{4.9}$$

mais la considération du groupe de Weyl de G montre facilement que ζ_ρ ne change pas si l'on remplace ρ par $-\rho$, de sorte qu'en fait il vient au lieu de (4.9) la relation

$$2\pi . F\left(\frac{s^2 + s^{-2}}{2}\right) = \int_0^{+} \hat{f}(\rho)\, \frac{s^{i\nu} + s^{-i\nu}}{2}\, d\nu\ ;$$

posant $s = e^{t/2}$ il vient donc, en remplaçant ν par 2ν :

$$\frac{\pi}{2}.F(\text{ch } t) = \int_0^{+\infty} \hat{f}(i\nu - \tfrac{1}{2}) \cos(\nu t)\, d\nu . \tag{4.10}$$

Cette formule permet de calculer F en fonction de $\hat{f}$; il reste à calculer f en fonction de F , i.e. à inverser la formule (4.5) ; ce problème est résolu dans la littérature sous le nom d'équation intégrale d'Abel, ce qui nous donne en passant une interprétation "supérieure" de celle-ci ; la solution est donnée par la relation

$$-2\pi.f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} F'(u + \tfrac{1}{2}t^2)\, dt \tag{4.11}$$

où F' est la dérivée de F , laquelle existe si f est suffisamment gentille. Mais de (4.10) on déduit facilement la dérivée de F

$$F'(\text{ch } t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}(i\nu - \tfrac{1}{2}) \frac{\sin(\nu t)}{\text{sh } t}\, \nu\, d\nu \quad ;$$

par ailleurs, (4.11) donne en particulier, pour $u = 1$ (qui correspond à l'élément neutre e de G), la relation

$$-2\pi.f(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} F'(\tfrac{1}{2}t^2)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F'(\text{ch } t)\, \text{ch}\,\frac{t}{2}\, dt ,$$

d'où il suit que

$$\pi^2.f(e) = \int_0^{+\infty} \hat{f}(i\nu - \tfrac{1}{2})\nu\, d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \nu t}{\text{sh } t}\, \text{ch}\,\frac{t}{2}\, dt \quad ;$$

attendu que

$$\int_{-\infty}^{+} \frac{\sin \nu t}{\text{sh } t}\, \text{ch}\,\frac{t}{2}\, dt = \nu.\text{th}(\pi\nu)$$

on trouve finalement

$$f(e) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}(i\nu - \tfrac{1}{2})\nu\, \text{th}(\pi\nu)\, d\nu \tag{4.12}$$

où d'une manière générale

$$\hat{f}(\rho) = \int f(g)\, \zeta_\rho(g)\, dg \quad ; \tag{4.13}$$

(4.12) nous donne la mesure cherchée : en paramétrant à l'aide de $\nu \geqslant 0$ les fonctions sphériques de type positif, celle-ci n'est autre que $\frac{1}{\pi}\nu\, \text{th}(\pi\nu)\, d\nu$.

Notons enfin que la formule d'inversion (4.12) s'écrit comme suit dans la théorie des fonctions de Legendre : soit $\varphi(x)$ une fonction intégrable pour $x \geqslant 1$ et suffisamment dérivable ; définissons sa "transformée de Legendre" par

$$\hat{\varphi}(\nu) = \pi \int_1^{+\infty} \varphi(x) P_{-\frac{1}{2}-i\nu}(x)\, dx \quad ;$$

alors on a la formule d'inversion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{\varphi}(\nu)\, P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x) \nu \,\mathrm{th}(\pi\nu)\, d\nu \; .$$

Sous cette forme le résultat est dû, semble-t-il, à un physicien russe (voir le livre bien connu de Magnus et Oberhettinger [1]) ; il est surprenant qu'on ne l'ait pas trouvé plus tôt.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MAGNUS (Wilhelm) und OBERHETTINGER (Fritz). - Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Pysik, 2. Auflage. - Berlin, Springer, 1948 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 52).

[2] NAIMARK (M.A.). - Rings with involutions. - Providence, American mathematical Society, 1950 (American mathematical Society Translation n°25).

La théorie a été inaugurée par GELFAND :

GEL'FAND (I.M.). - Sfericeskie funkcii na simmetriceskikh rimanovykh protranstvakh Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 70, 1950, p. 5-8.

La note de GELFAND contient la définition des fonctions sphériques, leur équation fonctionnelle, leurs équations différentielles, et le théorème "de Bochner" sur les fonctions continues de type positif bi-invariantes. Les formules intégrales pour les fonctions sphériques se sont d'abord présentées naturellement dans les recherches de GELFAND et NAIMARK sur le groupe $SL(n, C)$, voir par exemple :

GEL'FAND (I.M.) et NAIMARK (M.A.). - Unitarnye predstavlenija klassiceskih grupp, Trudy matematiceskogo Instituta Steklova, t. 36, 1950, p. 1-288.

Le fait qu'on obtient toutes les fonctions sphériques de cette façon a été annoncé par HARISH-CHANDRA en 1951 ; une démonstration détaillée d'un résultat plus général figure dans l'article suivant :

HARISH-CHANDRA. - Representations of semisimple Lie groups, III., Trans. Amer. math. Soc., t. 76, 1954, p. 234-253.

Dans le cas de $SL(n, C)$ une démonstration "globale" est dûe à NAIMARK :

NAIMARK (M.A.). - Ob opisanii vaekh uniternykh predstavlenij komplekanykh klassiceskikh grupp, I., Mat. Sbornik, t. 35 (77), 1954, p. 317-356.

La formule de Plancherel est dûe au conférencier, qui ne l'a jamais publiée, elle date de 1951 ; un résultat analogue, mais purement "measure-theoretic" avec plein d'ensembles de mesure nulle exceptionnels, est dû à MAUTNER :

MAUTNER (F.I.). - Fourier analysis and symmetric spaces, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 37, 1951, p. 529-532.

Il est de toute façon peu probable que GELFAND et NAIMARK ne soient pas parvenus de leur côté, et dès le début, au même résultat... Le théorème de Plancherel "abstrait"

se trouve, sous une forme légèrement différente, dans un article du conférencier :

GODEMENT (Roger). - Sur la théorie des représentations unitaires, Annals of Math., t. 53, 1951, p. 68-124.

Enfin le cas du groupe hyperbolique est plus ou moins dû à BARGMANN :

BARGMANN (V.). - Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Annals of Math., t. 48, 1947, p. 568-640.

qui a déterminé toutes ses représentations irréductibles ; la formule de Plancherel pour les fonctions sphériques dans ce cas est due au conférencier ; un résultat plus complet se trouve dans HARISH-CHANDRA :

HARISH-CHANDRA. - Plancherel formula for the 2×2 real unimodular group, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 38, 1952, p. 337-342.

Notons que l'article de SELBERG :

SELBERG (A.). - Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian math. Soc., t. 20, 1956, p. 47-87

contient la plupart des résultats exposés ici, sauf la formule de Plancherel (à laquelle il n'est fait qu'une très vague allusion) et les relations avec la théorie des représentations unitaires. SELBERG ne fait aucune espèce d'allusion à l'existence possible d'une littérature mathématique.