Claude Chevalley

La théorie des fonctions holomorphes de Zariski. Application au théorème de connexité

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. nº 158, p. 291-307
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__291_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1958)

LA THÉORIE DES FONCTIONS HOLOMORPHES DE ZARISKI
APPLICATION AU THÉORÈME DE CONNEXITÉ

par Claude CHEVALLEY

1. Définition des fonctions holomorphes.

Les variétés que nous considérerons seront définies sur un corps algébriquement clos K. Si x est un point d'une variété U, nous désignerons par $\mathfrak{o}_U(x)$, ou simplement $\mathfrak{o}(x)$, l'anneau local du point x sur U, et par $\mathfrak{m}(x)$ son idéal premier maximal ; nous désignerons la complétion de $\mathfrak{o}(x)$ par $\overline{\mathfrak{o}(x)}$. Si A est une partie irréductible de U, nous désignerons par $\mathfrak{o}(A)$ son anneau local (réunion des $\mathfrak{o}(x)$ pour $x \in A$), par $\mathfrak{m}(A)$ l'idéal premier maximal de $\mathfrak{o}(A)$ (ensemble des fonctions numériques sur U qui appartiennent à $\mathfrak{o}(A)$ et qui sont nulles en tous les points de A où elles sont définies) et par $\overline{\mathfrak{o}(A)}$ la complétion de $\mathfrak{o}(A)$. Si U' est une partie ouverte de U, nous désignerons par $P(U')$ l'algèbre des fonctions numériques partout définies sur U' et par $\mathfrak{p}(U', A)$ l'idéal composé des fonctions de $P(U')$ nulles sur $A \cap U'$ (A étant ici une partie quelconque de U).

Soit A une partie quelconque de U. On appelle <u>fonction holomorphe sur U le long de</u> A une application $x \longrightarrow h(x)$ qui fait correspondre à tout $x \in A$ un élément $h(x) \in \overline{\mathfrak{o}(x)}$ et qui possède la propriété suivante : pour tout $x_0 \in A$, il existe un voisinage ouvert U' de x_0 dans U et une suite (u_n) de fonctions de $P(U')$ tels que :

1° on ait $h(x) = \lim u_n$ pour tout $x \in U' \cap A$;

2) la suite (u_n) soit une suite de Cauchy dans $P(U')$, muni de sa topologie $\mathfrak{p}(U', A)$-adique. On peut évidemment toujours supposer que U' est un morceau affine de la variété U. La condition 2° implique que l'on peut approcher h <u>uniformément dans</u> $U' \cap A$ par des fonctions de $P(U')$.

Les fonctions holomorphes sur U le long de A forment de manière évidente un anneau, que nous désignerons par $\mathfrak{h}(U, A)$.

Soit f un morphisme d'une variété V dans une variété U ; soit B une partie de V telle que $f(B) \subset A$. Si $y \in B$, l'application f définit un homomorphisme φ_y de $\mathfrak{o}(f(y))$ dans $\mathfrak{o}(y)$, qui se prolonge par continuité en un homomorphisme, que nous notons $\bar{\varphi}_y$, de $\overline{\mathfrak{o}(f(y))}$ dans $\overline{\mathfrak{o}(y)}$. Soit h une fonction holomorphe sur U le long de A ; on vérifie facilement que l'application $y \to \overline{\varphi}_y(h(f(y)))$ est une fonction holomorphe sur V le long de B ; nous désignerons cette fonction par $h \circ f$; l'application $h \to h \circ f$ est un homomorphisme de $\mathfrak{h}(U, A)$ dans $\mathfrak{h}(V, B)$. En particulier, si $B \subset A$, la restriction à B de toute fonction holomorphe le long de A est une fonction holomorphe le long de B.

2. Principe de prolongement analytique.

On se propose de démontrer le

THÉORÈME 1. - Soit A une partie irréductible de la variété U, et soit $h \in \mathfrak{h}(U, A)$. Supposons la variété U normale ; si on a $h(x) = 0$ pour au moins un $x \in A$, on a $h = 0$.

Pour le montrer, on va définir un homomorphisme

$$\zeta : \mathfrak{h}(U, A) \to \overline{\mathfrak{o}(A)}$$

Soit $h \in \mathfrak{h}(U, A)$. Soient x un point de A, U' un voisinage ouvert affine de x et (u_n) une suite de Cauchy dans $P(U')$ relativement à la topologie $\mathfrak{p}(U', A)$-adique qui converge vers $h(x')$ dans $\overline{\mathfrak{o}(x')}$ pour tout $x' \in A \cap U'$. Il est clair que la suite (u_n) converge dans $\overline{\mathfrak{o}(A)}$ vers une limite $\overline{u}$. On va montrer que cette limite ne dépend pas des choix de x, de U' et des u_n. Etablissons pour cela le

LEMME 1. - Soit $y \in A$; si une suite (v_n) d'éléments de $\mathfrak{o}(y)$ converge vers 0 dans $\mathfrak{o}(y)$ et est une suite de Cauchy dans $\mathfrak{o}(A)$, elle converge vers 0 dans $\mathfrak{o}(A)$.

Soit $k > 0$; soit m tel que $v_n - v_m \in \mathfrak{m}^k(A)$ pour $n \geq m$. Pour tout $\nu > 0$, il y a un $n \geq m$ tel que $v_n \in \mathfrak{m}^\nu(x)$; on a donc $v_m \in (\mathfrak{m}^k(A) \cap \mathfrak{o}(x)) + \mathfrak{m}^\nu(x)$. Or $\mathfrak{m}^k(A) \cap \mathfrak{o}(x)$ est un idéal de $\mathfrak{o}(x)$, et est par suite fermé ; il en résulte que $v_m \in \mathfrak{m}^k(A)$, d'où aussi $v_n \in \mathfrak{m}^k(A)$ pour $n \geq m$, ce qui démontre le lemme.

Ceci étant, soient x' un point de A, U'' un voisinage ouvert de x' et (u'_n) une suite de Cauchy dans $P(U'')$ pour la topologie $\mathfrak{p}(U'', A)$-adique qui converge vers $h(y)$ pour tout $y \in U'' \cap A$. Comme A est irréductible, $U'' \cap U' \cap A$ n'est pas vide. Il résulte alors du lemme 1 que $(u'_n - u_n)$ converge vers 0 dans $\mathfrak{o}(A)$ (il suffit d'appliquer le lemme en un point $y \in U'' \cap U' \cap A$), ce qui montre bien que $\overline{u}$ ne dépend que de h ; il est clair que l'application

$\zeta : h \to \bar{u}$ est un homomorphisme, et que, si $x \in A$, la condition $h(x) = 0$ entraîne $\zeta(h) = 0$.

On va maintenant établir une réciproque partielle du lemme 1 :

LEMME 2. - Soit $y \in A$; supposons U analytiquement irréductible en y (i.e. $\mathcal{O}(y)$ est un domaine d'intégrité). Si une suite (v_n) d'éléments de $\mathcal{O}(y)$ converge vers 0 dans $\mathcal{O}(A)$, elle converge vers 0 dans $\mathcal{O}(y)$.

L'anneau $\mathcal{O}(A)$ est l'anneau local d'un idéal premier $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}(y)$; on peut évidemment supposer sans restriction de généralité que $v_n \in \mathfrak{m}^n(A) = \mathfrak{a}^n\, \mathcal{O}(A)$; soit $c_n \in \mathcal{O}(y)$, $c_n \notin \mathfrak{a}$ tel que $c_n v_n$ appartienne à $\mathfrak{a}^n$. Il y a au moins un idéal premier $\mathfrak{q}$ de $\overline{\mathcal{O}(y)}$ tel que $\mathfrak{q} \cap \mathcal{O}(y) = \mathfrak{a}$. En effet, il y a des idéaux premiers $\mathfrak{q}_i$ de $\overline{\mathcal{O}(y)}$ contenant $\mathfrak{a}$ et des $e(i) > 0$ tels que le produit des $\mathfrak{q}_i^{e(i)}$ soit contenu dans $\mathfrak{a}\overline{\mathcal{O}(y)}$; on voit alors tout de suite qu'il y a au moins un i tel que $\mathfrak{q}_i \cap \mathfrak{a}(y) = \mathfrak{a}$ (puisque $\mathfrak{a}\overline{\mathcal{O}(y)} \cap \mathcal{O}(y) = \mathfrak{a}$). Soit $\mathcal{O}$ l'anneau local de $\mathfrak{q}$; les v_n appartiennent donc à $\mathfrak{q}^n \mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O}$ est un domaine d'intégrité noethérien, l'intersection des $\mathfrak{q}^n \mathcal{O}$ se réduit à $\{0\}$; les $\mathfrak{q}^n \mathcal{O} \cap \overline{\mathcal{O}(y)}$ forment donc une suite décroissante d'idéaux de l'anneau complet $\overline{\mathcal{O}(y)}$ dont l'intersection se réduit à $\{0\}$. On sait qu'il en résulte que, pour tout $k > 0$, il y a un $n(k)$ tel que, pour $n \geqslant n(k)$, $\mathfrak{q}^n \mathcal{O} \cap \overline{\mathcal{O}(y)}$ soit contenu dans la puissance k-ième de l'idéal premier maximal $\mathfrak{m}(y)\overline{\mathcal{O}(y)}$ de $\overline{\mathcal{O}(y)}$. Ceci entraîne que $v_n \in \mathfrak{m}^k(y)$ si $n \geqslant n(k)$, ce qui démontre le lemme 2.

Ceci étant, on peut démontrer le théorème 1 : si $h(x) = 0$, on a $\zeta(h) = 0$ en vertu du lemme 1, ce qui, en vertu du lemme 2, entraîne $h(x') = 0$ pour tout $x' \in A$ tel que U soit analytiquement irréductible en x', en particulier pour tout $x' \in A$ tel que U soit normale en x'.

3. Le critère de connexité.

THÉORÈME 2. - Soit A une partie fermée non vide d'une variété U. Si $\mathfrak{h}(U, A)$ est un domaine d'intégrité, A est connexe. Si A est connexe et U normale, $\mathfrak{h}(U, A)$ est un domaine d'intégrité.

Supposons que A ne soit pas connexe ; soit $A = A_1 \cup A_2$, A_1 et A_2 fermés non vides disjoints. Soit h_1 (resp. h_2) l'application qui fait correspondre à tout $x \in A$ l'élément 0 (resp. 1) de $\overline{\mathcal{O}(x)}$ si $x \in A_1$ et l'élément 1 (resp. 0) si $x \in A_2$. Tenant compte de ce que A_1 et A_2 sont fermés, on voit tout de suite que h_1 et h_2 sont holomorphes ; comme $h_1 h_2 = 0$, $\mathfrak{h}(U, A)$ n'est pas un domaine d'intégrité. Supposons réciproquement que $\mathfrak{h}(U, A)$ contienne des éléments h_i $(i = 1, 2)$ tous deux $\neq 0$ tels que $h_1 h_2 = 0$. Supposant U normale, nous allons montrer que A n'est pas connexe. Soit A_i l'ensemble des $x \in A$ tels que $h_i(x) = 0$; on a $A_i \neq A$, mais $A_1 \cup A_2 = A$, comme il résulte tout de suite du fait que, pour tout $x \in A$, $\overline{\mathcal{O}(x)}$ est un domaine d'intégrité. Montrons que toute composante irréductible X de A qui a un point commun x avec A_i est contenue dans A_i. La restriction $\bar{h}_i$ de h_i à X est une fonction holomorphe le long de X, qui prend la valeur 0 en x ; elle est donc nulle (théorème 1), d'où $X \subset A_i$. Si on appelle A_2' la réunion des composantes irréductibles de A qui ne rencontrent pas A_1, A est la réunion des ensembles fermés disjoints non vides A_1 et A_2'.

4. Fonctions holomorphes sur une variété affine.

Soient U une variété affine et A une partie de U. On posera $P = P(U)$, $\mathfrak{p} = P(U, A)$ et on désignera par $\bar{P}$ la complétion $\mathfrak{p}$-adique de P. On a un homomorphisme évident

$$\theta : \bar{P} \to \mathfrak{h}(U, A) \ ;$$

on se propose de montrer que θ <u>est un isomorphisme de</u> $\bar{P}$ <u>sur</u> $\mathfrak{h}(U, A)$.

On va d'abord montrer que θ est un monomorphisme. Il faut montrer que si une suite (u_n) d'éléments de P converge vers une limite $\bar{u}$ dans $\bar{P}$ et converge vers 0 dans $\mathcal{O}(x)$ pour tout $x \in A$, on a $\bar{u} = 0$. Soit X une sous-variété de U contenue dans A ; tenant compte du lemme 1, on voit que la suite (u_n) converge vers 0 dans $\mathcal{O}(X)$. Soit r un exposant > 0 ; représentons $\mathfrak{p}^r$ comme intersection d'idéaux primaires $\mathfrak{q}_i$ attachés à des idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ contenant $\mathfrak{p}$. A chaque i correspond une variété X_i contenue dans A ; il y a un exposant $k(i)$ tel que $\mathfrak{p}_i^{k(i)} \mathcal{O}(X_i) \cap P \subset \mathfrak{q}_i$. Puisque la suite (u_n) converge vers 0 dans $\mathcal{O}(X_i)$, il y a un $m > 0$ tel que, pour $n \geq m$, on ait $u_n \in \mathfrak{p}_i^{k(i)} \mathcal{O}(X_i)$ pour tout i, d'où $u_n \in \mathfrak{p}^r$. On a donc bien $\bar{u} = 0$.

On va maintenant montrer que θ est surjectif. Soit $h \in \mathfrak{h}(U, A)$. Pour tout $x \in A$, il y a un morceau affine U'_x de U contenant x et une suite $(u'_{x,n})$ d'éléments de $P(U')$ tels que l'on ait $u'_{x,n+1} - u'_{x,n} \in \mathfrak{p}^n(U'_x, A)$ pour tout n et $\lim u'_{x,n} = h(x')$ dans $\overline{\mathcal{O}(x')}$ pour tout $x' \in U'_x \cap A$. L'ensemble A peut être recouvert par un nombre fini des U'_x, disons par les U'_{x_i} $(i = 1, \ldots, r)$ nous poserons $U'_i = U'_{x_i}$, $u'_{i,n} = u'_{x_i,n}$. On peut adjoindre aux U'_i des morceaux affines $U'_{r+1}, \ldots, U'_s$ contenus dans $U - A$ tels que U soit la réunion de $U'_1, \ldots U'_s$; si $i > r$, nous poserons $u'_{i,n} = 1$. Nous poserons $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}(U'_i, A)$. On va montrer que $\mathfrak{p}_i$ est l'idéal $\mathfrak{p}P(U'_i)$ engendré par $\mathfrak{p}$ dans $P(U'_i)$. Il est clair que $\mathfrak{p}P(U'_i) \subset \mathfrak{p}_i$; pour établir l'égalité, il suffira de montrer que, pour tout point $x \in U'_i$, $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}_i$ engendrent le même idéal dans $\mathcal{O}(x)$ (il en résultera en effet que le transporteur $\mathfrak{p}P(U'_i) : \mathfrak{p}_i$ ne sera contenu dans aucun idéal premier maximal de $P(U'_i)$, donc contiendra 1). Or soit u un élément de $\mathfrak{p}_i$; il y a un $c \in P$ tel que $c(x) \neq 0$, $cu \in P$; comme u est nul sur $U'_i \cap A$, il en est de même de cu. Comme l'ensemble fermé $A - U'_i \cap A$ ne contient pas x, il y a un $c' \in P$ qui est nul sur cet ensemble mais qui n'est pas nul en x ; on a alors $c'cu \in \mathfrak{p}$, et la formule $u = (c'c)^{-1}$ $c'cu$ montre que $u \in \mathfrak{p}\mathcal{O}(x)$, ce qui démontre notre assertion. Il résulte de là que, pour tout $r > 0$, $\mathfrak{p}_i^r$ est l'idéal engendré par $\mathfrak{p}^r$ dans $P(U'_i)$.

Soient i et j des indices entre 1 et $r + s$; soit $U'_{ij} = U'_i \cap U'_j$. On sait que U'_{ij} est un morceau affine dont l'algèbre affine $P(U'_{ij})$ est engendrée par $P(U'_i)$ et $P(U'_j)$; les idéaux $\mathfrak{p}_i$ et $\mathfrak{p}_j$ engendrent le même idéal $\mathfrak{p}_{ij} = \mathfrak{p}(U'_{ij}, A)$ dans $P(U'_{ij})$. Les suites (u'_{in}), (u'_{jn}) convergent vers des limites $\overline{u}_{i;i,j}$, $\overline{u}_{j;i,j}$ dans la complétion $\mathfrak{p}_{ij}$-adique $\overline{P(U'_{ij})}$ de $P(U'_{ij})$. Par ailleurs, il résulte de la première partie de la démonstration que l'homomorphisme naturel θ_{ij} de $\overline{P(U'_{ij})}$ dans $\mathfrak{h}(U'_{ij}, A \cap U'_{ij})$ est un monomorphisme ; il est clair que $\theta_{ij}(\overline{u}_{i;i,j}) = \theta_{ij}(\overline{u}_{j;i,j})$; on a donc $\overline{u}_{i;i,j} = \overline{u}_{j;i,j}$. Pour tout $r > 0$ donné, il y a donc un $m(r)$ tel que l'on ait $u'_{i,n} - u'_{j,n} \in \mathfrak{p}_{ij}^r$ si $n \geqslant m(r)$ pour tous les couples (i, j). Nous allons en déduire qu'il y a alors un $u_n \in P$ tel que l'on ait $u_n - u'_{in} \in \mathfrak{p}_i^r$ pour tout i. L'idéal $\mathfrak{p}_{ij}^r$ est l'idéal engendré par $\mathfrak{p}_i^r$ dans l'anneau $P(U'_{ij})$, qui est lui-même l'anneau engendré par $P(U'_i)$ et $P(U'_j)$; on en déduit que l'on peut écrire

$$u'_{in} - u'_{jn} = \sum_k v_{ijk} w_{ijk}$$

où les v_{ijk} sont dans $\mathfrak{p}_i^r$ et les w_{ijk} dans $P(U'_j)$. Pour tout j, soit $\mathfrak{a}_j$ l'idéal composé des $a \in P$ tels que $aw_{ijk} \in P$ pour tout i et tout k. Montrons que l'idéal $\mathfrak{a} = \sum_j \mathfrak{a}_j$ contient 1. Il suffit de montrer que, pour tout $x \in U$, il y a une fonction de $\mathfrak{a}$ qui n'est pas nulle en x. Or, il y a un j tel que $x \in U'_j$; les w_{ijk} sont alors tous dans l'anneau local de x, ce qui montre qu'il y a un élément a de $\mathfrak{a}_j$, donc de $\mathfrak{a}$, qui n'est pas nul en x. Ceci étant, soient t_j des éléments tels que $t_j \in \mathfrak{a}_j$ pour tout j, $\sum t_j = 1$, Posons $u_n = \sum_j t_j u'_{j,n}$. On a $u_n - u'_{i,n} = \sum_j t_j(u'_{jn} - u'_{in})$; puisque, pour tout j, les $t_j w_{ijk}$ sont dans P, on a $u_n - u'_{in} \in \mathfrak{p}_i^r$. Il en résulte en particulier que $u_n - u'_{in} \in P(U'_i)$ d'où $u_n \in P(U'_i)$; or, $P(U'_i)$ étant l'ensemble des fonctions qui sont définies en tous les points de U'_i, on a $\bigcap_i P(U'_i) = P$, d'où $u_n \in P$. On peut évidemment supposer que $m(r) \geqslant r$; alors, si $n \geqslant m(r)$, on a $u'_{i;n+1} - u'_{i,n} \in \mathfrak{p}_i^r$; il en résulte que $u_{n+1} - u_n \in \bigcap_i \mathfrak{p}_i^r$. Montrons que $\bigcap_i \mathfrak{p}_i^r = \mathfrak{p}^r$; l'inclusion $\mathfrak{p}^r \subset \bigcap_i \mathfrak{p}_i^r$ est évidente ; il suffit donc de montrer que, pour tout $x \in U$, l'idéal engendré par $\bigcap_i \mathfrak{p}_i^r$ dans $\mathfrak{O}(x)$ est contenu dans l'idéal engendré par $\mathfrak{p}^r$. Or, si i est tel que $x \in U'_i$, $\mathfrak{p}^r$ et $\mathfrak{p}_i^r$ engendrent le même idéal dans $\mathfrak{O}(x)$, ce qui démontre notre assertion. La suite $(u_{m(r)})$ converge donc vers une limite $\overline{u}$ dans la complétion $\mathfrak{p}$-adique de P ; il est clair que $\theta(\overline{u}) = h$, ce qui montre que θ est surjectif.

Ceci étant, soient maintenant U une variété quelconque et A une partie fermée de U. Donnons nous une famille finie fixe (U_i) de morceaux affines U_i de U ; posons $U_{ij} = U_i \cap U_j$; désignons par P_i et P_{ij} les algèbres affines de U_i et U_{ij}, par $\overline{P}_i$ la complétion $\mathfrak{p}(U_i, A)$-adique de P_i et par $\overline{P}_{ij}$ la complétion $\mathfrak{p}(U_{ij}, A)$-adique de P_{ij}. On a des homomorphismes évidents

$$\eta_{i;i,j} : \overline{P}_i \to \overline{P}_{ij} .$$

Il résulte immédiatement du résultat que l'on vient d'établir que l'anneau $\mathfrak{h}(U, A)$ est isomorphe à l'anneau des éléments $(\overline{u}_i)$ du produit $\prod_i \overline{P}_i$ des anneaux $\overline{P}_i$ tels que les conditions de recollement

$$\eta_{i;i,j}(\overline{u}_i) = \eta_{j;i,j}(\overline{u}_j)$$

soient satisfaites pour tous les couples (i, j).

5. L'algèbre des fonctions méromorphes.

Il nous sera commode de compléter les définitions de Zariski en introduisant une notion de fonction méromorphe. Soit U une variété ; nous désignerons toujours par F_U le corps des fonctions numériques sur U. Si $x \in U$, nous poserons

$$\mathfrak{M}(x) = \overline{\mathfrak{O}(x)} \otimes_{\mathfrak{O}(x)} F_U ,$$

et nous dirons que $\mathfrak{M}(x)$ est l'algèbre des fonctions méromorphes en x. Si S est l'ensemble des éléments $\neq 0$ de $\mathfrak{O}(x)$, $\mathfrak{M}(x)$ n'est autre que l'anneau de fractions de la partie S de $\overline{\mathcal{O}(x)}$. Il est bien connu qu'aucun élément de S n'est diviseur de 0 dans $\overline{\mathcal{O}(x)}$. Nous pouvons donc considérer $\overline{\mathcal{O}(x)}$ comme un sous-anneau de $\mathfrak{M}(x)$, et tout élément de $\mathfrak{M}(x)$ se met sous la forme $s^{-1}\,\overline{u}$, où s est un élément $\neq 0$ de $\mathcal{O}(x)$ et $\overline{u}$ un élément de $\overline{\mathcal{O}(x)}$. Soit A une partie de U ; nous appellerons <u>fonction méromorphe sur</u> U <u>le long de</u> A une application v qui fait correspondre à tout $x \in A$ un élément $v(x) \in \mathfrak{M}(x)$ et qui possède la propriété suivante : si x_0 est un point quelconque de A, il existe un voisinage ouvert U' de x_0 dans U et une fonction $z \in F_U$, $z \neq 0$ tels que l'on ait $zv(x) \in \overline{\mathcal{O}(x)}$ pour tout $x \in U' \cap A$ et que l'application $x \to zv(x)$ soit une fonction holomorphe sur U' le long de $U' \cap A$. Les fonctions méromorphes le long de A forment manifestement une algèbre $\mathfrak{M}(U, A)$ sur le corps F_U, qui contient l'anneau $\mathfrak{h}(U, A)$ des fonctions holomorphes.

Supposons que U soit une variété affine, et soit A une partie fermée de U. Posons $P = P(U)$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(U, A)$; $\mathfrak{h}(U, A)$ s'identifie alors à la complétion $\mathfrak{p}$-adique $\overline{P}$ de P. L'application identique $\mathfrak{h}(U, A) \to \mathfrak{M}(U, A)$ définit un homomorphisme

$$\theta : \overline{P} \otimes_P F_U \to \mathfrak{M}(U, A) .$$

Si $\overline{u} \in \overline{P}$, $\theta(\overline{u} \otimes 1)$ n'est autre que la fonction holomorphe définie par $\overline{u}$; on en conclut en particulier que l'application $\overline{u} \to \overline{u} \otimes 1$ est un monomorphisme. Comme F_U est un corps, il en résulte aussitôt qu'aucun élément $\neq 0$ de P n'est diviseur de zéro dans $\overline{P}$. Comme F_U est le corps des fractions de P, $\overline{P} \otimes_P F_U$ n'est autre que l'anneau de fractions de la partie de $\overline{P}$ composée des éléments $\neq 0$ de P. Il en résulte que θ est un monomorphisme ; de plus, θ est surjectif. Soit en effet v un élément de $\mathfrak{M}(U, A)$. Il existe une famille finie (U'_i) de morceaux affines de U de réunion U et une famille (z_i), où chaque z_i est un élément $\neq 0$ de F_U, qui possèdent les propriétés suivantes : si $x \in U'_i \cap A$, on a $z_i\, v(x) \in \overline{\mathcal{O}(x)}$ et l'application $x \to z_i\, v(x)$ $(x \in U'_i \cap A)$ est une fonction holomorphe sur U'_i le long de $U'_i \cap A$. Comme chaque z_i se met sous la forme du quotient de deux éléments de P, on peut supposer que les z_i sont dans P. Si z est alors le produit des z_i, la restriction à chaque $U'_i \cap A$ de l'application $x \to zv(x)$ est une fonction holomorphe sur U'_i le long de $U'_i \cap A$; l'application $x \to zv(x)$ est donc une fonction holomorphe sur U le long de A, soit h, et on a $v = \theta(h \otimes z^{-1})$.

On déduit de là, dans le cas d'une variété U quelconque et d'une partie fermée A de U, une caractérisation de $\mathfrak{M}(U, A)$ analogue à celle qui a été donnée pour $\mathfrak{h}(U , A)$ à la fin du n° 3 .

Le critère de connexité peut se formuler pour les fonctions méromorphes comme pour les fonctions holomorphes :

THÉORÈME 3. - *Soit* A *une partie fermée d'une variété* U . *Pour que* A *soit connexe, il est suffisant que* $\mathfrak{M}(U , A)$ *soit un domaine d'intégrité* ; *cette condition est aussi nécessaire si* U *est normale*.

Si A n'est pas connexe, $\mathfrak{h}(U , A)$ contient un diviseur de zéro non nul ; il en est *a fortiori* de même de $\mathfrak{M}(U , A)$. Supposons que U soit normale et que $\mathfrak{M}(U , A)$ contienne des éléments $\overline{u}_1 \neq 0$, $\overline{u}_2 \neq 0$ de produit nul. Soit A_i l'ensemble des x tels que $\overline{u}_i(x) = 0$; pour tout $x \in U$, $\overline{\mathcal{O}(x)}$ est un domaine d'intégrité, d'où $A = A_1 \cup A_2$. Procédant comme dans la démonstration du critère pour les fonctions holomorphes, on voit qu'il suffit de montrer que, si une composante irréductible X de A rencontre A_1 , elle est contenue dans A_1 . Or on peut recouvrir U au moyen d'un nombre fini de morceaux affines U_i . Montrons que, si pour un certain i , $X \cap U_i$ rencontre A_1 , cet ensemble est contenu dans A_1 . La restriction de $\overline{u}_1$ à $X \cap U_i$ peut se mettre sous la forme hu , où h est une fonction holomorphe sur U_i le long de $X \cap U_i$ et u une fonction rationnelle $\neq 0$ sur U_i . La fonction h est nulle en au moins u point de $X \cap U_i$; elle est donc nulle (théorème 1), ce qui montre que la restriction de $\overline{u}_1$ à $X \cap U_i$ est nulle, d'où $X \cap U_i \subset A_1$. Parmi les ensembles $X \cap U_i$, ceux qui sont $\neq \emptyset$ se rencontrent deux à deux ; il en résulte aussitôt que $X \subset A_1$.

6. Enoncé du théorème de permanence.

Soient un morphisme dominant (i.e. $f(V)$ est dense dans U) d'une variété V dans une variété U . Soient y un point de V , x le point $f(y)$, φ le cohomomorphisme de f , qui est un isomorphisme de F_U sur un sous-corps de F_V . La restriction de φ à $\mathcal{O}(x)$ se prolonge en un homomorphisme $\overline{\varphi}_y : \overline{\mathcal{O}(x)} \to \overline{\mathcal{O}(y)}$; l'application $\overline{\varphi}_y \otimes \varphi$ est un homomorphisme, que nous désignerons encore par $\overline{\varphi}_y$, de $\mathfrak{M}(x) = \overline{\mathcal{O}(x)} \otimes_{\mathcal{O}(x)} F_U$ dans $\mathfrak{M}(y)$. Soient A une partie de U et B l'ensemble $f^{-1}(A)$. On vérifie immédiatement que, si $\overline{u} \in \mathfrak{M}(U , A)$ l'application $y \to \overline{\varphi}_y\,(\overline{u}(f(y))$ est une fonction méromorphe sur V le long de B . On obtient ainsi un homomorphisme φ_A de $\mathfrak{M}(U , A)$ dans $\mathfrak{M}(V , B)$ qui possède la propriété suivante : si $\overline{u} \in \mathfrak{M}(U , A)$ et si $u' \in F_U$, on a $\varphi_A(\overline{u}\, u') = \varphi_A(\overline{u})\, \varphi(u')$. Il en résulte que φ_A définit un homomorphisme

$$\Phi_A : \mathfrak{M}(U , A) \otimes_{F_U} F_V \to \mathfrak{M}(V , B)$$

(où on considère F_V comme algèbre sur F_U au moyen de l'isomorphisme φ). Nous dirons que Φ_A est l'homomorphisme attaché au morphisme f . Soit maintenant g un morphisme dominant d'une variété W dans la variété V , et soit $h = f \circ g$, $C = g^{-1}(B) = h^{-1}(A)$. A ce morphisme est attaché un homomorphisme Ψ_B de $\mathfrak{M}(V , B) \otimes_{F_V} F_W$ dans $\mathfrak{M}(W , C)$. Par ailleurs, $(\mathfrak{M}(U , A) \otimes_{F_U} F_V) \otimes_{F_V} F_W$ s'identifie à $\mathfrak{M}(U , A) \otimes_{F_U} F_W$. L'homomorphisme Φ_A définit un homomorphisme de cet anneau dans $\mathfrak{M}(V , B) \otimes_{F_V} F_W$, à savoir $\Phi_A \otimes \psi$, où ψ est le cohomomorphisme de g . Par ailleurs, h définit un homomorphisme

$$\Omega_A : \mathfrak{M}(U , A) \otimes_{F_W} F_W \to \mathfrak{M}(W , C) .$$

On a la formule

$$\Omega_A = \Psi_B \circ (\Phi_A \otimes \psi) . \tag{1}$$

Il suffit de vérifier que, si $\bar{u} \in \mathfrak{M}(U , A)$, $z \in C$, $y = g(z)$, $x = f(y)$, η le cohomomorphisme de h , on a

$$\bar{\eta}_z(\bar{u}(x)) = \bar{\psi}_z(\bar{\varphi}_y(\bar{u}(x))) ,$$

ce qui résulte immédiatement des définitions.

THÉORÈME 4 (Théorème de permanence). - Soit f un morphisme propre d'une variété V dans une variété U . Soient A une partie fermée de U et B l'ensemble $f^{-1}(A)$. L'homomorphisme de $\mathfrak{M}(U , A) \otimes_{F_U} F_V$ dans $\mathfrak{M}(V , B)$ attaché à f est alors un isomorphisme du premier de ces anneaux sur le second.

Ce théorème n'est pas identique au théorème de Zariski, qui affirme que, sous certaines conditions, $\mathfrak{h}(U , A)$ est isomorphe à $\mathfrak{h}(V , B)$ (U doit être normal en tout point de A , et, si φ est le cohomomorphisme de f , $\varphi(F_U)$ doit être algébriquement fermé dans F_V). Le théorème que nous donnons ici fournit des résultats moins fins que celui de Zariski quand ce dernier s'applique ; mais il suffit néanmoins à démontrer le théorème de connexité (cf. plus bas) ; par ailleurs, sa démonstration est techniquement moins difficile que celle du théorème de Zariski.

7. Réduction au cas affine.

Dans la démonstration du théorème de permanence, nous désignerons par $\mathfrak{A}(V, U, f, A)$ la conclusion de l'énoncé du théorème. Soit U' un morceau affine de U ; posons $V' = \bar{f}^1(U')$, et désignons par f' la restriction de f à V' ; c'est un morphisme propre de V' dans U' ([1] , exp. 152 , lemme 1 , p. 7). Soit $A' = A \cap U'$. Si, pour tout morceau affine U' de U, $\mathfrak{A}(V', U', f', A')$ est vrai, l'assertion $\mathfrak{A}(V, U, f, A)$ est vraie.

Montrons d'abord que, sous l'hypothèse faite, Φ_A est un monomorphisme. Soient $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ des éléments de $\mathfrak{M}(U, A)$ et $v_1, \dots, v_m$ des éléments de F_V linéairement indépendants sur $\varphi(F_U)$ (nous utilisons les notations du n° 6) tels que $\Sigma_k \varphi_A(\bar{u}_k)v_k = 0$. Soient y un point de B, $x = f(y)$, U' un morceau affine de U contenant x et $V' = \bar{f}^1(U')$; $\bar{o}_{U'}(x)$ et $\bar{o}_{V'}(y)$ s'identifient à $\overline{o_U(x)}$ et $\overline{o_V(y)}$ respectivement, $F_{U'}$ à F_U et $F_{V'}$ à F_V ; ces identifications faites, f et sa restriction f' à V' ont même cohomomorphisme. Pour tout $y' \in V' \cap B$, $\Sigma_k \varphi_{y'}(\bar{u}_k(f(y')))v_k = 0$. Faisant usage de l'assertion $\mathfrak{A}(V', U', f', A')$ on en déduit que les restrictions des $\bar{u}_k$ à $U' \cap A$ sont nulles, donc que $\bar{u}_k(x) = 0$. Comme f est un morphisme dominant et propre, l'ensemble $f(V)$, qui est fermé, est U tout entier, d'où $f(B) = A$; les $\bar{u}_k(x)$ sont donc nulles pour tout $x \in A$, d'où $\bar{u}_k = 0$.

Montrons maintenant que Φ_A est un épimorphisme. Soit $\bar{v}$ un élément de $\mathfrak{M}(V, B)$. Représentons U comme réunion d'une famille finie (U_i') de morceaux affines ; soit $V_i' = \bar{f}^1(U_i')$, $A_i' = U_i' \cap A$. Faisant usage des assertions $\mathfrak{A}(V_i', U_i', f_i', A_i')$ (où f_i' est la restriction de f à U_i'), on voit qu'il existe une famille finie (v_k) d'éléments de F_V linéairement indépendants sur $\varphi(F_U)$ qui possède la propriété suivante : pour tout i, il existe des $\bar{u}_{ik} \in \mathfrak{M}(U_i', A_i')$ tels que l'on ait

$$\bar{v}(y) = \Sigma_k \bar{\varphi}_y(\bar{u}_{ki}(f(y)))v_k$$

pour tout point y de $B \cap V_i'$. Si i et j sont des indices quelconques, on a

$$\Sigma_k \bar{\varphi}_y((\bar{u}_{ki} - \bar{u}_{kj})(f(y)))v_k = 0$$

pour tout $y \in B \cap V_i' \cap V_j'$. Comme

$$f(B \cap V_i' \cap V_j') = A \cap U_i' \cap U_j' ,$$

il résulte de l'assertion

$$\mathfrak{a}(V'_i \cap V'_j\ ,\ U'_i \cap U'_j\ ,\ f'_{ij}\ ,\ A'_{ij})$$

(où f'_{ij} est la restriction de f à $V'_i \cap V'_j$ et $A'_{ij} = A \cap U'_i \cap U'_j$) que $\bar{u}_{ki}$ et $\bar{u}_{kj}$ ont même restriction à $A \cap U'_i \cap U'_j$. Il y a donc, pour chaque k , une application $\bar{u}_k$ de A qui prolonge toutes les $\bar{u}_{ki}$; on sait que les $\bar{u}_k$ sont alors des fonctions méromorphes le long de A , et on a $\bar{v} = \Phi_A(\Sigma_k\, \bar{u}_k \otimes v_k)$, ce qui montre que Φ_A est surjectif.

8. Cas d'un revêtement.

Nous nous proposons de démontrer le théorème de permanence dans le cas où f est un revêtement, c'est-à-dire un morphisme propre et surjectif tel que, pour tout $x \in U$, $f^{-1}(x)$ soit fini. Il existe une variété normale W et un morphisme g de W dans V qui est un revêtement. Soit A une partie fermée de U , et soit $B = f^{-1}(A)$; comme les assertions $\mathfrak{a}(W\ ,\ U\ ,\ f \circ g\ ,\ A)$ et $\mathfrak{a}(W\ ,\ V\ ,\ g\ ,\ B)$ entraînent $\mathfrak{a}(V\ ,\ U\ ,\ f\ ,\ A)$, on peut se limiter au cas où V est normale. On peut de plus, comme on vient de le voir, supposer U affine. Il est bien connu que V est alors également affine ; si P et Q sont les algèbres affines de U et V , le cohomomorphisme φ de f induit un isomorphisme de P sur un sous-anneau P' de Q , qui permet de considérer Q comme un P-module ; comme f est un revêtement, on sait que Q est un $\mathfrak{p}$-module de type fini. Posons $B = f^{-1}(A)$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(U\ ,\ A)$ et désignons par $\mathfrak{q}$ l'idéal engendré par $\varphi(\mathfrak{p})$ dans Q ; l'ensemble des points en lesquels s'annulent les fonctions de $\mathfrak{q}$ est B . Il y a donc un $m > 0$ tel que $\mathfrak{p}^m(V\ ,\ B) \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}(V\ ,\ B)$. Soit $\bar{P}$ la complétion $\mathfrak{p}$-adique de P , qui s'identifie à $\mathfrak{h}(U\ ,\ A)$; on a $\mathfrak{M}(U\ ,\ A) = \bar{P} \otimes_P F_U$, d'où

$$\mathfrak{M}(U\ ,\ A) \otimes_{F_U} F_V = \bar{P} \otimes_P F_V = (\bar{P} \otimes_P Q) \otimes_Q F_V\ .$$

Or, puisque Q est un P-module de type fini, $\bar{P} \otimes_P Q$ est isomorphe à la complétion de Q , considéré comme P-module, c'est-à-dire encore à la complétion $\mathfrak{q}$-adique $\bar{Q}$ de Q (puisque $\mathfrak{q} = \varphi(\mathfrak{p})Q$) (cf. [2] , exp. 18 , théorème 2 , b) ; utilisant les notations de cette référence, on notera que l'hypothèse que $(A\ ,\mathfrak{m})$ est un anneau de Zariski n'a pas été utilisée dans la démonstration de b.). Comme $\bar{Q} \otimes_Q F_V = \mathfrak{M}(V\ ,\ B)$, on obtient ainsi un isomorphisme de $\mathfrak{M}(U\ ,\ A) \otimes_{F_U} F_V$ sur $\mathfrak{M}(V\ ,\ B)$ dont on vérifie tout de suite qu'il est identique à Φ_A . Ceci démontre le théorème de permanence dans le cas d'un revêtement.

9. Réductions.

Elles sont basées sur le fait que, f étant un morphisme de V dans U, g un morphisme de W dans V, A une partie de U, B l'ensemble $f^{-1}(A)$, deux quelconques des assertions $\mathfrak{A}(V, U, f, A)$, $\mathfrak{A}(W, V, g, B)$, $\mathfrak{A}(W, U, f \circ g, A)$ entraînent la troisième.

Soient f un morphisme dominant propre de V dans U et A une partie fermée de U. Il existe une fonction propre g sur une variété $\overline{W}$ qui est une sous-variété fermée d'une puissance D^r de la droite projective D, à valeurs dans V, qui possède les propriétés suivantes : on a $g(\overline{W}) = V$ et le graphe de g est fermé dans $W \times V$. Si W est l'ensemble de définition de g, g est un morphisme propre de W dans V ([1], exp. 152, lemme 1, p. 7). On peut donc se borner à démontrer le théorème de permanence dans le cas où V est une sous-variété ouverte d'une sous-variété fermée $\overline{V}$ de D^r. Le graphe de f est alors une sous-variété fermée de $\overline{V} \times U$, donc aussi de $D^r \times U$ ([1], exp. 152, p. 8, tenant compte de ce que, si I est l'application identique de V sur lui-même, considérée comme fonction sur $\overline{V}$ à valeurs dans V, $(\overline{V}, I)$ est une présentation de Chow de V). On peut donc se limiter au cas où V est une sous-variété fermée de $D^r \times U$, f étant induit sur V par la projection $D^r \times U \to U$. On peut écrire, si $r > 1$, $D^r \times U = D^{r-1} \times (D \times U)$; la projection $D^r \times U \to D \times U$ applique V sur une sous-variété fermée de $D \times U$ (puisque D^{r-1} est complète). Procédant par récurrence sur r, on se ramène donc au cas $r = 1$. On a de plus vu que l'on peut se ramener au cas où U est affine ; soit alors P son algèbre affine. Si $V = \{a\} \times U$ $(a \in D)$, le morphisme f, que nous supposons toujours dominant et par suite surjectif, est un isomorphisme. Laissant ce cas de côté, la projection $D \times U \to D$ fournit une fonction numérique $t \neq 0$ sur V ; si φ est le cohomomorphisme de f, on a $F_V = (\varphi(F_U))(t)$. Si on pose $P' = \varphi(P)$, V est réunion de deux morceaux affines V' et V'' dont les algèbres affines sont $P'[t]$ et $P'[t^{-1}]$ respectivement. Soit $\overline{P}'$ la fermeture entière de P' dans le corps des éléments de F_V qui sont algébriques sur F_U. On peut considérer $\overline{P}'$ comme l'algèbre affine d'une variété affine normale $\overline{U}$; φ est le cohomomorphisme d'un morphisme g de $\overline{U}$ dans U qui est un revêtement. Il y a une sous-variété fermée $\overline{V}$ de $D \times \overline{U}$ qui est réunion de deux morceaux affines dont les algèbres affines sont $\overline{P}'[t]$ et $\overline{P}'[t^{-1}]$ respectivement (t s'identifiant à la fonction sur $\overline{V}$ définie par la projection $D \times \overline{U} \to D$). La projection $D \times \overline{U} \to \overline{U}$ définit un morphisme surjectif propre $\overline{f}$ de $\overline{V}$ sur $\overline{U}$. Par ailleurs, l'application $(a, \overline{x}) \to (a, g(\overline{x}))(a \in D, \overline{x} \in \overline{U})$

induit un morphisme g_V de $\overline{V}$ dans V qui est un revêtement, et on a $f \circ g_V = g \circ \overline{f}$. Posons $B = \overline{f}^{1}(A)$, $\overline{A} = \overline{g}^{1}(A)$; les assertions $\mathfrak{A}(\overline{U}, U, g, A)$, $\mathfrak{A}(\overline{V}, V, g_V, B)$ sont vraies. Il en résulte qu'il suffira d'établir l'assertion $\mathfrak{A}(\overline{V}, \overline{U}, \overline{f}, \overline{A})$. Autrement dit, on pourra supposer sans restriction de généralité que U est normale et que ou bien $\varphi(F_U) = F_V$ ou bien t est transcendant sur $\varphi(F_U)$ (car, si t est algébrique sur $\varphi(F_U)$, F_V est identique au corps des fractions $F_{\overline{U}}$ de $\overline{P}'$).

10. Démonstration dans le cas réduit.

Supposons donc que U soit une variété affine normale dont nous désignerons l'algèbre affine par P, que V soit une sous-variété fermée de $D \times U$, que f soit le morphisme, supposé surjectif, de V dans U induit par la projection $D \times U \to U$, et que, en désignant par φ le cohomomorphisme de f, et par t la fonction numérique sur V définie par la projection $D \times U \to D$ (on suppose que V n'est pas de la forme $\{a\} \times U$, $a \in D$), t ou bien appartienne à $\varphi(F_U)$ ou bien soit transcendant sur ce corps. La variété V est réunion de deux morceaux affines dont les algèbres affines sont $P[t]$ et $P[t^{-1}]$ respectivement. Soit enfin A une partie fermée de U.

Nous allons d'abord montrer que l'homomorphisme Φ_A de $\mathfrak{M}(U, A) \otimes_{F_U} F_V$ dans $\mathfrak{M}(V, B)$ (où $B = \overline{f}^{1}(A)$) est un monomorphisme. Au morphisme f est associé un homomorphisme $\varphi_A : \mathfrak{h}(U, A) \to \mathfrak{h}(V, B)$. Supposons d'abord que $F_V = \varphi(F_U)$. Dans ce cas, il suffira évidemment d'établir que φ_A est un monomorphisme. Or, soit $\overline{u}$ un élément de $\mathfrak{h}(U, A)$ tel que $\varphi_A(\overline{u}) = 0$. Soit x un point quelconque de A, et soit y un point de B tel que $f(y) = x$. Comme U est normale, il résulte d'un théorème de Zariski [1] que l'homomorphisme $\overline{\varphi}_y : \overline{\mathfrak{O}(x)} \to \overline{\mathfrak{O}(y)}$ qui prolonge la restriction de φ à $\mathfrak{O}(x)$ est un monomorphisme. Puisque $\varphi_A(\overline{u}) = 0$, on a $\overline{\varphi}_y(\overline{u}(x)) = 0$, d'où $\overline{u}(x) = 0$; ceci étant vrai pour tout $x \in A$, on a $\overline{u} = 0$. Supposons ensuite que t soit transcendant sur $\varphi(F_U)$. Il suffira dans ce cas de démontrer que Φ_A induit un monomorphisme de $\mathfrak{h}(U, A) \otimes_P P'[t]$, où $P' = \varphi(P)$ est considéré comme un P-module au moyen de l'homomorphisme φ. Il suffira donc de montrer que, si $\overline{u}_0, \dots, \overline{u}_m$ sont des éléments de $\mathfrak{h}(U, A)$ tels que $\sum_{k=0}^{m} \varphi_A(\overline{u}_k)t^k = 0$, les $\overline{u}_k$ sont nuls. Or, soit x un point quelconque de A ; comme on a ici $V = D \times U$, le point $y = (0, x)$ appartient à V, et on a $\sum_{k=0}^{m} \overline{\varphi}_y(\overline{u}_k(x))t^k = 0$. Or $\mathfrak{O}(y)$ est l'anneau local de l'idéal premier de $(\varphi(\mathfrak{O}(x)))[t]$ engendré par $\varphi(\mathfrak{p}(x))$ et t ; sa complétion s'identifie donc à l'anneau de séries formelles $(\overline{\varphi}_y(\overline{\mathfrak{O}(x)}))[[t]]$ en t à coefficients dans

$\bar{\varphi}_y(\mathcal{O}(x))$, et $\bar{\varphi}_y$ est un monomorphisme . Il résulte alors immédiatement de la relation $\Sigma_{k=0}^{m} \varphi_A(\bar{u}_k)t^k = 0$ que l'on a $\Sigma_{k=0}^{m} \bar{\varphi}_y(\bar{u}_k(x))t^k = 0$, d'où $\bar{u}_k(x) = 0$ pour tout k . Ceci étant vrai pour tout x , notre assertion est établie.

Il reste maintenant à montrer que Φ_A est surjectif. Nous désignerons par V_1 et V_2 les morceaux affines de V dont les algèbres affines sont $P'[t]$ et $P'[t^{-1}]$ respectivement, par B_1 et B_2 les intersections de B avec V_1 et V_2 respectivement. Soit $\bar{v}$ une fonction méromorphe sur V le long de B ; ses restrictions à $\bar{V}_1$ et $\bar{V}_2$ sont respectivement dans $\mathfrak{M}(V_1, B_1)$ et $\mathfrak{M}(V_2, B_2)$. Ces restrictions peuvent donc se mettre sous la forme $\bar{v}_1 R_1(t)$ et $\bar{v}_2 R_2(t)$ où $\bar{v}_i$ est une fonction holomorphe sur V_i le long de B_i et $R_i(T)$ une fraction rationnelle en une lettre T à coefficients dans P' , soit $R_i(T) = A_i(T)/B(T)$, A_1 , A_2 et B étant des polynomes à coefficients dans P' tels que $B(t) \neq 0$. Pour montrer que $\bar{v}$ appartient à $\Phi_A(\mathfrak{M}(U, A) \otimes_{F_U} F_V)$, il suffit évidemment de montrer qu'il en est ainsi de $\bar{v}B(t)$; on peut donc supposer que R_1 et R_2 sont des polynomes. Dans ce cas, $R_1(t)\bar{v}_1$ appartient à $\mathfrak{h}(V_1, B_1)$ et $R_2(t)\bar{v}_2$ est le produit d'une puissance de t par un élément de $\mathfrak{h}(V_2, B_2)$. On peut donc supposer que $R_1 = 1$, $R_2(t) = t^s$, $s \geq 0$. Nous allons d'abord nous ramener au cas où $s = 0$. Nous désignerons par Q_1 l'anneau $P'[t]$, par Q_2 l'anneau $P'[t^{-1}]$; nous poserons $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(U, A)$, $\mathfrak{p}' = \varphi(\mathfrak{p})$ et nous désignerons par $\mathfrak{q}_i$ l'idéal de Q_i engendré par $\mathfrak{p}'$; $\mathfrak{q}_i$ est donc l'idéal composé des fonctions de Q_i nulles sur B_i . L'anneau $\mathfrak{h}(V_i, B_i)$ s'identifie à la complétion $\mathfrak{q}_i$-adique de Q_i . Comme $\mathfrak{q}_i$ est l'idéal engendré par $\mathfrak{p}'$, $\bar{v}_2$ est limite dans $\mathfrak{h}(V_2, B_2)$ d'une suite d'éléments de la forme $(D_n(t^{-1}))$, où (D_n) est une suite de polynomes à coefficients dans P' telle que, pour tout n , les coefficients de $D_{n+1} - D_n$ appartiennent à $\mathfrak{p}'^n$. Nous écrirons

$$D_n(T) = \Sigma_{k=0}^{s-1} \varphi(d_{nk})T^k + T^s D'_n(T)$$

où les d_{nk} sont des éléments de P tels que $d_{n+1,k} - d_{n,k} \in \mathfrak{p}^n$ et les D'_n des polynomes à coefficients dans P' tels que $D'_{n+1} - D'_n$ soit à coefficients dans $\mathfrak{p}'^n$. Pour chaque k $(0 \leq k \leq s-1)$, la suite (d_{nk}) converge vers une limite $\bar{d}_k$ dans $\mathfrak{h}(U, A)$; $\varphi_A(\bar{d}_k)$ est donc une fonction holomorphe sur V le long de B . Posons

$$\bar{v}' = \bar{v} - \Sigma_{k=0}^{s-1} \varphi_A(\bar{d}_k)t^{s-k} \quad ;$$

c'est un élément de $\mathfrak{M}(V, B)$ dont la restriction $\bar{v}'_1$ à V_1 appartient à

$\mathfrak{h}(V_1, B_1)$. La restriction de $\Sigma_{k=0}^{s-1} \varphi_A(\bar{d}_k)t^{s-k}$ à V_2 est la fonction méromorphe

$$t^s.\lim_{n \to \infty}(\Sigma_{k=0}^{s-1} \varphi(d_{nk})t^{-k}) = t^s(\bar{v}_2 - t^{-s} \lim_{n \to \infty} D'_n(t^{-1})) \quad ;$$

la restriction de $\bar{v}'$ à v_2 est donc l'élément $\lim_{n \to \infty} D'_n(t^{-1})$, qui est dans $\mathfrak{h}(V_2, B_2)$. Par ailleurs,

$$\Sigma_{k=0}^{s-1} \varphi_A(\bar{d}_k)t^{s-k} = \Phi_A(\Sigma_{k=0}^{s-1} \bar{d}_k \otimes t^{s-k})$$

appartient à $\Phi_A(\mathfrak{M}(U, A) \otimes_{F_U} F_V)$; il nous suffira donc d'établir que $\bar{v}'$ appartient à $\Phi_A(\mathfrak{M}(U, A) \otimes_{F_U} F_V)$. Ceci montre bien qu'on peut se réduire au cas où $s = 1$. Supposons désormais qu'il en soit ainsi. On va alors montrer que $\bar{v}$ appartient à $\varphi_A(\mathfrak{h}(U, A))$, ce qui établira le théorème. L'ensemble $V_1 \cap V_2 = V_{12}$ est un morceau affine de V dont l'algèbre affine est $P'[t, t^{-1}]$; soit $B_{12} = B_1 \cap V_{12} = B_2 \cap V_{12}$; si $\mathfrak{q}_{12}$ est l'idéal engendré par $\mathfrak{p}'$ dans $P'[t, t^{-1}]$, $\mathfrak{h}(V_{12}, B_{12})$ s'identifie à la complétion $\mathfrak{q}_{12}$-adique de $P'[t, t^{-1}]$. L'élément $\bar{v}_1$ (resp. $\bar{v}_2$) est limite d'une suite (v_{1n}) (resp. v_{2n}) d'éléments de Q_1 (resp. Q_2). De plus, comme $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ ont même restriction à V_{12} , la suite $(v_{1n} - v_{2n})$ converge vers 0 dans la topologie $\mathfrak{q}_{12}$-adique de $P'[t, t^{-1}]$. On peut donc supposer sans restriction de généralité que l'on a $v_{1n} - v_{2n} = E_n(t, t^{-1})$, E_n étant un polynome à coefficients dans $\mathfrak{p}'^n$. On peut écrire

$$E_n(t, t^{-1}) = E_{1n}(t) - E_{2n}(t^{-1}) ,$$

où E_{1n} , E_{2n} sont des polynomes à coefficients dans $\mathfrak{p}'^n$; on a alors

$$v_{1n} - E_{1n}(t) = v_{2n} - E_{2n}(t^{-1}) .$$

Or le premier membre appartient à $P'[t]$ et le second à $P'[t^{-1}]$; leur valeur commune appartient donc à l'anneau $P'[t] \cap P'[t^{-1}]$. Montrons que cet anneau est P' . C'est évident si t est transcendant sur $\varphi(F_U)$. Dans le cas où t appartient à $\varphi(F_U)$, on observe que tout anneau de valuation contenant P' contient l'un au moins des éléments t , t^{-1} , donc contient $P'[t] \cap P'[t^{-1}]$, ce qui montre que ce dernier anneau est entier sur P' . Comme U est normale, P' est intégralement clos, ce qui démontre notre assertion dans ce cas. Posons

$$u'_n = v_{1n} - E_{1n}(t) = v_{2n} - E_{2n}(t^{-1}) ,$$

d'où $u'_n = \varphi(u_n)$ avec $u_n \in P$. La suite (u'_n) est à la fois une suite de Cauchy dans $P'[t]$ et dans $P'[t^{-1}]$ (relativement aux topologies $\mathfrak{q}_1$-adique et $\mathfrak{q}_2$-adique respectivement de ces anneaux) ; si nous pouvons montrer que (u_n) est une suite de Cauchy pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique de P, le théorème sera démontré, car on aura $\overline{v} = \varphi_A(\overline{u})$, $\overline{u}$ étant la limite de la suite (u_n) dans $\mathfrak{h}(U, A)$.

Tout se ramène donc (en remplaçant la considération de la suite (u_n) par celle de la suite $(u_{n+1} - u_n)$) à montrer que, si une suite (u'_n) d'éléments de P' converge vers 0 dans $P'[t]$ et $P'[t^{-1}]$, elle converge vers 0 dans $\mathfrak{p}'$. Soit m un exposant > 0 ; écrivons $\mathfrak{p}'^m = \mathfrak{v}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{v}_r$ où $\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_r$ sont des idéaux primaires associés à des idéaux premiers $\mathfrak{w}_1, \dots, \mathfrak{w}_r$ de P' contenant $\mathfrak{p}'$; il suffira de montrer que, pour chaque k $(1 \leq k \leq r)$, il existe un $m(k)$ tel que $u_n \in \mathfrak{v}_k$ pour $n \geqslant n(k)$. Autrement dit, il suffira de montrer que, pour tout idéal premier $\mathfrak{w}$ de P' contenant $\mathfrak{p}'$, la suite (u_n) converge vers 0 dans l'anneau local $P'_{\mathfrak{w}}$ de $\mathfrak{w}$ (muni de la topologie $\mathfrak{w}P'_{\mathfrak{w}}$-adique). Or l'un au moins des anneaux $P'[t]$, $P'[t^{-1}]$ contient un idéal premier $\overline{\mathfrak{w}}$ tel que $\overline{\mathfrak{w}} \cap P' = \mathfrak{w}$. En effet, $\mathfrak{w}$ est l'image par φ d'un idéal premier de P qui contient $\mathfrak{p}$ et qui définit une sous-variété fermée W de U contenue dans A. Comme f est surjectif et propre, il y a au moins une sous-variété fermée Z de V telle que $f(Z) = W$; si Z rencontre par exemple V_1, l'idéal $\overline{\mathfrak{w}}$ des fonctions de $P'[t]$ nulles sur Z répond à la question. Supposons par exemple que $P'[t]$ contienne un idéal premier $\overline{\mathfrak{w}}$ tel que $\overline{\mathfrak{w}} \cap P' = \mathfrak{w}$; on a alors $\mathfrak{q}_1 \subset \overline{\mathfrak{w}}$. Comme la suite (u_n) converge vers 0 relativement à la topologie $\mathfrak{q}_1$-adique, elle converge <u>a fortiori</u> vers 0 dans l'anneau local $P'[t]_{\overline{\mathfrak{w}}}$ de $\overline{\mathfrak{w}}$ (muni de la topologie définie par son idéal premier maximal). Or, P' est un anneau normal ; $P'_{\mathfrak{w}}$ est contenu dans $P'[t]_{\overline{\mathfrak{w}}}$; dans ces conditions, il résulte d'un théorème déjà cité de Zariski que la topologie de $P'_{\mathfrak{w}}$ est induite par celle de $P'[t]_{\overline{\mathfrak{w}}}$. La suite (u_n) converge donc vers 0 dans $P'_{\mathfrak{w}}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

11. <u>Le théorème de connexité.</u>

THÉORÈME 5. - <u>Soit</u> f <u>un morphisme propre et dominant d'une variété</u> V <u>dans une variété normale</u> U. <u>Soit</u> φ <u>le cohomomorphisme de</u> f. <u>Si</u> $F_V/\varphi(F_U)$ <u>est une extension primaire</u> (i.e. <u>tout élément de</u> F_V <u>algébrique sur</u> $\varphi(F_U)$ <u>est radiciel sur</u> $\varphi(F_U)$) , <u>alors, pour toute partie fermée connexe</u> A <u>de</u> U, <u>l'ensemble</u> $B = f^{-1}(A)$ <u>est connexe</u>.

Puisque A est connexe et U normale, l'algèbre $\mathfrak{M}(U, A)$ est un domaine d'intégrité. Puisque $F_V/\varphi(F_U)$ est une extension primaire, on sait que tout diviseur de zéro dans $\mathfrak{M}(U, A) \otimes_{F_U} F_V$ est nilpotent. On en conclut que tout diviseur de 0 dans $\mathfrak{M}(V, B)$ est nilpotent. Or on sait que, si $y \in B$, $\overline{\mathfrak{o}(y)}$ ne contient aucun élément nilpotent $\neq 0$. Il en résulte immédiatement que $\mathfrak{M}(V, B)$ ne contient aucun élément nilpotent $\neq 0$, donc que c'est un domaine d'intégrité, ce qui montre que B est connexe.

On notera que la condition que $F_V/\varphi(F_U)$ soit primaire est nécessaire pour que la conclusion du théorème soit vraie. Soit en effet d le degré de la plus grande extension algébrique séparable de $\varphi(F_U)$ contenue dans F_V ; on peut alors montrer qu'il existe une partie ouverte non vide U' de U telle que, pour tout $x \in U'$, $\overline{f}^1(x)$ admette exactement d composantes connexes distinctes, qui sont d'ailleurs irréductibles. Par ailleurs, la condition que U soit normale ne peut être supprimée de l'énoncé du théorème ; soit en effet $\overline{U}$ une variété normale qui admet un morphisme birationnel g dans U qui soit un revêtement : il peut très bien se faire qu'il existe des points $x \in U$ tels que $\overline{g}^1(x)$ se compose de plusieurs points distincts. Cependant, on voit tout de suite que, les notations étant celles du théorème, on peut remplacer la condition que U soit normale par la condition que, pour tout $x \in A$, l'ensemble $\overline{g}^1(x)$ se compose d'un seul point. Cette condition sera en particulier satisfaite si g est analytiquement irréductible en tout point de A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - La notion de correspondance propre en géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki, t. 10, 1957/58.

[2] GODEMENT (Roger). - Topologies m-adiques, Séminaire Cartan-Chevalley : Géométrie algébrique, t. 8, 1955/56.

[3] ZARISKI (Oscar). - A simple analytical proof of a fundamental property of birational transformations, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 35, 1949, p. 62-66.