MICHEL HERVÉ

Travaux de Köcher sur les formes modulaires

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. nº 132, p. 341-346
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__341_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1956)

TRAVAUX DE KÖCHER SUR LES FORMES MODULAIRES

par Michel HERVÉ

1. Notations relatives aux matrices.

Les majuscules rondes (par exemple $\mathcal{E}$ pour la matrice-unité) désignent des matrices à $2n$ lignes et colonnes ; les majuscules droites (par exemple E pour la matrice-unité) des matrices à n lignes et colonnes. Les majuscules grecques désignent des groupes. Par vecteur, on entendra une matrice à n lignes et 1 colonne.

A' est la matrice déduite de A par symétrie par rapport à la diagonale principale ; $|A|$ est le déterminant de A , $\sigma(A)$ la trace de A . Au sujet de la trace, on rappelle :

1° que $\sigma(BAB^{-1}) = \sigma(A)$;

2° que, si A et B sont symétriques et réelles, $A \geqslant 0$ et $B > 0 \Rightarrow \sigma(AB) \geqslant 0$.

Les lettres S , T , U sont réservées : S aux matrices symétriques entières, T aux matrices symétriques demi-entières, c'est-à-dire telles que les éléments de la diagonale principale et les doubles des autres éléments soient entiers, U aux matrices unimodulaires, c'est-à-dire entières et de déterminant ± 1 .

2. Le groupe symplectique Σ_n .

C'est le groupe des matrices réelles $\mathfrak{M}$ telles que

$$(1) \qquad \mathfrak{M}'\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} .$$

Si l'on pose

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} ,$$

la relation (1) équivaut à

$$(1') \qquad A'C - C'A = B'D - D'B = 0 , \quad A'D - C'B = E .$$

Si $\mathfrak{M}$ vérifie (1), $\mathfrak{M}'$ aussi vérifie (1) et $|\mathfrak{M}| = 1$.

Les <u>principaux sous-groupes</u> de Σ_n considérés par KÖCHER sont :

a. le <u>sous-groupe modulaire</u> Γ_n, formé des matrices <u>entières</u> $\mathfrak{M}$ vérifiant (1) ;

b. pour chaque entier q, le <u>sous-groupe de congruence</u> $\Gamma_n(q)$, formé des $\mathfrak{M} \in \Gamma_n$ telles que $\mathfrak{M} \equiv \pm \mathcal{E} \pmod{q}$. L'index $[\Gamma_n : \Gamma_n(q)]$ est fini ; une récurrence sur n permet de le calculer.

3. <u>Les automorphismes symplectiques.</u>

Ils opèrent sur le demi-plan généralisé h_n, partie ouverte de $C^{\frac{n(n+1)}{2}}$ définie comme suit : les coordonnées d'un point de h_n sont les éléments d'une matrice Z telle que $Z' = Z$ et $\operatorname{Im} Z > 0$.

Les automorphismes analytiques de h_n sont les applications

$$(2) \qquad Z \to \mathfrak{M} < Z > = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \quad \text{où} \quad \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Sigma_n \ ;$$

ils forment un groupe transitif ; seules les matrices $\pm \mathfrak{M}$ définissent le même automorphisme.

On vérifie la formule

$$(3) \qquad \mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_2 < Z >> = (\mathfrak{M}_1 \ \mathfrak{M}_2) < Z >$$

et, en posant

$$j_{\mathfrak{M}}(Z) = |CZ + D| \qquad \text{avec} \quad \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} ,$$

la formule

$$(4) \qquad j_{\mathfrak{M}_1}(\mathfrak{M}_2 < Z >) = \frac{j_{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}(Z)}{j_{\mathfrak{M}_2}(Z)}$$

A chaque matrice $\mathfrak{M} \in \Sigma_n$ peut être associé un opérateur $\mathring{\mathfrak{M}}_k$ agissant sur les fonctions f définies sur h_n :

$$(5) \qquad \mathring{\mathfrak{M}}_k f(Z) = [j_{\mathfrak{M}}(Z)]^{-k} f(\mathfrak{M} < Z >)$$

où k est un entier ; lorsque cet entier est fixé, on peut écrire $\mathring{\mathfrak{M}}$ au lieu de $\mathring{\mathfrak{M}}_k$. Avec cette convention, des formules (3) et (4) on déduit

$$(6) \qquad \mathring{\mathfrak{M}}_2(\mathring{\mathfrak{M}}_1 f)(Z) = (\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2)^{\circ} f(Z) .$$

Notons que, pour S entière et symétrique, $\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \Gamma_n$ et $\mathring{\mathfrak{M}} f(Z) = f(Z + S)$

4. Les formes modulaires considérées par SIEGEL [3].

SIEGEL considère le groupe modulaire Γ_n et construit dans h_n un domaine fondamental S_n pour ce groupe ; $Z \in S_n$ si les 3 conditions suivantes sont remplies :

1° pour chaque $\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$, $|CZ + D|$ est de module $\geqslant 1$;

2° la matrice $\operatorname{Im} Z$ est réduite au sens de MINKOWSKI [3] ;

3° la matrice $\mathcal{R}e\, Z$ a tous ses éléments compris entre $\pm \frac{1}{2}$.

Une conséquence de ces conditions est que $Z \in S_n \Longrightarrow \operatorname{Im} Z > c_1 E$, c_1 étant une constante positive. D'autre part S_n n'est pas borné, car $\lambda \geqslant 1 \Longrightarrow i\lambda E \in S_n$.

SIEGEL dit que $f(Z)$ est une forme modulaire de poids k si $f(Z)$ remplit les 3 hypothèses suivantes :

1° sur h_n , $f(Z)$ est fonction holomorphe des $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments de Z

2° $\mathfrak{M} \in \Gamma_n \Longrightarrow \overset{\circ}{\mathfrak{M}}_k f(Z) \equiv f(Z)$; en particulier, $f(Z + S) \equiv f(Z)$;

3° $f(Z)$ est bornée sur le domaine fondamental S_n.

Avec cette définition, il montre :

a. que toute forme modulaire de poids négatif (resp. nul) est identiquement nulle (resp. constante) ;

b. en utilisant l'hypothèse 3, que, dans le développement de Fourier (normalement convergent sur tout compact de h_n) d'une forme modulaire $f(Z)$:

$$f(Z) = \sum_T a(T)\, e^{2i\pi\, \sigma(TZ)} \quad ,$$

$a(T) \neq 0 \Longrightarrow T \geqslant 0$;

c. à l'aide de b , que l'espace vectoriel sur C des formes modulaires de poids $k > 0$ a une dimension

$$O(k^{\frac{n(n+1)}{2}}) \; ;$$

de là résulte, par le procédé classique, que $\frac{n(n+1)}{2} + 2$ formes modulaires sont liées par une relation algébrique isobarique ; les séries d'Eisenstein (analogues à celles de Poincaré) permettent de construire $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ formes modulaires qui ne sont pas liées par une telle relation.

5. Principaux résultats de KÖCHER [1].

Le résultat le plus frappant est que, pour $n > 1$, l'hypothèse 3 de Siegel (fonction bornée sur le domaine fondamental) est une conséquence des deux autres, non seulement pour les formes relatives au groupe modulaire Γ_n, mais aussi pour les formes relatives au groupe de congruence $\Gamma_n(q)$. Voici la démonstration complète de ce résultat.

LEMME (valable seulement pour $n > 1$). - Si l'on a pas $T \leq 0$ (resp. $T \geq 0$), étant donnés les entiers q et m, il existe une matrice unimodulaire U telle que $U \equiv \pm E \pmod{q}$, $|U| = 1$ et $\sigma(U' TU) > m$ (resp. $< -m$).

Si l'on n'a pas $T \leq 0$, il existe un vecteur x, à éléments entiers x_i, tel que $x' Tx > 0$; soient A la matrice formée de n colonnes identiques à x, et D une matrice réduite à une diagonale principale formée d'entiers d_i. Comme $\sigma(AD) = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i$, on peut choisir $D \neq 0$ telle que $\sigma(AD) = 0$; ce choix fait, si l'on pose $U = E + dAD$ (d entier multiple de q), on a $U \equiv E \pmod{q}$, $|U| = 1 + d\,\sigma(AD) = 1$ et $\sigma(U' TU) = \sigma(T) + 2\,d\,\sigma(TAD) + d^2\sigma(D^2).x' Tx$, donc U répond à la question dès que d est assez grand.

THÉORÈME. - Toute forme relative au groupe de congruence $\Gamma_n(q)$ est bornée pour $\operatorname{Im} Z \gg cE$, quel que soit le nombre $c > 0$.

1re partie. - Si $f(Z)$ est une forme de poids k relative à $\Gamma_n(q)$, $\mathfrak{M} \in \Gamma_n(q) \Rightarrow \overset{\circ}{\mathfrak{M}}_k f(Z) \equiv f(Z)$; en particulier, pour S entière et symétrique, $f(Z + qS) \equiv f(Z)$, $f(Z)$ est donc développable, et de façon unique, en série de Fourier normalement convergente sur tout compact :

$$f(Z) = \sum_T a(T) \exp\left(\frac{2i\pi}{q}\sigma(TZ)\right) \tag{7}$$

Si $U \equiv \pm E \pmod{q}$, $\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_n(q)$; si en outre $|U| = 1$, $j_{\mathfrak{M}}(Z) \equiv 1$, donc

$$U \equiv \pm E \pmod{q} \text{ et } |U| = 1 \Rightarrow f(U' ZU) \equiv f(Z) ;$$

alors, par suite de l'unicité du développement (7),

$$U \equiv \pm E \pmod{q} \text{ et } |U| = 1 \Longrightarrow a(U' TU) = a(T) .$$

D'autre part, (7) donne en particulier

(7') $$f(iE) = \sum_T a(T) \exp\left(-\frac{2\pi}{q}\,\sigma(T)\right)$$

et ce développement doit être absolument convergent ; mais, d'après le lemme, si pour une matrice T on a $a(T) \neq 0$ sans que $T \geqslant 0$, (7') a une infinité de termes de modules $> |a(T)|$, ce qui est absurde. Ainsi, dans (7), $a(T) \neq 0 \Longrightarrow T \geqslant 0$.

2e partie. - Etant donné $c > 0$, pour $T \geqslant 0$,

$$\operatorname{Im} Z > cE \Longrightarrow \operatorname{Im}\,\sigma(TZ) \geqslant \operatorname{Im}\,\sigma(TicE)\,,$$

donc, pour $\operatorname{Im} Z > cE$, le terme général du développement (7) est majoré par le terme général du développement de $f(icE)$; comme celui-ci est absolument convergent, $f(Z)$ est bornée pour $\operatorname{Im} Z > cE$. Le théorème est établi.

La convergence normale de (7) pour $\operatorname{Im} Z > cE$ permet aussi de montrer que $f(Z)$ a une limite finie quand Z s'éloigne à l'infini dans certaines conditions précises : par exemple quand un élément diagonal z_{ii} de Z a une partie réelle fixe et une partie imaginaire tendant vers $+\infty$, tandis que tous les autres éléments de Z sont fixes ; la limite est fonction holomorphe des éléments de Z qui n'appartiennent ni à la i-ième ligne, ni à la i-ième colonne.

6. Autres résultats de KÖCHER [1 et 2] .

Les propriétés a et c ci-dessus, établies par SIEGEL pour les formes relatives au groupe modulaire Γ_n, sont étendues sans difficulté aux formes relatives au groupe de congruence $\Gamma_n(q)$.

D'autre part, soient $f(Z)$ une forme relative à $\Gamma_n(q)$ et $\mathcal{R}$ une matrice symplectique rationnelle ; choisissons l'entier $p(\mathcal{R})$ de manière que $p\,\mathcal{R}$ et $p\,\mathcal{R}^{-1}$ soient entières, et posons

$$q' = q[p(\mathcal{R})]^2 : \mathcal{M} \in \Gamma_n(q') \Longrightarrow \mathcal{R}\,\mathcal{M}\,\mathcal{R}^{-1} \in \Gamma_n(q)$$

donc, d'après (6),

$$\mathcal{M} \in \Gamma_n(q') \Longrightarrow \mathring{\mathcal{M}}\ (\mathring{\mathcal{R}}\ f)(Z) \equiv \mathring{\mathcal{R}}\, f(Z)\,.$$

Ainsi $\mathring{\mathcal{R}}\ f(Z)$ est une forme relative à $\Gamma_n(q')$, et le théorème ci-dessus peut lui être appliqué, ainsi que le développement (7) (avec q' à la place de q) portant seulement sur les $T \geqslant 0$.

Dans [2], étant donnée une forme $f(Z)$ relative à $\Gamma_n(q)$, on étudie la famille φ obtenue en considérant, pour chaque matrice symplectique rationnelle $\mathfrak{R}$,

$$\lim_{y \to +\infty} \overset{\circ}{\mathfrak{R}} f \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & iy \end{pmatrix} \quad (\text{où } Z_1 \in h_{n-1}) \ ;$$

d'après ce qui précède, cette limite existe pour chaque $\mathfrak{R}$, et c'est une fonction de Z_1 holomorphe sur h_{n-1}. C'est même une forme relative à $\Gamma_{n-1}(q')$.

Lorsque toutes les fonctions de φ sont identiquement nulles, KÖCHER dit que $f(Z)$ est une "Spitzenform". Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que, dans le développement (7) de chaque $\overset{\circ}{\mathfrak{R}} f(Z)$, $a(T) \neq 0 \Rightarrow T > 0$.

Enfin un produit scalaire est défini dans l'espace des Spitzenformen de poids donné.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KÖCHER (Max). - Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades, I., Math. Z., t. 59, 1954, p. 399-416.

[2] KÖCHER (Max). - Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades, II., Math. Z., t. 61, 1955, p. 455-466.

[3] SIEGEL (Carl Ludwig). - Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Annalen, t. 116, 1939, p. 617-657.

[4] SIEGEL (Carl Ludwig). - Symplectic geometry, Amer. J. Math., t. 65, 1943, p. 1-86.