PAUL GERMAIN

Les équations du type mixte et le problème de Tricomi

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. nº 124, p. 261-272

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__261_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1955)

LES ÉQUATIONS DU TYPE MIXTE ET LE PROBLÈME DE TRICOMI.

par Paul GERMAIN

Une équation aux dérivées partielles du 2e ordre est du type mixte si elle change de type (elliptique ou hyperbolique) à l'intérieur du domaine où l'on étudie ses solutions. Les équations considérées sont linéaires ; sauf avis contraire, on n'envisagera même que l'équation à 2 variables

(E) $$L(u) = k(z)u_{xx} + u_{zz} = 0 \quad ,$$

la fonction $k(z)$ étant croissante, continûment dérivable, nulle avec z .

L'étude de ces équations s'est développée depuis une dizaine d'années (3 mémoires avant 1943 : [31] , [12] , [21]) en raison du rôle important qu'elles jouent en aérodynamique transsonnique [13] .

Dans cette analyse, on a laissé de côté les travaux nettement orientés vers les applications ; on voudrait présenter une synthèse des résultats les plus significatifs, sans s'astreindre à suivre l'ordre historique dans lequel ils ont été atteints.

1. L'équation de Tricomi.

L'équation (E) la plus simple correspond au cas où $k(z) = z$; elle apparaît en 1923 dans le grand mémoire de TRICOMI [31] . On pose $3y = 2z^{3/2}$, $r^2 = x^2 + y^2$, $x = rt$. Dans P_h $(z<0)$, l'équation de Tricomi écrite avec les variables caractéristiques $\ell = x - iy$, $m = x + iy$ est une équation d'Euler-Poisson [8] . Ceci explique les résultats suivants :

a. Groupe attaché à l'équation [17] , [19] . - Les translations parallèles à l'axe des x et les homothéties $x' = \mu x$, $y' = \mu y$, laissent invariante l'équation ; d'autre part si $u(r , t)$ est une solution, $r^{-1/3} u(r^{-1} , t)$ est également solution. On peut donc attacher à l'équation un groupe de transformations à 3 paramètres. Dans P_e $(z > 0)$ muni des variables x , y , ce groupe est celui des déplacements de la géométrie de Poincaré ; les images des droites dans P_e sont "les courbes normales". Une transformation T^+ ainsi définie sur P_e se prolonge dans P_h ; de façon précise si $I(J)$ est l'antécédent (l'homologue) du point ω à l'infini de l'axe des x , et si $\mathcal{D}^+(P)$ $(\mathcal{D}^-(P))$ sont les domaines définis par $r_P^2 > 0$ $(r_P^2 < 0)$ avec $r_P^2 = (x - x_P)^2 + y^2$, (x_P abscisse du point P de l'axe des x), T^+ établit une correspondance biunivoque et bicontinue entre $\mathcal{D}^+(I)$ et

$\mathcal{D}^+(J)$. Il existe également des transformations analogues T^- faisant correspondre $\mathcal{D}^-(I)$ et $\mathcal{D}^-(J)$. Ces résultats conduisent à la définition d'un point à l'infini sur les caractéristiques $r_p^2 = 0$, ces points à l'infini forment les caractéristiques à l'infini de P_h , dont le point ω situé sur Ox est aussi le point à l'infini de P_e . Sur le plan (x , z) ainsi complété, deux transformations T^+ et T^- convenablement associées forme une seule transformation T biunivoque et bicontinue. Ces définitions permettent d'étudier aisément le comportement à l'infini des solutions.

b. <u>Solutions de Darboux</u> [17], [19]. - En séparant les variables, on est conduit à former les solutions

$$(1) \qquad r^{-\frac{1}{6}-s}\, h_s\Big(\frac{y^2}{r^2}\Big) = r^{-\frac{1}{6}-s}\, E\Big(\frac{1}{12}+\frac{s}{2}\,,\ \frac{1}{12}-\frac{s}{2}\,,\ \frac{2}{3}\,,\ \frac{y^2}{r^2}\Big) \ ;$$

s est un paramètre, E une solution de l'équation hypergéométrique. De telles solutions sont toujours analytiques soit dans $\mathcal{D}^+(0)$, soit dans $\mathcal{D}^-(0)$; en général elles sont singulières sur les caractéristiques de 0 . Nous n'insistons pas sur les cas où (1) est un polynôme ou une fraction rationnelle, mais à titre d'exemple nous signalerons la solution

$$(2) \qquad (-y^2)^{-\frac{1}{12}}\, F\Big(\frac{1}{12}\,,\ \frac{5}{12}\,,\ 1\,,\ \frac{r^2}{y^2}\Big) \qquad (s = 0)$$

régulière au voisinage de la caractéristique $\ell = 0$ qui devient infinie comme

$$(3) \qquad -\frac{1}{\pi}\,(-y^2)^{-\frac{1}{12}}\,\mathrm{Log}\Big(\frac{r^2}{-y^2}\Big) \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2\pi}\,(-y^2)^{\frac{1}{12}}\,\mathrm{Log}\,\frac{r^2}{y^2}$$

au voisinage de la caractéristique $m = 0$ suivant qu'on effectue le prolongement dans $\mathcal{D}^+(0)$ ou $\mathcal{D}^-(0)$. Dans le cas où $s = -\frac{1}{2}$, une solution (1) s'écrit

$$(4) \qquad (r - x)^{\frac{1}{3}} - (r + x)^{\frac{1}{3}}$$

elle est uniforme dans $\mathcal{D}^+(0)$ mais prend trois valeurs dans $\mathcal{D}^-(0)$; on peut la rendre uniforme en recouvrant $\mathcal{D}^-(0)$ de 3 feuillets raccordés convenablement. Cette dernière solution joue un rôle de premier plan dans certains problèmes d'aérodynamique. Des solutions (1) (premières solutions de Darboux), on déduit les "<u>solutions générales de Darboux</u>" par application d'une transformation T . Appelant A et B les homologues de 0 et ω , on obtient par exemple les solutions

$$(5) \qquad (r_A^2\, r_B^2)^{-\frac{1}{12}} \Big[\frac{r_A}{r_B}\Big]^s\, h_s\Big(\frac{4y^2\, y_1^2}{r_A^2\, r_B^2}\Big) \qquad (AB = 2y_1)$$

qui dans le plan complété n'admettent d'autres lignes singulières que les caractéristiques $r_A^2 = r_B^2 = 0$. Par exemple (2) devient ainsi la fonction de Riemann

$$R(M , P) = - \left(\frac{y^2}{y_1^2}\right)^{-\frac{1}{12}} F\left(\frac{1}{12} , \frac{5}{12} , 1 , \frac{r_A^2 r_B^2}{4y^2 y_1^2}\right)$$

qui est bien analytique au voisinage de $M(x = 0 , 4z^3 = -9y_1^2)$, mais qui devient d'après (3) infinie sur les caractéristiques "réfléchies" comme

$$-\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{y^2}{y_1^2}\right)^{-\frac{1}{12}} \mathrm{Log}\left(\frac{r_A^2 r_B^2}{+4y^2 y^2}\right) \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{y^2}{y_1^2}\right)^{-\frac{1}{12}} \mathrm{Log}\left(\frac{r_A^2 r_B^2}{-4y^2 y_1^2}\right)$$

suivant qu'on effectue le prolongement dans P_h ou en passant par P_e . Si dans (5) on change la constante y_1^2 en $-y_0^2$, on obtient des solutions, ayant un seul point singulier à distance finie situé dans P_e , (qui généralisent en un sens les fonctions harmoniques $r^n \cos n\theta$, $r^n \sin n\theta$) . Les solutions correspondant à $s = 0$ sont des solutions élémentaires. Voir également [6] , [7] , [32] .

2. Les solutions élémentaires de l'équation (E), [14] , [20] .

Dans le cas général de l'équation (E) , on n'a pas encore obtenu de solutions généralisant les solutions de Darboux (bien qu'un théorème de "similitude" (1) entre les solutions d'une équation (E) et d'une équation de Tricomi apparaisse très probable). Toutefois il est aisé de définir des solutions élémentaires de (E). On utilise la transformation de Fourier opérant sur les distributions tempérées. A la solution élémentaire $e(M , P) = e(x , z ; 0 , z_0)$ solution de $L(u) = \delta_{0,z_0}$, on fait correspondre la fonction $E(\alpha , z , z_0)$ solution de

$$\mathcal{L}[U] = U_{zz} - 4\pi^2\alpha^2 k(z)\, U = \delta_{z_0} \tag{6}$$

par la transformation de Fourier $E = \mathcal{F}e$, $e = \mathcal{F}^{-1} E$; pour $z \geqslant z_0$ $(z \leqslant z_0)$, E est une fonction continûment différentiable en z soit $E_1 (E_2)$ et l'on a

$$E_1(z_0) = E_2(z_0) \qquad E_{1z}(z_0) = E_{2z}(z_0) = 1$$

Nous notons $S(z)$, $C(z)$, $S(z , z_0)$ les solutions de $\mathcal{L}(U) = 0$, satisfaisant aux conditions

---

(1) Au sens utilisé par L. BERS pour les équations de type elliptique. Par exemple [1] .

$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ S_z(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C(0) = 1 \\ C_z(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} S(z_0\,,\,z_0) = 0 \\ S_z(z_0\,,\,z_0) = 1 \end{cases} \quad [S(z\,,\,z_0) = C(z_0)\,S(z) - S(z_0)\,C(z)]$$

pour α très grand ces fonctions admettent des développements asymptotiques [22] analogues à ceux des fonctions de Bessel $J_{2\pi\alpha}(2\pi\alpha e^{-z})$, c'est-à-dire ayant une forme très différente suivant le signe de z.

Voici deux exemples simples ; pour z_0, $z \leqslant 0$, on peut poser $E_1 = S(z\,,\,z_0)$, $E_2 = 0$ ou $E_1 = 0$, $E_2 = -S(z\,,\,z_0)$; on obtient ainsi des distributions solutions élémentaires conduisant à la fonction de Riemann du point P ; par exemple dans le premier cas, le support de e est le triangle PAB (A et B sont les pieds des caractéristiques issues de P sur l'axe des x) et sur ce triangle, elle est proportionnelle à la fonction classique de Riemann.

Dans la suite, nous nous limitons à la bande $z_1 \geqslant z \geqslant z_2$ et imposons à E de s'annuler sur $z = z_1$ et $z = z_2$. Un caldul simple montre que

$$E_1 = \frac{S(z_0\,,\,z_2)\,S(z\,,\,z_1)}{S(z_1\,,\,z_2)}\,, \qquad E_2 = \frac{S(z_0\,,\,z_1)\,S(z\,,\,z_2)}{S(z_1\,,\,z_2)} \tag{7}$$

Ce sont des fonctions méromorphes de α admettant une infinité dénombrable de pôles simples qui sont réels si $z_2 < z_1 \leqslant 0$, purement imaginaires si $0 \leqslant z_2 \leqslant z_1$, réels et purement imaginaires si $z_2 < 0 < z_1$. Ceci conduit lorsqu'on remonte à la fonction $e(M\,,\,P)$ à distinguer les 3 cas généraux suivants :

<u>Bande elliptique</u> $0 \leqslant z_2 < z_1$. Le calcul de $e(M\,,\,P)$ ne présente aucune difficulté spéciale ; cette fonction (qui est la fonction de Green de la bande) présente au point P la singularité logarithmique classique.

<u>Bande mixte</u> $z_2 < 0 < z_1$. L'étude est alors un peu plus délicate en raison de l'indétermination apparaissant dans la division (formule (7)). Dans le plan de la variable α on effectuera par exemple l'intégrale de Fourier sur un chemin longeant l'axe des x mais laissant tous les pôles d'un même côté. Ceci dit, si $z_0 > 0$, $e(M\,,\,P)$ est une solution régulière dans la bande excepté au voisinage de $(0\,,\,z_0)$ où elle présente la singularité logarithmique classique. Si $z_0 < 0$, on étudie la distribution solution $e(M\,,\,P)$ en considérant la contribution fournie par les termes prépondérants dans le développement asymptotique de $E(\alpha\,,\,z\,,\,z_0)$. Nous résumerons les résultats auxquels on est conduit. La distribution $e(M\,,\,P)$ est une fonction continue sauf sur les caractéristiques issues de P situées dans un demi-plan (par exemple $x < 0$) et sur leurs "réfléchies" sur les droites $z = 0$ et $z = z_2$. Le long de certains arcs de ces caractéristiques la fonction présente des discontinuités

finies égales à

$$\pm \frac{[k(z)\ k(z_0)]^{1/4}}{2}$$

c'est-à-dire proportionnelles aux valeurs que prend la fonction de Riemann définie en un point de ces lignes ; sur les autres arcs la fonction devient infinie comme un logarithme

$$(\pm \frac{[k(z)\ k(z_0)]^{-1/4}\ \mathrm{Log}\,\varepsilon}{2}) ;$$

la singularité change de nature par réflexion sur $z = 0$, mais non par réflexion sur $z = z_2$. Une telle solution élémentaire dont les singularités se propagent dans le sens des x négatifs est dite "orientée" dans cette direction. Naturellement, ce sont ces solutions élémentaires orientées qui jouent un rôle important dans la résolution des problèmes aux limites. Si $z_0 = 0$ (cas limite) , $e(M , P)$ devient infinie comme $C\,\varepsilon^{-1/6}$ le long des caractéristiques singulières. Toute cette étude met en évidence la variation d'une solution élémentaire lorsque le point singulier P varie dans un domaine où l'équation change de type.

<u>Bande hyperbolique</u> $z_2 < z_1 < 0$. L'étude se fait comme dans le cas précédent. On peut définir ainsi une solution élémentaire orientée continue dans la bande $z_2 < z < z_1$ sauf sur les arcs de caractéristiques issus de P et situés dans $x < 0$, et sur leurs "réfléchis" le long de $z = z_1$ et de $z = z_2$; le long de tels arcs, $e(M , P)$ admet les discontinuités égales à

$$\pm \frac{[k(z)\ k(z_0)]^{1/4}}{2} .$$

De plus $e(M , P) = 0$ en tout point $M(x_3 , z_3)$ de la bande tel que $e(M , P)$ reste continu sur la demi-droite $z = z_3$, $x > x_3$. Au voisinage de P , $e(M , P)$ est proportionnelle à la fonction de Riemann classique dans l'angle de caractéristiques orientées vers les x négatifs.

On étudie de façon analogue les divers cas particuliers, notamment celui où $z_1 = 0$

3. <u>Généralités sur les problèmes aux limites.</u>

Signalons d'abord, sans trop insister, les problèmes elliptiques ou hyperboliques singuliers : à l'intérieur du domaine où doit être définie la solution, l'équation est d'un type déterminé, mais une partie des données est portée par l'axe des x . Dans le cas d'un problème hyperbolique, les résultats précédents fournissent la solution comme dans les cas classiques ; si $k(z) = z$ (équation de Tricomi), on obtient des résultats explicites particulièrement simples. On peut également développer des méthodes d'approximations successives après avoir mis l'équation (E) sous la forme [18].

$$\eta \varphi_{xx} + \varphi_{\eta\eta} + A(\eta)\varphi = 0 \quad (8)$$

Voir également [9], [15], [27]. Dans le cas d'un problème de Dirichlet singulier, on peut adapter aisément les méthodes conduisant aux démonstrations du théorème d'existence dans le cas classique [3], [18]. Signalons en particulier que si $k(z) = z$ et si le domaine est limité par une courbe normale et un segment de l'axe des x, on obtient immédiatement la fonction de Green en utilisant la méthode des images comme on le fait dans la théorie des fonctions harmoniques pour former la fonction de Green du cercle [17].

Les problèmes aux limites essentiellement nouveaux, introduits par la théorie des équations du type mixte, sont ceux qui conduisent à définir la solution dans un domaine ayant des points dans P_e et dans P_h ; le plus simple est le "problème de Tricomi" : étant donné un arc simple (Γ) tracé dans P_e et ayant ses extrémités A et B sur l'axe des x, il faut trouver une solution de (E) dans le domaine $\Delta(\Gamma, A, B)$ limité par (Γ) et les caractéristiques concourrantes AC et BC connaissant les valeurs de u sur (Γ) et sur la caractéristique AC. Nous appelons "problème de Tricomi conjugué" celui qui consiste à trouver u connaissant ses valeurs sur (Γ) et sur BC.

Les résultats du n° 2 permettent de définir une "fonction de Green $G(M, P)$ du problème de Tricomi". C'est une fonction définie pour $M \in \overline{\Delta}$, $P \in \Delta$, telle que

1) $G(M, P)$ est nul si M appartient à (Γ) ou à BC ;

2) $G(M, P) - e(M, P)$ est une solution continue de (E) dans $\overline{\Delta}$; $e(M, P)$ désigne la solution élémentaire précédemment formée orientée vers les x négatifs (z_1 et z_2 étant choisis pour que $\overline{\Delta}$ soit à l'intérieur de la bande $z_2 < z < z_1$).

Pour chaque point P de Δ, $G(M, P)$ peut s'obtenir comme solution d'un problème conjugué ; admettons l'existence d'une solution pour ce problème. Si on applique la formule de Green à une solution de (E) et à $G(M, P)$, on peut exprimer $u(P)$ en fonction des valeurs u sur (Γ) et sur AC. L'existence de la solution du problème conjugué entraîne donc l'unicité de la solution du problème direct. Admettons encore l'existence d'une fonction de Green pour le problème conjugué $\overline{G}(M, P)$; une application de la formule de Green conduit à l'identité $G(M, P) = \overline{G}(P, M)$; pour M fixé dans Δ, $G(M, P)$ est une fonction des coordonnées de P, solution de (E). Cette identité permet également d'étudier la limite de $G(M, P)$, lorsque M étant fixé dans $\overline{\Delta}$, P tend vers un point de la frontière de Δ . Enfin, on peut calculer en chaque point P de Δ , la valeur de la solution u(P) du problème de Tricomi (nouvelle application de la formule de Green) et vérifier que cette solution prend bien les valeurs données sur (Γ) et sur AC [14].

Si (E) est l'équation de Tricomi, et si (Γ) est une courbe normale, il est possible [16] de calculer explicitement les fonctions de Green $G(M , P)$ et $\overline{G}(M , P)$. Les calculs et les résultats sont assez compliqués ; esquissons brièvement la méthode suivie. D'abord, une transformation T permet de transformer (Γ) en l'axe des z $(t = 0)$ AC en une des caractéristiques de l'origine $x = 0$, BC en l'une des caractéristiques à l'infini (les variables r et t ont été définies au n° 1). Posons $r = e^{\xi}$ et $\lambda = \int_t^1 (1 - v^2)^{-2/3} dv$, l'équation de Tricomi s'écrit

$$u_{\lambda\lambda} + (1 - t^2)^{1/3} (u_{\xi\xi} + 1/3\, u_{\xi}) = 0$$

elle est du type elliptique pour $\lambda > 0$, hyperbolique pour $\lambda < 0$, et le domaine envisagé est alors le demi-plan $\lambda < \lambda_1$ $(t > 0)$. Les méthodes utilisées au n° 2 permettent de construire les solutions élémentaires orientées nulles sur $\lambda = \lambda_1$, et qui par retour au problème initial, correspondent aux fonctions $G(M , P)$ et $\overline{G}(M , P)$ cherchées.

4. Bornes a priori des solutions.

On a proposé diverses "limitations a priori" pour les solutions des problèmes aux limites envisagées plus haut [4], [25], [27]. Citons 2 exemples importants.

a. Problème de Cauchy. - Les données étant portées par $z = z_1$ $(z_1 \leq 0)$. Un théorème énoncé par BERS [4] et précisé dans [15] dit que : si $u(x , z_1) = \tau(x)$, $u_z(x , z_1) = \nu(x)$ $(a \leq x \leq b)$ la solution u du problème de Cauchy ainsi définie dans $z < z_1$ vérifie les inégalités

(9) $\operatorname{Inf} [\tau(x)] + (z - z_1) \operatorname{Sup} (\nu(x)) \leq u(x , z) \leq \operatorname{Sup} [\tau(x)] + (z - z_1) \operatorname{Inf} \nu(x)$ $(a \leq x \leq b)$.

Ces bornes sont donc indépendantes de la fonction $k(z)$, le résultat est valable si k est une fonction croissante, continue par morceaux. Si on considère la fonction $S(z , z_0)$ définie plus haut et la solution $C(z , z_0)$ de $\mathcal{L}(U) = 0$ vérifiant $C(z_0 ; z_0) = 1$, $C_z(z , z_0) = 0$ c'est-à-dire

$$C(z , z_0) = S_z(z_0)\, C(z) - C_z(z_0)\, S(z) = -[S(z , z_0)]_{z_0}$$

ce résultat est une conséquence du suivant : comme fonction de la variable réelle α , $C(z , z_0)$ est une fonction de type positif (ceci se prouve en approchant $k(z)$ par une fonction étagée croissante pour laquelle la propriété se vérifie aisément). On en déduit que $-S(z, z_0)$ est également de type positif. La valeur des bornes données par (9) en découle immédiatement.

b. Problème de Tricomi. - Un théorème du "maximum" fut d'abord énoncé pour le problème de Tricomi dans le cas où $k(z) = z$, [17], sous la forme suivante : si les données de Tricomi sont nulles sur AC, la solution dans Δ atteint son maximum sur (Γ) ou sur AC [17], [19]. Ce résultat a été étendu à une classe d'équations (E) [2] :

le théorème du maximum est vrai si

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{k(z)^{-1/4}\right\} \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad z < 0 .$$

Les auteurs qui ont formulé ce résultat l'ont obtenu comme corollaire d'un intéressant théorème relatif aux bornes d'une solution d'une équation linéaire du type hyperbolique.

5. Unicité de la solution d'un problème de Tricomi.

Le théorème est une conséquence immédiate du théorème du maximum lorsque celui-ci s'applique. Mais aucune preuve directe du théorème d'unicité n'a été donnée dans le cas le plus général, bien que le résultat ne semble pas faire de doute. FRANKL [10] obtient le résultat cherché lorsque $F(z) \geqslant 0$ pour $z < 0$;

$$F(z) = 3k'^2(z) - 2k(z)\, k''(z) .$$

Tout récemment PROTTER [30] étend ce résultat aux cas où $k'''(z) \leqslant 0$ lorsque $F(z) < 0$, $z < 0$. Précédemment ce même auteur [26] donnait des conditions de validité d'un type différent : aucune restriction n'était imposée à $k(z)$, mais les dimensions du domaine Δ devaient être limitées. La méthode utilisée par PROTTER dans ces recherches est la suivante : partant de l'identité

$$0 = \iint_\Delta (au + bu_x + cu_z)\,[\,k(z)\, u_{zz} + u_{xx}]\, dx\, dz .$$

dans laquelle a, b, c sont des fonctions de x, z continûment dérivables par morceaux, il met le second membre, après diverses intégrations par parties et en tenant compte de ce que u est nul sur (Γ) et AC sous la forme d'une somme de termes qui, pour un choix convenable des fonctions a, b, c ont tous le même signe.

6. Théorème d'existence.

TRICOMI [31] a prouvé le théorème d'existence de son problème lorsque $k(z) = z$ en introduisant comme inconnues auxiliaires les fonctions $\tau(x)$ et $\nu(x)$ définies sur AB par $u(x, 0) = \tau(x)$, $u_z(x, 0) = \nu(x)$. Il résout séparément deux problèmes singuliers particuliers, un problème de Dirichlet dans la partie elliptique de Δ , un problème de Cauchy dans la partie hyperbolique de Δ ; la résolution de chacun de ces problèmes n'est possible que si une certaine équation intégrale liant $\tau(x)$ et $\nu(x)$ est satisfaite. Il reste à montrer que l'alternative de Fredholm vaut pour le système d'équations intégrales ainsi obtenu. La mise en oeuvre de la méthode est particulièrement laborieuse ; néanmoins GELLERSTEDT dans un nouveau cas particulier [12] et plus récemment PROTTER dans le cas général [22] ont réussi à prouver le théorème d'existence en appliquant sensiblement les mêmes techniques. Le résultat n'est toutefois atteint qu'en supposant la continuité de la dérivée troisième de $k(z)$ et qu'en imposant certaines restrictions assez sévères sur l'allure de (Γ) au voisinage de l'axe des x .

Dans [17] et [19], un procédé tout différent a été mis en oeuvre lorsque $k(z) = z$ Nous savons résoudre le problème de Tricomi lorsque (Γ) est un contour normal, puisqu'on sait calculer directement la fonction de Green du problème. On passe de ce cas très particulier à des cas d'une assez grande généralité (toujours lorsque $k(z) = z$) en appliquant un procédé alterné de SCHWARTZ, alternant la solution d'un problème de Tricomi avec celle d'un problème de Dirichlet "presque" classique. Un tel procédé est applicable toutes les fois que le théorème du maximum est vérifié.

Si $k(z) \neq z$, on peut établir l'alternative de Fredholm, en mettant l'équation sous la forme (8) et en cherchant φ comme solution d'une équation intégrale dont le noyau est essentiellement la fonction de Green du domaine envisagé pour l'équation de Tricomi.

7. Généralisations diverses. Autres problèmes.

Nous nous contenterons de signaler les travaux suivants. Des auteurs ont envisagé l'équation (E) très spéciale définie par $k(z) = 1$ pour $z > 0$, $k(z) = -1$ pour $z < 0$ [5], [23].

Certains problèmes conduisent à envisager le problème suivant. Soient I un point du segment AB, A' et B' les intersections des caractéristiques issues de I avec AC et BC ; trouver la solution dans le domaine limité par (Γ) et les arcs de caractéristique AA', A'I, IB', B'B connaissant ses valeurs sur (Γ) et sur AA' et BB'.

C'est sous cette forme que l'on a généralisé [28] l'énoncé du problème de Tricomi lorsque l'aquation fait intervenir trois variables ; soient par exemple

$$k(z)\ (u_{xx} + u_{yy}) + u_{zz} = 0$$

l'équation, C_0 l'intérieur d'une courbe rectifiable fermée C tracée dans le plan $z = 0$, D_2' le domaine formé des points P dont le cône caractéristique orienté dans le sens des z croissants coupe $z = 0$ suivant un cercle appartenant à C_0, S_2' la partie de la frontière de D_2' ne contenant pas C, K_I le cône des caractéristiques de sommet I appartenant à C_0 , D_2 et S_2 les parties de D' et de S' extérieures à K_I , enfin D_1 un domaine situé dans $z > 0$ ayant pour frontière C_0 et une surface S_1 s'appuyant sur C . Il s'agit de trouver u dans le domaine $D_1 + D_2 + C_0$ connaissant ses valeurs sur S_1 et sur S_2 . L'unicité de la solution d'un tel problème a été démontrée sous des conditions assez larges [28].

Signalons enfin une autre généralisation du problème de Tricomi [11] : soit C' l'intersection de la caractéristique DC avec un arc de courbe AC' issu de A dont la pente en chaque point est négative mais supérieure à celle de la caractéristique AB en un point ayant même ordonnée, Δ' le domaine limité par (Γ) , AC' et $C'B$ il faut trouver $u(x , z)$ dans Δ' connaissant les valeurs prises sur (Γ) et sur AC' . L'alternative de FREDHOLM pour un tel problème est encore valable [29], moyennant certaines conditions de régularité, et l'unicité a été étudiée [24] ; pour $k(z) = z$ et dans des cas très particuliers, on a pu construire la fonction de Green d'un tel problème [16].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] AGMON (S.) and BERS (L.). - The expansion theorem for pseudo-analytic functions, Proc. Amer. math. Soc., t. 3, 1952, p. 757-764.

[2] AGMON (S.), NIREMBERG (L.) and PROTTER (M. H.). - A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type, Comm. pure and appl. Math., t. 6, 1953, p. 455-470.

[3] BERS (Lipman). - The Dirichlet problem for a partial differential equation of mixed type, Bull. Amer. math. Soc., Abstract, t. 54, n° 504, 1948, p. 1073.

[4] BERS (Lipman). - On the continuation of a potential gas flow across the sonic line, Tech. Notes Nat. Adv. Comm. Aeronaut., n° 2058, 1950, 58 p.

[5] BICADZE (A. B.). - O nekotorykh zadačakh smešannogo tipa, Doklady, t. 70, 1950, p. 561-564.

[6] CARRIER (G. F.) and EHLERS (F. E.). - On some singular solutions of the Tricomi equation, Quart. appl. Math., t. 6, 1948, p. 331-337.

[7] COLE (Julian D.). - Note on the fundamental solution of $wy_{vv} + y_{ww} = 0$, Z. f. angew. Math. Phys., t. 3, 1952, p. 286-297.

[8] DARBOUX (Gaston). - Leçons sur la théorie générale des surfaces ... , t. 2, 2e éd. - Paris, Gauthier-Villars, 1915 (livre 4, chap. 3, p. 54-70).

[9] FRANKL (F.). - On Cauchy's problem for partial differential equations of mixed elliptico-hyperbolic type with initial data on the parabolic line (Russian, English summary) Bull. Acad. Sc. URSS, [Izvestia Akad. Nauk SSSR] Sér. Math., t. 8, 1944, p. 195-224.

[10] FRANKL (F.). - On the problem of Chaplygin for mixed sub- and supersonic flows (Russian, English summary), Bull. Acad. Sc. URSS, [Izvestia Akad. Nauk SSSR] Sér. Math., t. 9, 1945, p. 121-143.

[11] FRANKL (F.). - On a new boundary problem for the equation $y \frac{\partial^2 z}{dx^2} + \frac{\partial^2 z}{dy^2} = 0$ (Russian), Moskov. Gos. Univ. Učenye Zapiski 152, Mekhanika, t. 3, 1951, p. 99-1951.

[12] GELLERSTEDT (S.). - Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte, VII + 92 p., Uppsala, Almqvist och Wiksells (Thèse Uppsala 1935).

[13] GERMAIN (P.). - Introduction à l'étude mathématique des écoulements transsoniques, La Recherche aéronautique, n° 22, 1951.

[14] GERMAIN (P.). - Remarks on the theory of partial differential equations of mixed type and applications to the study of transonic flow, Comm. pure and appl. Math., t. 7, 1954, p. 117-143.

[15] GERMAIN (P.). - Maximum theorems and reflections of simple waves, NACA Tech. Note n° 3299, 1955, 22 p.

[16] GERMAIN (P.). - An expression for Green's function for a particular Tricomi problem, Quart. appl. Math., t. 14, n° 2, 1956, p. 113-124.

[17] GERMAIN (P.) et BADER (R.). - Sur quelques problèmes relatifs à l'équation de type mixte de Tricomi, Publication O.N.E.R.A., Chatillon-sous-Bagneux, n° 54, 1952.

[18] GERMAIN (P.) et BADER (R.). - Problèmes elliptiques et hyperboliques singuliers pour une équation du type mixte, Publication O.N.E.R.A., Chatillon-sous-Bagneux, n° 60, 1952.

[19] GERMAIN (P.) et BADER (R.). - Sur le problème de Tricomi, Rend. Circ. Mat. Palermo, Sér. 2, t. 2, 1953, p. 53-70.

[20] GERMAIN (P.) et BADER (R.). - Solutions élémentaires de certaines équations aux dérivées partielles du type mixte, Bull. Soc. math. France, t. 81, 1953, p. 145-174.

[21] HOLMGREN (E.). - Sur un problème aux limites pour l'équation $y^m \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, Ark. Mat. Astr. Fys., t. 19 B, n° 14, 1926, 3 p.

[22] LANGER (R. E.). - The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point, Trans. Amer. math. Soc., t. 67, 1949, p. 461-490.

[23] LAVRENT'EV (M.A.) et BICADZE (A. B.). - K probleme uravnenij smešannogo tipa, Doklady, t. 70, n° 3, 1950, p. 373-376.

[24] MORAWETZ (C. S.). - A uniqueness theorem for Frankl's problem, Comm. pure and appl. Math., t. 7, 1954, p. 697-703.

[25] PROTTER (M. H.). - A boundary value problem for an equation of mixed type, Trans. Amer. math. Soc., t. 71, 1951, p. 416-429.

[26] PROTTER (M. H.). - Uniqueness theorems for the Tricomi problem, J. rat. Mech. and Anal., t. 2, 1953, p. 107-114.

[27] PROTTER (M. H.). - The two noncharacteristic problem with data partly on the parabolic line, Pacific J. Math., t. 4, 1954, p. 99-108.

[28] PROTTER (M. H.). - New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type, J. rat. Mech. and Anal., t. 3, 1954, p. 435-446.

[29] PROTTER (M. H.). - An existence theorem for the generalized Tricomi problem, Duke math. J., t. 21, 1954, p. 1-7.

[30] PROTTER (M. H.). - Uniqueness theorems for the Tricomi problem, II, J. rat. Mech. and Anal., t. 4, 1955, p. 721-732.

[31] TRICOMI (F.). - Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto, Acc. Lincei Rend., Série 5, t. 14, 1923, p. 133-247.

[32] WEINSTEIN (A.). - On Tricomi's equation and generalized axially symmetric potential theory, Acad. royale Belgique, Bull. Classe Sc., Série 5, t. 37, 1951, p. 348-358.