JACQUES DIXMIER

Quelques résultats d'Harish-Chandra, II

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 58, p. 75-81

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__75_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1952)

QUELQUES RÉSULTATS D'HARISH-CHANDRA (1), II,

par Jacques DIXMIER.

3. Représentations construites à l'aide d'algèbres enveloppantes.

1\. - Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, A son algèbre enveloppante, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre semi-simple de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}$ un idéal de $\mathfrak{a}$, H et G les sous-algèbres de A engendrées par $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}$ respectivement. Pour $a \in \mathfrak{a}$, $a' \in A$, posons

$$\nu_1(a)a' = [a\ ,\ a'] = aa' - a'a \quad ;$$

ν_1 est une représentation de $\mathfrak{a}$ qui s'effectue dans l'espace A et se réduit dans $\mathfrak{a}$ à la représentation adjointe usuelle. Pour a fixé, $\nu_1(a)$ est une dérivation de A, pour laquelle $\mathfrak{g}$ est stable, donc aussi G. Les restrictions des $\nu_1(a)$ à G, qui sont des dérivations de G, définissent une représentation ν_2 de $\mathfrak{a}$. En particulier, on obtient une représentation ν de $\mathfrak{h}$, qui s'effectue dans l'espace G. Soit Y l'ensemble des éléments de G permutables à $\mathfrak{h}$; on a : $Y = G_{\delta_0}$ (paragraphe 2, n° 1).

LEMME. - $G = \sum G_\delta$, *et chaque* G_δ *est un* Y-*module à gauche de type fini*.

En effet, soit G^r l'ensemble des éléments symétriques homogènes de degré r de G. Il est immédiat que les G^r sont stables pour ν. Donc, si γ désigne l'application canonique (paragraphe 1, n° 2) de l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ sur G, les $\gamma^{-1} \circ \nu(h) \circ \gamma = \tilde{\nu}(h)$ sont des dérivations de S, qui ne sont autres que les dérivations uniques prolongeant $\nu(h)$ sur $\mathfrak{g}$, de sorte que les notations concordent avec celles du paragraphe 2, n° 4 ; γ est un isomorphisme de l'espace S muni de la représentation $\tilde{\nu}$ sur l'espace G muni de la représentation ν. On a $S = \sum S_\delta$, et chaque S_δ est un S_{δ_0}-module de type fini (paragraphe 2, n° 4). Donc $G = \sum G_\delta$ (ce qui était immédiat directement). Soient d'autre part $s_1, s_2, \dots, s_p$ des générateurs homogènes du S_{δ_0}-module S_δ. Les $\gamma(s_i)$ sont dans G_δ, soit $M \subset G_\delta$ les G_{δ_0}-module à gauche (par exemple) qu'ils engendrent ; montrons que $G_\delta = M$. Comme $G_\delta = \sum (G_\delta \cap G_r)$, il suffit de

---

(1) HARISH-CHANDRA. - On some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, Trans. Amer. math. Soc., t. 70, 1951, p. 28-96.

prouver que $G_\delta \cap G^r \subset M$. Suppsons $G_\delta \cap G^i \subset M$ pour $i < r$, et prouvons que $G_\delta \cap G^r \subset M$. Un élément de $G_\delta \cap G^r$ est de la forme $\gamma(s)$, avec $s \in S_\delta \cap S^r$; s est une somme d'éléments de la forme $s_i' s_i$, les s_i' étant des éléments homogènes de S_{δ_0} tels que $d^o s_i + d^o s_i' = r$: $s = \sum s_i' s_i$. Or $\gamma(s_i' s_i) \equiv \gamma(s_i')\gamma(s_i)$ (mod G^{r-1}). Donc $\gamma(s) \equiv \sum \gamma(s_i')\gamma(s_i)$ (mod G^{r-1}). Il suffit alors d'observer que $\gamma(s_i') \in G_{\delta_0}$, que $\gamma(s) - \sum \gamma(s_i')\gamma(s_i) \in \sum_{i<r} G_\delta \cap G^i$, et d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

COROLLAIRE 1. - <u>Soit U un espace de dimension finie dans lequel s'effectue une représentation ρ de $\mathfrak{h}$. Considérons, dans $G \otimes U$, la représentation $\xi = \nu \oplus 1 + 1 \oplus \rho$. Alors, $G \otimes U = \sum (G \otimes U)_\delta$, et tout $(G \otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0}-module à gauche de type fini.</u>

a. - D'après le lemme, pour tout $g \in G$ et tout $u \in U$, $\xi(H)(g \otimes u)$ est de dimension finie. D'où $G \otimes U = \sum (G \otimes U)_\delta$.

b. - Soient $\delta \in \Delta$, $\delta' \in \Delta$. Montrons que $(G_{\delta'} \otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0}-module de type fini. Soit $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ un système de générateurs du G_{δ_0}-module $G_{\delta'}$. Les $\nu(H)g_i \otimes U$ sont de dimension finie, stables, et engendrent le G_{δ_0}-module $G_{\delta'} \otimes U$. Or, $(G_{\delta'} \otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0}-module contenant les $(\nu(H)g_i \otimes U)_\delta$; il en résulte que $(G_{\delta'} \otimes U)_\delta$ est engendré, en tant que G_{δ_0}-module, par les $(\nu(H)g_i \otimes U)_\delta$, donc est de type fini.

c. - Montrons que $(G \otimes U)_{\delta_0}$ est un G_{δ_0}-module de type fini. Soit $U = \sum_{i=1}^n U_i$, chaque U_i étant ρ-irréductible ; soit δ_i la classe de la représentation induite par ρ dans U_i. On a : $G \otimes U = \sum_{\delta, i} G_\delta \otimes U_i$, la somme étant directe, et chaque $G_\delta \otimes U_i$ étant ξ-stable. Donc $(G \otimes U)_{\delta_0} = \sum_{\delta, i} (G_\delta \otimes U_i)_{\delta_0}$. Or, $(G_\delta \otimes U_i)_{\delta_0} = 0$ sauf si $\delta = \delta_i^*$. Donc $(G \otimes U)_{\delta_0} = \sum_{i=1}^n (G_{\delta_i^*} \otimes U_i)_{\delta_0}$, et est G_{δ_0}-module de type fini d'après b.

d. - Montrons que $(G \otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0}-module de type fini. Soit V un espace dans lequel s'effectue une représentation σ de $\mathfrak{h}$ de classe δ^*. Considérons dans $G \otimes U \otimes V$ la représentation $\xi \otimes 1 + 1 \otimes \sigma$. D'après c, le G_{δ_0}-module $(G \otimes U \otimes V)_{\delta_0}$ admet un système fini de générateurs $x_1, x_2, \dots x_n$. Soit $e_1, e_2, \dots, e_p$ une base de V, et soit $x_i = \sum_{j=1}^{p} y_i^j \otimes e_j$ où $y_i^j \in G \otimes U$. Un raisonnement déjà fait prouve que les y_i^j forment un système de générateurs du G_{δ_0}-module $(G \otimes U)_\delta$.

2. - Rappelons que l'application linéaire canonique θ de $G \otimes H$ dans A est un isomorphisme de l'espace $G \otimes H$ sur l'espace A (paragraphe 1, n° 3). Soient I_1 un idéal à gauche de H, I l'idéal à gauche de A engendré par I_1. Montrons que $\theta(G \otimes I_1) = I$. Un élément de $G \otimes I_1$ est de la forme $\sum g^i \otimes h^i$ avec $g^i \in G$, $h^i \in I_1$; or $\theta(\sum g^i \otimes h^i) = \sum g^i h^i \in I$. Réciproquement, un élément de I est de la forme $\sum a^i h^i$, avec $h^i \in I_1$, $a^i \in A$, donc $a^i = \sum_j g_j^i h_j^i$, $g_j^i \in G$; $h_j^i \in H$; or $\theta^{-1}(\sum_i \sum_j g_j^i h_j^i h^i) = \sum_i \sum_j g_j^i \otimes h_j^i h^i \in G \otimes I_1$. Ceci nous permet d'identifier désormais l'espace A/I à l'espace $G \otimes H/G \otimes I_1 = G \otimes (H/I_1)$

Soient $a \longrightarrow a^*$ et $h \longrightarrow \bar{h}$ les applications canoniques de A dans $A^* = A/I$ et de H dans $\bar{H} = H/I_1$. Soient ν_I et ν_{I_1} les représentations canoniques de A et H dans A^* et $\bar{H}$ respectivement. Nous identifions désormais une représentation d'une algèbre de Lie et la représentation correspondante de son algèbre enveloppante. alors on a, pour $h_1 \in \mathfrak{h}$, $g \in G$, $h \in H$:

$$\nu_I(h_1)(g \otimes \bar{h}) = \nu_I(h_1)((gh)^*) = (h_1 gh)^* = ([h_1 , g]h + gh_1 h)^* =$$
$$= [h_1 , g] \otimes \bar{h} + g \otimes \overline{h_1 h} = \nu(h_1)g \otimes \bar{h} + g \otimes \nu_{I_1}(h_1)\bar{h}$$

donc :

$$\nu_I(h_1) = \nu(h_1) \otimes 1 + 1 \otimes \nu_{I_1}(h_1) \tag{1}$$

COROLLAIRE 2. - Considérons la restriction de ν_I à H, qui s'effectue dans l'espace A. Si H/I_1 est de dimension finie, on a $A^* = \sum (A^*)_\delta$, et chaque $(A^*)_\delta$ est un Y-module de type fini.

Ceci résulte aussitôt du corollaire 1 et de la formule (1).

4. Remarques d'algèbre associative.

1. - LEMME 1. - Soient A une algèbre à élément unité, B une sous-algèbre de A contenant 1, I un idéal à gauche de A. Supposons vérifiée la condition suivante :

(C_1) Si a_1, a_2 sont des éléments de A, il existe $a \equiv 1 \pmod I$ tel que $aa_1 \in B$, $aa_2 \in B$.

Alors, si L est un idéal à gauche maximal de A, contenant I, $L \cap B$ est un idéal à gauche maximal de B, et la correspondance $L \longrightarrow L \cap B$ est biunivoque.

En effet, soit M un idéal à gauche de B tel que $L \cap B \subset M$, $L \cap B \neq M$. Soit $m \in M$; $m \notin L \cap B$. Comme L est maximal, il existe un $a \in A$ avec $am \equiv 1$

(mod L) . Soit $a_1 \equiv 1$ (mod I) avec $a_1 a \in B$. On a : $a_1 am \in M$, et $a_1 am \equiv 1$ (mod L+I = L) , donc $a_1 am \equiv 1$ (mod M) , donc $M = B$. Ainsi, $L \cap B$ est un idéal à gauche maximal de B .

Soient maintenant L , L' deux idéaux à gauche maximaux de A contenant I tels que $L \cap B = L' \cap B$. Supposons $L \neq L'$. Alors, $1 = \ell + \ell'$ avec $\ell \in L$, $\ell' \in L'$. Soit $a \equiv 1$ (mod I) tel que $a\ell \in B$, $a\ell' \in B$. On a :

$$a = a\ell + a\ell' \in L \cap B + L' \cap B = L \cap B .$$

Donc $1 \in L \cap B + I \subset L$, ce qui est absurde.

2. - Soient maintenant A une algèbre à élément unité, I un idéal à gauche, B l'ensemble des $a \in A$ tels que $Ia \subset I$; B est une sous-algèbre de A contenant I et le centre Z de A ; I est un idéal <u>bilatère</u> de B . Soit $a \to a^*$ l'application canonique de A sur l'<u>espace</u> $A^* = A/I$; sa restriction à B est un homomorphisme de B sur l'<u>algèbre</u> $B^* = B/I$. Soient de plus J un idéal bilatère de A , et $K = I + J$ (idéal à gauche) ; $K \cap B$ est un idéal bilatère de B . Soit $a \to a^+$ l'application canonique de A sur $A^+ = A/K$. Soit Ω l'ensemble des idéaux à gauche maximaux de A contenant K .

LEMME 2. - <u>Supposons vérifiées par</u> A , B , I <u>les conditions</u> (C_1) <u>et</u>

(C_2) B^+ <u>est de dimension finie</u>.

<u>Alors, les représentations irréductibles</u> ν_L <u>de</u> A <u>définies canoniquement par les</u> $L \in \Omega$ <u>sont toutes équivalentes à un nombre fini d'entre elles</u>. <u>En outre</u>, $\nu_L(z)$ <u>est scalaire pour</u> $z \in Z$.

En effet, soit $b \to b^\sim$ l'homomorphisme canonique de B sur $B^\sim = B/K \cap B$. Les $L \cap B$, $L \in \Omega$, sont des idéaux à gauche maximaux de B contenant $K \cap B$; donc les $(L \cap B)^\sim$ sont des idéaux à gauche maximaux de $B^\sim$. Soit $\nu_L^\sim$ la représentation irréductible de $B^\sim$ définie canoniquement par $(L \cap B)^\sim$. D'après C_2 , $B^\sim$ est de dimension finie, donc il existe un sous-ensemble fini Ω' de Ω tel que toute $\nu_L^\sim$, $L \in \Omega$, soit équivalente à une $\nu_{L'}^\sim$, $L' \in \Omega'$. Ceci posé, soit $L \in \Omega$. Il existe $L' \in \Omega'$ tel que $\nu_L^\sim$ et $\nu_{L'}^\sim$ soient équivalentes. Donc il existe $b_o \in B$, $b_o \notin L$ tel que :

$$b \in B \text{ et } b^\sim b_o^\sim \in (L \cap B)^\sim \Longleftrightarrow b \in B \text{ et } b^\sim \in (L' \cap B)^\sim .$$

Soit M l'ensemble des $a \in A$ tels que $ab_o \in L$; M est un idéal à gauche maximal de A contenant I et J donc K , donc $M \in \Omega$, et ν_L est équivalente à ν_M . Enfin :

$$a \in M \cap B \Longleftrightarrow a \in B \text{ et } ab_o \in L \Longleftrightarrow a \in B \text{ et } (ab_o)^\sim \in (L \cap B)^\sim$$
$$\Longleftrightarrow a \in B \text{ et } a^\sim \in (L' \cap B)^\sim \Longleftrightarrow a \in L' \cap B .$$

Donc $L' \cap B = M \cap B$ et par suite $L' = M$, de sorte que ν_L est équivalente à $\nu_{L'}$. Ceci démontre la première assertion.

Si maintenant $z \in Z$, on a $z \in B$, et $z^\sim$ appartient au centre de B. Donc Donc $\nu_L^\sim(z^\sim)$ permute aux opérateurs de $\nu_L^\sim$, qui est irréductible et s'effectue dans un espace de dimension finie. Donc il existe un scalaire $\xi(z)$ tel que $z^\sim 1^\sim \equiv \xi(z) 1^\sim \pmod{(L \cap B)^\sim}$, d'où $z - \xi(z) \in L$. Alors, pour tout $a \in A$, on a modulo L : $za = az \equiv a\xi(z) = \xi(z)a$, donc $\nu_L(z) = \xi(z).1$.

5. Le théorème d'Harish-Chandra.

1\. - Comme plus haut, soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}$ un idéal de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre semi-simple de $\mathfrak{a}$, tels que $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = 0$. Soient A l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a}$, $G \subset A$ et $H \subset A$ les algèbres enveloppantes de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$. Soient Z le centre de A, et Y l'ensemble des éléments de G permutables à $\mathfrak{h}$. Soit enfin Δ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{h}$. Une fois pour toutes, nous choisirons, pour tout $\delta \in \Delta$:

1° Une représentation ν_δ de classe δ de $\mathfrak{h}$, s'effectuant dans un espace U_δ ;

2° Un sous-espace U'_δ de U_δ de dimension 1 ; l'ensemble des $h \in H$ tels que $\nu_\delta(h)U'_\delta = 0$ est un idéal à gauche maximal I_δ de H ; H/I_δ est de dimension finie ;

3° Un élément $h_\delta \in H$ tel que $\nu_\delta(h_\delta)$ soit un projecteur sur U'_δ (théorème de Burnside).

Soit ν une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un espace V. Soit V^δ l'ensemble des $v \in V$ tels que $\nu(I\ )v = 0$. On a : $V^\delta \subset V$. En outre, $\nu(h_\delta)$ se réduit, sur V_δ, à un projecteur sur V^δ. En effet :

α) si $v \in V_\delta$, $\nu(h_\delta)\ v \in V^\delta$; car il suffit de le montrer quand v appartient à un sous-espace stable W de V_δ dans lequel ν induit une représentation de classe δ ; et $\nu(h_\delta)$ se réduit dans W à un projecteur sur un sous-espace W' de dimension 1 de W qui est tel que $\nu(I_\delta)\ W' = 0$, donc tel que $W' \subset V^\delta$.

β) si $v \in V^\delta$, $v \neq 0$, il existe un isomorphisme entre $\nu(H)\ v$ muni de la représentation induite par ν, et U_δ muni de ν_δ, et cet isomorphisme transforme U'_δ en la variété à une dimension engendrée par v ; donc $\nu(h_\delta)\ v = v$.

Ceci posé, soient $v_1, v_2, \dots, v_n$ des éléments de $\sum V_\delta$, $v'_1, v'_2, \dots, v'_p$ des éléments de V^δ. Il existe $h \in H$ tel que $\nu(h)\ v_i \in V^\delta$, $\nu(h)\ v'_j = v'_j$: en effet, on peut se ramener au cas où $v_i \in V_{\delta_i}$; soit $h' \in H$ tel que $\nu(h')$ se réduise à 1 dans V_δ, à 0 dans les $V_{\delta_i} \neq V_\delta$; alors $h = h_\delta\ h'$ répond à la question.

2. - Si π est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace V, et si $\delta\in\Delta$, les notations V_δ, V^δ concernent la restriction de π à $\mathfrak{k}$.

THÉORÈME. - *Soient* $\delta_1\in\Delta$, *et* χ *un homomorphisme de* Y *dans le corps complexe.*

a. *Il existe seulement un nombre fini de représentations irréductibles inéquivalentes* π *de* A *telles que,* V *étant l'espace de* π, *on ait* $V_{\delta_1}\neq 0$ *et* $\pi(y)=\chi(y)1$ *pour* $y\in Y$.

b. *Si* π *est une telle représentation, on a* $V=\sum V_\delta$, *et* dim $V_\delta<+\infty$ pour tout δ.

c. $\pi(z)$ *est scalaire pour* $z\in Z$.

En effet, soit J l'idéal bilatère de A engendré par les $y-\chi(y)$, $y\in Y$. Le noyau de π contient J.

Soit I l'idéal à gauche de A engendré par I_{δ_1}. Puisque $V_{\delta_1}\neq 0$, il existe un $v\in V^{\delta_1}$, $v\neq 0$; on a $\pi(I_{\delta_1})v=0$, donc $\pi(I)v=0$. Soit L l'idéal à gauche maximal de A formé des $a\in A$ tels que $\pi(a)v=0$. On a $L\supset I$ et $L\supset J$ donc $L\supset I+J=K$, et π est équivalente à ν_L.

Soient $a\longrightarrow a^*$, $a\longrightarrow a^*$ et $a\longrightarrow a^\wedge$ les applications canoniques de A sur $A^*=A/I$, $A^+=A/K$ et $A^\wedge=A/L$; ν_K est un quotient de ν_I, ν_L est un quotient de ν_K.

Comme H/I_{δ_1} est de dimension finie, le corollaire du paragraphe 3 prouve que $A^*=\sum(A^*)_\delta$ et que chaque $(A^*)_\delta$ est un Y-module de type fini. En passant au quotient, et observant que tout élément de Y est congru modulo J à un scalaire, on voit que $A^+=\sum(A^+)_\delta$ et que chaque $(A^+)_\delta$ est de dimension finie. On en déduit enfin que $A^\wedge=\sum(A^\wedge)_\delta$ et que chaque $(A^\wedge)_\delta$ est de dimension finie, ce qui est le b du théorème.

Pour prouver le a et le c du théorème, nous allons prouver que nous sommes dans les conditions du lemme 4 (avec les mêmes notations). Introduisons l'algèbre B de ce lemme, on a, si $a\in A$:

$$a^*\in B^*\Leftrightarrow a\in B\Leftrightarrow Ia\subset I\Leftrightarrow (Ia)^*=0\Leftrightarrow \nu_I(I)a^*=0\Leftrightarrow (I_{\delta_1})a^*=0\Leftrightarrow a^*\in (A^*)^{\delta_1}$$

donc $B^*=(A^*)^{\delta_1}$. Donc $B^+\subset(A^+)_{\delta_1}$ est de dimension finie, ce qui est la condition (C_2). Enfin, soient a_1, a_2 des éléments de A. Comme $A^*=\sum(A^*)_\delta$, il existe un $a\in A$ tel que $\nu_I(a)a_1^*\in(A^*)^{\delta_1}$, $\nu_I(a)a_2^*\in(A^*)^{\delta_1}$, $\nu_I(a)1^*=1^*$ c'est-à-dire $aa_1\in B$, $aa_2\in B$, , $a\equiv 1 \pmod{I}$, ce qui prouve (C_1), et achève la démonstration du théorème.

EXEMPLE. - Partons d'une algèbre de Lie semi-simple réelle $\mathfrak{h}_0$; soient $\mathfrak{a}_0$ sa complexification, Γ l'homothétie de rapport i dans $\mathfrak{a}_0$. On ne conserve sur $\mathfrak{a}_0$ que la structure d'algèbre de Lie réelle. Soient $\mathfrak{a}$ la complexification de $\mathfrak{a}_0$, et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{a}$ la complexification de $\mathfrak{h}_0$. On étend Γ à $\mathfrak{a}$ par linéarité et on pose : $\gamma(h) = \frac{1}{2}(h + i\,\Gamma(h))$ pour $h \in \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g} = \gamma(\mathfrak{h})$. On voit alors aisément que $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{a}$, et que $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = 0$. En outre, Y est le centre de G.