JEAN DIEUDONNÉ

Groupes de Lie algébriques (travaux de Chevalley)

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 57, p. 67-74

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__67_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1952)

GROUPES DE LIE ALGÉBRIQUES
(Travaux de CHEVALLEY)

par Jean DIEUDONNÉ

Le but de la théorie de CHEVALLEY est de développer, pour certains types de groupes, une théorie calquée sur celle de Lie, mais n'utilisant que des moyens algébriques, à l'exclusion de toute intervention de la Topologie des variétés.

1. Définition et premières propriétés des groupes algébriques.

Dans ce qui suit, K est un corps infini (commutatif), V un espace vectoriel de dimension finie n sur K, $\mathfrak{E}$ l'espace vectoriel sur K des endomorphismes de V (identifiable non intrinsèquement à l'espace des matrices carrées d'ordre n). On définit de façon intrinsèque les polynomes et fractions rationnelles sur $\mathfrak{E}$ (ce sont les polynomes, resp. fractions rationnelles par rapport aux éléments d'une matrice arbitraire d'ordre n), à coefficients dans K. Un groupe algébrique G est un sous-groupe du groupe des éléments inversibles de $\mathfrak{E}$, formé de tous les automorphismes s de V qui annulent un ensemble (P_α) de polynomes sur $\mathfrak{E}$; tous les polynomes qui s'annulent sur G forment un idéal $\mathfrak{a}$ de l'anneau $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ des polynomes sur $\mathfrak{E}$, dit associé à G.

On définit de façon évidente le produit $G \times G'$ de deux groupes algébriques (d'automorphismes de V, resp. V'), et on montre que c'est un groupe algébrique d'automorphismes de $V \times V'$.

Si G_0 est un ensemble d'automorphismes de V, stable pour la multiplication, $\mathfrak{a}$ l'idéal des polynomes s'annulant dans G_0, l'ensemble des automorphismes s de V tels que $P(s) = 0$ pour tout $P \in \mathfrak{a}$ est le plus petit groupe algébrique contenant G_0 ; c'est aussi le groupe des automorphismes de V laissant invariant $\mathfrak{a}$.

Une fraction rationnelle R sur $\mathfrak{E}$ est un invariant de G si on a $R(st)=R(t)$ pour tout $t \in \mathfrak{E}$ et tout $s \in G$; un polynome P sur $\mathfrak{E}$ est un semi-invariant si $P(st)= p(s)P(t)$ pour tout $t \in \mathfrak{E}$ et tout $s \in G$; $p(s)$ est alors un polynome, et $s \to p(s)$ un homomorphisme de G dans K^* ; tout invariant est de la forme P/Q, où P et Q sont des semi-invariants. Tout groupe algébrique G peut être défini comme groupe des automorphismes de V laissant invariantes un nombre fini de fractions rationnelles, ou comme groupe admettant un nombre fini de polynomes comme semi-invariants.

Un groupe algébrique G est dit <u>irréductible</u> si son idéal associé est premier. Pour tout groupe algébrique G, il existe un sous-groupe algébrique irréductible G_1 de G et un seul qui soit d'indice fini dans G ; c'est un sous-groupe distingué de G, qu'on ammelle la <u>composante algébrique</u> de l'élément neutre dans G (lorsque $K = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$, on montre que G_1 contient la composante connexe de l'élément neutre, et lui est identique si $K = \underset{\sim}{C}$). La composante algébrique de $G \times G'$ est le produit des composantes algébriques de G et de G'. Si G est un groupe d'automorphismes de V admettant un sous-groupe algébrique d'indice fini, G est algébrique.

Les restrictions à un groupe algébrique G des polynomes sur $\mathfrak{G}$ forment un anneau isomorphe à $\mathfrak{o}(\mathfrak{G})/\mathfrak{a} = \mathfrak{o}(G)$, dit anneau des polynomes sur G. Si G est irréductible, $\mathfrak{o}(G)$ est un anneau d'intégrité, son corps des fractions $\mathfrak{R}(G)$ est appelé corps des fractions rationnelles sur G ; à une telle fraction P/Q correspond une fonction rationnelle sur G, à valeurs dans K, définie aux points où $Q(s) \neq 0$. Si une fonction rationnelle R sur $\mathfrak{G}$ est définie en un point au moins de G, il y a une fraction rationnelle et une seule sur G qui lui est égale aux points de G où R est définie. Une application ρ de G dans un espace vectoriel W de dimension finie sur K est dite <u>rationnelle</u> si ses composantes (sur une base quelconque de W) sont des fonctions rationnelles sur G ; les applications $s \to s^{-1}$, $(s, t) \to st$ sont rationnelles (dans G et $G \times G$ respectivement). Si G est un groupe algébrique irréductible, $\mathcal{L}$ l'espace des endomorphismes d'un espace vectoriel W, une application ρ de G dans $\mathcal{L}$ est une <u>représentation rationnelle</u> de G dans $\mathcal{L}$ si ρ est une application rationnelle partout définie dans G, et une représentation. On étend cette définition à un groupe algébrique quelconque G : une représentation de G dans $\mathcal{L}$ est dite <u>rationnelle</u> si sa restriction à la composante algébrique de G est rationnelle.

L'image réciproque d'un groupe algébrique $H \subset \mathcal{L}$ par une représentation rationnelle ρ de G dans $\mathcal{L}$ est un sous-groupe algébrique (distingué) de G ; en particulier, le noyau de ρ est un sous-groupe algébrique. On peut montrer inversement que tout sous-groupe algébrique distingué d'un groupe algébrique G est noyau d'une représentation rationnelle (voir [2]) ; $\rho(G)$ lui-même n'est pas nécessairement un groupe algébrique (cf. n° 2).

2. <u>Extension du corps de base</u>. <u>Points génériques d'un groupe</u>.

Soit L un surcorps de K ; on désigne par V^L l'espace vectoriel sur L

déduit de V par extension à L du corps des scalaires ; l'espace $\mathfrak{E}^L$ déduit de $\mathfrak{E}$ par extension à L du corps de base coïncide avec l'espace des endomorphismes de V^L. On identifie toute fonction polynome sur $\mathfrak{E}$ à la fonction polynome sur $\mathfrak{E}^L$ qui la prolonge.

Soit G un groupe algébrique d'automorphismes de V, G^L le plus petit groupe algébrique d'automorphismes de V^L contenant G. Si $\mathfrak{a}$ est l'idéal associé à G dans $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, l'idéal $\mathfrak{a}^L$ associé à G^L dans $\mathfrak{o}(\mathfrak{E}^L)$ est formé des combinaisons linéaires à coefficients dans L des polynomes de $\mathfrak{a}$. On a $G = G^L \cap \mathfrak{E}$, et tout polynome sur G^L qui est nul sur G est nul sur G^L. La composante algébrique de G^L est le plus petit groupe algébrique G_1^L d'automorphismes de V^L contenant la composante algébrique G_1 de G ; les groupes quotients G/G_1 et G^L/G_1^L sont canoniquement isomorphes. On a $(G \times G')^L = G^L \times G'^L$ pour deux groupes algébriques quelconques.

Les fonctions polynomes sur G peuvent être identifiées aux fonctions polynomes (uniquement déterminées) sur G^L qui les prolongent ; alors $\mathfrak{o}(G^L)$ s'identifie à l'algèbre déduite de $\mathfrak{o}(G)$ par extension à L du corps de base. Si G est irréductible, $\mathfrak{R}(G^L)$ s'obtient par adjonction de L à $\mathfrak{R}(G)$; $\mathfrak{R}(G)$ et L sont linéairement disjoints sur K. Il en résulte en particulier que $\mathfrak{R}(G)$ est toujours séparable sur K (prendre pour L une clôture algébrique de K).

Toute application rationnelle de G dans un espace vectoriel $\mathfrak{L}$ sur K se prolonge d'une seule manière en une application rationnelle de G^L dans $\mathfrak{L}^L$; en particulier, toute représentation rationnelle ρ se prolonge de façon unique en une représentation rationnelle ρ^L ; si H est le plus petit groupe algébrique contenant $\rho(G)$, H^L est le plus petit groupe algébrique contenant $\rho^L(G^L)$. On identifie ρ à ρ^L.

Un point s d'un groupe G^L est dit <u>point généralisé</u> de G ; on dit que s est point <u>générique</u> de G si tout point $s' \in G$ est une spécialisation de s (c'est-à-dire que pour tout polynome P tel que $P(s) = 0$, on a $P(s') = 0$). Pour qu'un groupe algébrique G admette un point générique, il faut et il suffit qu'il soit irréductible : on obtient alors un point générique en prenant $L = \mathfrak{R}(G)$, et pour s la matrice dont les éléments sont les fonctions coordonnées sur G (par rapport à une base de $\mathfrak{E}$), fonctions qui sont des éléments de $\mathfrak{R}(G)$. Tout point généralisé de G est spécialisation d'un point générique.

Si G est irréductible, on appelle <u>dimension</u> de G la dimension algébrique de $\mathfrak{R}(G)$ sur K ; si G est un groupe algébrique quelconque, sa dimension est par définition la dimension de sa composante algébrique. Pour tout point généralisé s

de G, la dimension de $K(s)$ (corps engendré par les coordonnées de s) est au plus égale à la dimension d de G ; si G est irréductible, $\dim K(s) = d$ si et seulement si s est générique. Pour tout sous-groupe algébrique H de G, $\dim H \leq \dim G$, l'égalité n'ayant lieu que si H est d'indice fini dans G. On a $\dim (G \times G') = \dim G + \dim G'$, et $\dim(G^L) = \dim G$ pour tout surcorps L de K.

Soit G un groupe algébrique irréductible, ρ une représentation rationnelle dans le groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel U. Si s est point générique de G, $\rho(s)$ est un point générique du plus petit groupe algébrique H contenant $\rho(G)$; si d et e sont les dimensions de G et H, on a $e \leq d$, et la dimension du noyau N de ρ est $\leq d-e$; elle est égale à $d-e$ lorsque K est algébriquement clos ou de caractéristique 0, mais on a des exemples où K est imparfait et $\dim N < d-e$.

Supposons K algébriquement clos. Soient G un groupe algébrique irréductible, R une application rationnelle partout définie de G sur un ensemble d'automorphismes d'un espace vectoriel U, l'image de l'élément neutre étant l'automorphisme identique. Alors le groupe H engendré par $R(G)$ est algébrique et irréductible et il existe un entier $m > 0$ tel que tout élément de H soit produit de m éléments de $R(G)$. En particulier, l'image $\rho(G)$ de G par une représentation rationnelle est alors un groupe algébrique. Si on applique le résultat à l'application $(s, t) \to s t s^{-1} t^{-1}$ de $G \times G$ dans G, qui est rationnelle, on voit que le groupe des commutateurs H de G est algébrique et irréductible, et tout élément de H est produit d'un nombre fixe de commutateurs. Enfin, si G_i $(1 \leq i \leq h)$ sont des groupes algébriques irréductibles d'automorphismes de V, le groupe H engendré par leur réunion est algébrique et irréductible, et tout élément de H peut s'écrire comme produit d'un nombre fixe d'éléments de cette réunion (ce dernier résultat n'est pas vrai si les G_i ne sont pas irréductibles).

3. L'algèbre de Lie d'un groupe algébrique.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur K, R une fonction rationnelle dans V (à valeurs dans K) ; si on rapporte V à une base, l'application $(h_i) \to \sum_i \frac{\partial R}{\partial x_i} h_i$ est une forme linéaire sur V (indépendante de la base choisie), appelée la differentielle de R et notée $R'(\vec{x})$ ou $dR(\vec{x})$. Pour toute application linéaire $\mathfrak{X}$ de V dans lui-même, soit $S(\vec{x}) = R(\mathfrak{X}.\vec{x})$; on a $\langle S'(\vec{x}), \vec{h} \rangle = \langle R'(\mathfrak{X}.\vec{x}), \mathfrak{X}.\vec{h} \rangle$ (cas particulier du théorème des fonctions composées).

On va considérer les fonctions rationnelles sur $\mathfrak{E}$ (et non sur V), et les endomorphismes $s \to \mathfrak{X}s$ de , où $\mathfrak{X} \in \mathfrak{E}$. Si $S(s) = R(\mathfrak{X}s)$, on a donc $\langle S'(s), t \rangle = \langle R'(\mathfrak{X}s), \mathfrak{X}t \rangle$, et si $T(s) = R(s\mathfrak{X})$, $\langle T'(s), t \rangle = \langle R'(s\mathfrak{X}), t\mathfrak{X} \rangle$; la fonction $s \to -\langle R'(s), \mathfrak{X}s \rangle$ est une fonction rationnelle notée $\delta(\mathfrak{X})R$ et $\delta(\mathfrak{X})$ est une dérivation dans le corps $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$ des fonctions rationnelles sur $\mathfrak{E}$, telle que $\delta([\mathfrak{X},\mathfrak{Y}]) = [\delta(\mathfrak{X}),\delta(\mathfrak{Y})]$.

Les endomorphismes $\mathfrak{X} \in \mathfrak{E}$ forment une algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$. Si G est un groupe algébrique d'automorphismes de V, on appelle <u>algèbre de Lie</u> de G la sous-algèbre $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{gl}(V)$ formée des $\mathfrak{X}$ tels que $\delta(\mathfrak{X})$ applique dans lui-même l'idéal $\mathfrak{a}$ associé à G. Si $P \in \mathfrak{a}$, et si on pose $Q(s) = P(st)$, on a d'après ce qui précède, $(\delta(\mathfrak{X})Q)(s) = (\delta(\mathfrak{X})P)(st)$; mais si $P \in \mathfrak{a}$, on a aussi $Q \in \mathfrak{a}$ pour tout $t \in G$, d'où on déduit aussitôt que pour que $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$, il faut et il suffit que $\langle P'(s), \mathfrak{X}s \rangle = 0$ pour un $s \in G$, et en particulier, que $\langle P'(\mathfrak{J}), \mathfrak{X} \rangle = 0$ ($\mathfrak{J}$ automorphisme identique) pour tout $P \in \mathfrak{a}$.

Si L est un surcorps de K, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^L$ de G^L se déduit de $\mathfrak{g}$ par extension à L du corps des scalaires. L'algèbre de Lie de G est la même que celle de sa composante algébrique.

On voit aussitôt, par passage au quotient, que la dérivation $\delta(\mathfrak{X})$, pour $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$, définit une dérivation du corps $\mathfrak{R}(G)$ des fonctions rationnelles sur G.

Soit L un surcorps de K, D une dérivation de L. Pour tout $\vec{x} \in V^L$, on désigne par $D\vec{x}$ l'élément de V^L dont les coordonnées par rapport à une base de V sur K, sont les images par D des coordonnées de $\vec{x}$ (notion intrinsèque). Pour toute fonction rationnelle R sur V, on a $D(R(\vec{x})) = \langle R'(\vec{x}), D\vec{x} \rangle$. Si $\vec{x} \in V^L$ et $\mathfrak{X} \in \mathfrak{E}^L$, on a $D(\mathfrak{X} \cdot \vec{x}) = (D\mathfrak{X}).\vec{x} + \mathfrak{X}.(D\vec{x})$.

Soit G un groupe algébrique d'automorphismes de V ; pour tout $s \in G^L$, et toute dérivation D de L, $(Ds)s^{-1} \in \mathfrak{g}^L$, car on a, pour tout $P \in \mathfrak{a}$, $\langle P'(s), Ds \rangle = D(P(s)) = 0$, donc si $\mathfrak{X} = (Ds)s^{-1}$, on a $(\delta(\mathfrak{X})P)(s) = 0$, ce qui prouve que $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}^L$. Inversement, supposons G irréductible et supposons que s soit point générique de G ; alors, comme $\mathfrak{R}(G)$ et $K(s)$ sont isomorphes, pour tout $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$, $\delta(\mathfrak{X})$ donne par transport de structure une dérivation $D_{\mathfrak{X}}$ de $K(s)$, caractérisée par $D_{\mathfrak{X}}s = \mathfrak{X}s$; cela est vrai aussi pour tout $\mathfrak{X}$ dans l'algèbre de Lie étendue $\mathfrak{g}^{K(s)}$.

De ce résultat fondamental, on déduit d'abord que la dimension <u>algébrique</u> de G est égale à la dimension <u>linéaire</u> de $\mathfrak{g}$, parce que (en se ramenant au cas où G est irréductible) l'espace des dérivations de $K(s)$ a une dimension égale à la dimension algébrique de $K(s)$ sur K, puisque $K(s)$ est séparable sur K.

Si G et G' sont deux groupes algébriques, l'algèbre de Lie de $G \times G'$ est isomorphe au produit $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$. L'algèbre de Lie d'un groupe algébrique G est contenue dans l'algèbre enveloppante de G dans $\mathfrak{C}$.

Soit R une application rationnelle de V dans un espace vectoriel W ; si R_j sont les composantes de R sur une base de W, l'application linéaire $(h_i) \rightarrow (\sum_j \frac{\partial R_i}{\partial x_j} h_j)$ de V dans W (indépendante des bases) est encore appelée la <u>différentielle</u> de R et notée $R'(x)$ ou $dR(x)$; on démontre aussitôt le théorème des fonctions composées $(S \circ R)' = S' \circ R'$.

Soit R une application rationnelle d'un groupe algébrique irréductible G dans un groupe algébrique H. Pour tout $s \in G$ où R est définie et tout $\mathfrak{X}$ dans l'algèbre de Lie de G, $R'(s).\mathfrak{X}s = \mathfrak{Y}R(s)$, où $\mathfrak{Y}$ est un élément de l'algèbre de Lie de H.

Soit s un point générique de G, et $L = K(s)$; pour tout $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$, il existe une dérivation $D_{\mathfrak{X}}$ de L telle que $D_{\mathfrak{X}}(s) = \mathfrak{X}s$; on a $D_{\mathfrak{X}}R(s) = R'(s).\mathfrak{X}s$. Pour toute représentation rationnelle ρ de G dans un groupe algébrique H, on a $\rho'(s).\mathfrak{X}s = (\rho'(\mathfrak{J}).\mathfrak{X})\rho(s)$; l'application $\mathfrak{X} \rightarrow \rho'(\mathfrak{J}).\mathfrak{X}$ est un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H, qu'on appelle la différentielle $d\rho$ de la représentation ρ. On a $\rho'(\mathfrak{J}).\mathfrak{X} = 0$ pour tout élément de l'algèbre de Lie du noyau de ρ (mais la réciproque n'est pas toujours vraie si K n'est pas de caractéristique 0). Si H est le plus petit groupe algébrique contenant $\rho(G)$, et si $K(s)$ est extension séparable de $K(\rho(s))$, $d\rho$ applique $\mathfrak{g}$ <u>sur</u> $\mathfrak{h}$ (mais pas nécessairement si $K(s)$ n'est pas séparable sur $K(\rho(s))$). Pour tout $s \in G$, soit $\mathrm{Ad}\, s$ l'automorphisme $t \rightarrow sts^{-1}$ de $\mathfrak{C}$; il applique $\mathfrak{g}$ dans elle-même ; si pour tout $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$, on appelle $\mathrm{ad}\,\mathfrak{X}$ l'endomorphisme $t \rightarrow [\mathfrak{X}, t]$ de $\mathfrak{C}$, la différentielle de la représentation $s \rightarrow \mathrm{Ad}\, s$ est l'application $\mathfrak{X} \rightarrow \mathrm{ad}\,\mathfrak{X}$. Le noyau de $s \rightarrow \mathrm{Ad}\, s$ contient le centre de G (mais ne lui est pas nécessairement identique si K n'est pas de caractéristique 0).

4. <u>Exponentielles et sous-groupes "à un paramètre"</u>.

On suppose désormais que K <u>est de caractéristique</u> 0.

Soit T une indéterminée, L le corps $K((T))$ des séries formelles en T à coefficients dans K. On pose pour tout $\mathfrak{X} \in \mathfrak{C}$, $\exp(T\mathfrak{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \mathfrak{X}^k / k!$;

c'est un élément de $\mathfrak{E}^L$. Pour que $\mathfrak{X}$ appartienne à l'algèbre de Lie de G, il faut et il suffit que $\exp(T\mathfrak{X})$ soit un point généralisé de G. En effet, si cette condition est réalisée, on a pour la dérivation D ($=d/dT$) de L, $D(\exp T\mathfrak{X}) = \mathfrak{X} \exp T\mathfrak{X}$, donc $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}^L$ d'après ce qu'on a vu au n° 3, et comme $\mathfrak{X} \in \mathfrak{E}$, $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$. Inversement, si $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$, on considère l'idéal $\mathfrak{a}'$ de $K[[T]]$ engendré par les $P(\exp T\mathfrak{X})$, où P parcourt l'idéal $\mathfrak{a}$ associé à G ; on montre que $D(\mathfrak{a}') \subset \mathfrak{a}'$; si on avait $\mathfrak{a}' \neq (0)$, il serait engendré par une puissance T^m, et on aurait nécessairement $m \geq 1$ (car $P(\mathfrak{J}) = 0$ pour $P \in \mathfrak{a}$). Mais de $T^m \in \mathfrak{a}'$, on déduit $DT^m = mT^{m-1} \in \mathfrak{a}'$, ce qui est impossible ; d'où $\mathfrak{a}' = (0)$, et $\exp T\mathfrak{X}$ est un point généralisé de G.

On montre ensuite que, si $\mathfrak{X}_i$ $(1 \leq i \leq d)$ forment une base de $\mathfrak{g}$, et L est le corps des fractions de $K[[T_1, \ldots, T_d]]$, le point $s = \exp(T_1\mathfrak{X}_1) \ldots (\exp T_d\mathfrak{X}_d)$ est un point générique de G. Pour cela, il suffit de montrer que $K(s)$ est de dimension algébrique $\geq d$ sur K, et comme il est séparable, il suffit de définir des dérivations D_i $(1 \leq i \leq d)$ de L telles que les points $(D_i s)s^{-1}$ de $\mathfrak{E}^L$ soient linéairement indépendants ; les d dérivations partielles $D_i = \partial/\partial T_i$ vérifient ces conditions.

On déduit aussitôt de là que si G et H sont deux groupes irréductibles dont les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sont telles que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$), on a $G \subset H$ (resp. $G = H$) ; c'est inexact en caractéristique $\neq 0$. De même, l'algèbre enveloppante d'un groupe irréductible G est identique à l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ pour K de caractéristique 0, mais non nécessairement dans les autres cas.

Pour toute représentation rationnelle ρ de G et tout $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$, on a $\rho(\exp T\mathfrak{X}) = \exp(Td\rho(\mathfrak{X}))$.

On est naturellement amené à chercher les groupes algébriques "à un paramètre", ce qui signifie ici le plus petit groupe algébrique $G(\mathfrak{X})$ dont l'algèbre de Lie contient un endomorphisme $\mathfrak{X}$ donné. On va se borner d'abord au cas où K est algébriquement clos ; soit $\mathfrak{X} = \mathfrak{S} + \mathfrak{n}$, où $\mathfrak{n}$ est nilpotent, et $\mathfrak{S}$ semi-simple (c'est-à-dire diagonal et égal à $(a_1, \ldots, a_n)$ pour une base convenable de V). Alors $G(\mathfrak{X})$ est formé des éléments $s.\exp a\mathfrak{n}$, où a parcourt K, et s parcourt les matrices diagonales $(t_1, \ldots, t_n)$ pour lesquelles $\prod_{i=1}^{n} t_i^{e_i} = 1$ pour tous les systèmes d'entiers (e_i) tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = 0$. En général ($K$ quelconque de caractéristique 0), on montre que tout élément de $G(\mathfrak{X})$ est un polynome en $\mathfrak{X}$ à coefficients dans K, que $G(\mathfrak{X})$ contient $G(\mathfrak{S})$ et $G(\mathfrak{n})$, et que $\exp T\mathfrak{X}$ est point générique de $G(\mathfrak{X})$.

5. Algèbres de Lie algébriques.

On suppose toujours K de caractéristique 0 . Une sous-algèbre $\mathfrak{g}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ est dite algébrique si elle est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie algébrique. Une algèbre de Lie quelconque n'est pas nécessairement algébrique ; mais toute intersection d'algèbresde Lie algébrique est algébrique, ainsi que l'algèbre de Lie engendrée par toute famille d'algèbres de Lie algébriques. Si $\mathfrak{g}'$ est la plus petite algèbre de Lie algébrique contenant une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, tout idéal de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}'$, et les algèbres dérivées de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ sont identiques ; cette dernière algèbre de Lie est d'ailleurs algébrique, et si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique irréductible G , l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie du plus petit groupe algébrique contenant le groupe des commutateurs de G .

On appelle répliques d'un endomorphisme $\mathfrak{X}$ les éléments de la plus petite algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{g}(\mathfrak{X})$ contenant $\mathfrak{X}$. Ce sont des polynomes en $\mathfrak{X}$ sans terme constant ; les composantes semi-simple et nilpotente de $\mathfrak{X}$ sont des répliques de $\mathfrak{X}$. Si $\mathfrak{X}$ est nilpotent les répliques de $\mathfrak{X}$ sont les matrices $t\mathfrak{X}$. Si $\mathfrak{X}$ est semi-simple de racines caractéristiques $a_1, \ldots, a_n$, pour que $p(\mathfrak{X})$ (p polynome à coefficients dans K) soit une réplique de $\mathfrak{X}$, il faut et il suffit que $\sum_{i=1}^{n} e_i p(a_i) = 0$ pour tous les systèmes d'entiers tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = 0$ [3] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Théorie des groupes de Lie, t. II : Groupes algébriques.- Paris, Hermann, 1951, (Act. scient. et ind. n° 1152)

[2] CHEVALLEY (Claude) and KOLCHIN (E.R.). - Two proofs of a theorem on algebraic groups, Proc. Amer. math. Soc., t. 2, 1951, p. 126-134.

[3] CHEVALLEY (Claude). - A new kind of relationship between matrices, Amer. J. of Math., t. 65, 1943, p. 521-531.

[4] CHEVALLEY (Claude). - Algebraic Lie algebras, Ann. of Math., t. 48, 1947, p. 91-100.

[5] KOLCHIN (E.R.), Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations, Ann. of Math., t. 49, 1958, p. 1-23.

Voir aussi :

[6] TUAN (Hsio-Fu). - A note on the replicas of nilpotent matrices, Bull. Amer. math. Soc., t. 51, 1945, p. 306-312.

[7] COHEN (I.S.). - Note on a note of H.F. Tuan, Bull. Amer. math. Soc., t. 52, 1946, p. 175-177.

[8] GÔTO (Morikuni). - On the replicas of nilpotent matrices, Proc. Jap. Acad., t. 23, 1947, p. 39-41.

[9] MATSUSHIMA (Yôzo). - Note on the replicas of matrices, Proc. Jap. Acad., t. 23, 1947, p. 42-49.