JEAN-PIERRE SERRE

# Utilisation des nouvelles opérations de Steenrod dans la théorie des espaces fibrés

*Séminaire N. Bourbaki*, 1954, exp. n° 54, p. 37-46
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__37_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1951)

# UTILISATION DES NOUVELLES OPÉRATIONS DE STEENROD DANS LA THÉORIE DES ESPACES FIBRÉS.

par Jean-Pierre SERRE

(d'après une Note aux C.R. de A. BOREL et J.P. SERRE [6]).

## 1.- Introduction.

De nombreux problèmes de topologie se ramènent au suivant : étant donné un espace fibré $E$ , de fibre $F$ , de base $B$ , et de projection $p : E \longrightarrow B$ , peut-on trouver une section $s$ de $E$ , c'est-à-dire une application continue $s : B \longrightarrow E$ , telle que $p \circ s = 1$ ?

EXEMPLES.- On se demande si une variété $V_n$ est parallélisable. On a $B = V_n$ , $E$ espace des n-repères tangents à $V_n$ , $F = GL(n , R)$.

On se demande si une variété $V$ est presque-complexe. On prend $B = V$ , $E$ espace des automorphismes $I$ des espaces tangents à $V$ de carré $-1$ (cf. [7]).

En dehors des cas triviaux qui peuvent être traités par la théorie de la "première obstruction" d'Eilenberg, on ne connaît pas grand'chose de général sur ce problème. Prenons le cas typique où la base $B$ est une sphère $S_n$ . Deux méthodes sont possibles :

### 1.1. Méthode homotopique.

On considère l'homomorphisme bord de la suite exacte d'homotopie $\partial : \pi_n(S_n) \longrightarrow \pi_{n-1}(F)$ ; l'image par $\partial$ du générateur canonique de $\pi_n(S_n)$ est un élément $\alpha \in \pi_{n-1}(F)$ dont la nullité est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une section (par définition ! ) . Si l'on a la chance de "connaître" cet élément $\alpha$ et de savoir s'il est nul ou non, le problème sera résolu.

EXEMPLE.- On cherche un champ de 2-vecteurs tangents à $S_5$ . On a alors $E = V_{5,3}$ , $B = S_5$ , $F = V_{5,2}$ (on note $V_{n,r}$ la variété des r-repères orthonormaux de $R^n$) , et $\alpha \in \pi_4(V_{5,2})$ . Par une étude approfondie de $\alpha$ , ECKMANN a montré que $\alpha \neq 0$ , et le problème est donc impossible.

Dans des cas plus généraux, cette méthode se révèle inapplicable, vu l'ignorance où l'on est au sujet des groupes d'homotopie. On est alors obligé de faire appel à :

1.2. Méthode cohomologique.

Soit $\beta$ la classe fondamentale de $H^n(S_n)$ ; la projection p définit un homomorphisme transposé : $p^* : H^i(S_n) \longrightarrow H^i(E)$ ; soit $\gamma = p^*(\beta) \in H^n(E)$. Supposons que cet élément $\gamma$ puisse s'exprimer comme polynome $f(x_i)$ en des éléments $x_i \in H^i(E)$ , où $i < n$ . Alors E n'a pas de section.

En effet, s'il y avait une section s , elle définirait un homomorphisme transposé $s^* : H^i(E) \longrightarrow H^i(S_n)$ avec $s^* \circ p^* = 1$ , d'où : $\beta = s^* \circ p^*(\beta) = s^*(\gamma) = s^*(f(x_i)) = f(s^*(x_i)) = 0$ puisque les $s^*(x_i)$ sont nuls. On a donc une contradiction.

EXEMPLE.- On cherche une structure presque-complexe sur $S_4$ ; l'espace fibré E est alors homéomorphe à $P_3(C)$ , espace projectif complexe de dimension (complexe) 3 (Voir [7]). On a alors $\gamma \in H^4(E)$ ; mais il est bien connu que tout élément de $H^4(E)$ est de la forme $n.x^2$ où $x \in H^2(E)$ ; on est donc bien dans les conditions précédentes, et $S_4$ n'admet pas de structure presque-complexe (cf. [7]).

On notera que cette démonstration ne s'applique qu'à $S_4$ muni de la structure différentiable usuelle ; WU a réussi à se débarrasser de cette hypothèse, cf. [7] et [11] .

Il est clair que la méthode 1.2 peut être étendue à d'autres opérations cohomologiques que les polynomes par rapport au cup-produit : nous avons seulement utilisé le fait que l'opération f commute avec les applications continues et transforme 0 en 0 ; c'est aussi le cas pour les $Sq^i$ de Steenrod, et ceci permet de récupérer l'exemple d'Eckmann donné plus haut : on peut montrer que $\gamma$ , qui est dans ce cas un élément de $H^5(V_{5,3})$ , est égal à $Sq^2x$ , avec $x \in H^3(V_{5,3})$ (en cohomologie modulo 2).

Mais l'extension la plus intéressante de la méthode 1.2 est sans doute celle où l'on utilise comme opérations cohomologiques les puissances réduites de Steenrod ; c'est l'objet de cet exposé. Il faut d'abord apprendre à calculer les opérations en question dans les espaces "usuels" ; comme ces espaces sont des espaces homogènes de groupes de Lie (c'est la définition de l'adjectif "usuel" ! ) , on est finalement ramené au cas des groupes de Lie.

## 2.- Propriétés générales des puissances réduites de Steenrod.

Dans ce numéro, p désigne un nombre premier fixé, X un polyèdre fini, $H^i(X)$ le i-ième groupe de cohomologie de X à valeurs dans $Z_p$ , groupe cyclique d'ordre p .

N.E. STEENROD a défini dans [9] des homomorphismes (les "puissances réduites") $D^p_q : H^n(X) \longrightarrow H^{pn-q}(X)$ , définis pour toute valeur de $n$ et de $q$ . Il nous sera commode de changer légèrement ses notations et d'appeler $St^i_p$ l'homomorphisme $D^p_{pq-q-i} : H^q(X) \longrightarrow H^{q+i}(X)$ . Si $p = 2$ , $St^i_2$ n'est autre que $Sq^i$ .

Les définitions de ces opérations utilisées par STEENROD [9] et, postérieurement, par THOM [10] sont trop compliquées pour être données ici. Indiquons seulement que les permutations circulaires du produit de l'espace $X$ $p$ fois par lui-même y jouent un rôle essentiel.

Il est plus important de connaître les propriétés de ces opérations (qui d'ailleurs les caractérisent d'après THOM [10]). Ce sont :

(2.1) $St^i_p(x) = 0$ si $i < 0$ ou si $i > q(p-1)$ (on note $q$ le degré de $x$).

(2.2) $St^0_p(x) = \lambda_{p,q}.x$ , où $\lambda_{p,q}$ est un entier ne dépendant que de $p$ et de $q$ , qui est non nul mod $p$ .

(2.3) $St^{q(p-1)}_p(x) = x^p$ (p-ième puissance de $x$ , le produit utilisé étant le cup-produit).

(2.4) $$St^{2i}_p(x.y) = \pm \sum_{j+k=i} St^{2j}_p(x).St^{2k}_p(y)$$

(Ceci n'est vrai que si $p \neq 2$ ; si $p = 2$ , rappelons qu'on a :

(2.4') $$Sq^i(x.y) = \sum_{j+k=i} Sq^j(x).Sq^k(y)$$ d'après H. CARTAN).

(2.5) Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue, $St^i_p \circ f^* = f^* \circ St^i_p$ (en d'autres termes, $St^i_p$ est une opération cohomologique).

(2.6) Si $X \subset Y$ , soit $\delta$ l'homomorphisme cobord : $H^n(X) \longrightarrow H^{n+1}(Y \bmod X)$. On peut aussi définir les $St^i_p$ dans la cohomologie relative, et l'on a :

$$\delta \circ St^i_p = \lambda . St^i_p \circ \delta , \quad \text{où} \quad \lambda \not\equiv 0 \quad \bmod p .$$

En se reportant alors à la définition de la transgression d'un espace fibré donnée dans [8] , on voit que la formule précédente est valable en remplaçant $\delta$ par la transgression.

(2.7) Si $x \in H^2(X)$ est une classe de le espèce (i.e. provenant d'une classe entière par réduction des coefficients), on a

$$St^i_p(x) = 0 \quad \text{si} \quad 0 < i < 2p-2 .$$

Ce résultat est dû à THOM [10] (dans un cas plus général) ; on peut en donner une démonstration très élémentaire utilisant seulement (2.5) et le fait que les $St^i_p$ sont des homomorphismes.

Dans ce qui suit, nous utiliserons exclusivement les propriétés précédentes des p-puissances réduites, sans jamais remonter à leur définition.

## 3.- Calcul des $St_p^i$ dans la cohomologie des groupes de Lie : première réduction du problème.

(Pour les notations et résultats de ce numéro et du suivant, nous renvoyons à BOREL [5]).

Soit $G$ un groupe de Lie compact connexe, $E_G$ un espace fibré principal de groupe structural $G$, que nous supposerons universel (c'est-à-dire acyclique), $B_G = E_G/G$ la base de cet espace.

Si $G$ n'a pas de p-torsion, son algèbre de cohomologie (toujours à valeurs dans $Z_p$) est une algèbre extérieure engendrée par des éléments $p_1, \dots, p_\ell$ de degrés impairs $n_1, \dots, n_\ell$ où $\ell$ est le rang de $G$ (théorème de Hopf). Il suit de là et d'un théorème de Borel que l'algèbre de cohomologie de $B_G$ est une algèbre de polynomes engendrée par des éléments $q_1, \dots, q_\ell$ de degrés pairs $n_1 + 1, \dots, n_\ell + 1$. En outre, on peut choisir les $p_1, \dots, p_\ell$ de telle sorte qu'ils soient transgressifs et que leurs images par la transgression $T$ soient justement les $q_1, \dots, q_\ell$.

Supposons alors que nous connaissions les $St_p^i$ dans l'algèbre de cohomologie $H^*(B_G)$ ; d'après (2.6) nous pouvons en tirer les $St_p^i$ des éléments $p_1, \dots, p_\ell$ et d'après (2.4) de tous les éléments de $H^*(G)$.

Tout revient donc à déterminer les opérations $St_p^i$ dans $H^*(B_G)$.

## 4.- Calcul des $St_p^i$ dans la cohomologie des groupes de Lie ; seconde réduction du problème.

Soit $T$ un tore maximal de $G$ ; $T$ opère sur $E_G$, et $E_G$ est évidemment un espace universel pour $T$. On peut donc dire que $B_T = E_G/T$ et si l'on considère la fibration $\pi : E_G/T \longrightarrow E_G/G$ de fibre $G/T$, on voit que l'on a obtenu une fibration dont l'espace est $B_T$, la base $B_G$, la fibre $G/T$.

Or, on peut montrer [4] que la cohomologie de $G/T$ est nulle en toute dimension impaire (tout au moins si $G$ ne contient pas de facteur simple isomorphe à $E_6$, $E_7$ ou $E_8$) ; comme il en est de même pout $B_G$, un raisonnement immédiat de degrés montre que les différentielles de Leray de la fibration précédente sont nulles, ce qui entraîne comme on sait la formule de HIRSCH [4], et le fait que $\pi^* : H^i(B_G) \longrightarrow H^i(B_T)$ est un isomorphisme (dans). Ainsi :

L'algèbre de cohomologie de $B_G$ à coefficients dans $Z_p$ peut être identifiée à une sous-algèbre de celle de $B_T$ si $G$ n'a pas de p-torsion et ne contient aucun facteur isomorphe à $E_i$ $(i = 6 , 7 , 8)$.

On peut préciser quelle est cette sous-algèbre. Pour cela, soit $N$ le normalisateur de $T$ dans $G$, et $\Phi = N/T$ le groupe de Weyl du groupe de Lie $G$. L'algèbre de cohomologie (à coefficients entiers) de $B_T$ est une algèbre de polynomes engendrée par des éléments $x_1, \dots, x_\ell$ de degré 2 (d'après le numéro précédent, ou bien les produits directs d'espaces projectifs complexes, ou encore les groupes d'Eilenberg-MacLane) ; le groupe $\Phi$ opère sur le tore $T$, donc aussi sur l'algèbre de polynomes précédente ; si $I_G$ désigne le sous-anneau des polynomes invariants, $I_G \otimes Z_p$ peut être considéré comme une sous-algèbre de $H^*(B_T)$, et c'est la sous-algèbre cherchée, $\pi^* H^*(B_G)$ [4].

Puisque $H^*(B_T)$ est engendrée par des éléments de degré 2, les propriétés (2.4) et (2.7) permettent d'y déterminer complètement les $St_p^i$ ; d'où *a fortiori* cette détermination dans $H^*(B_G)$ qui est une sous-algèbre de $H^*(B_T)$. Notre méthode de calcul est maintenant complète.

## 5.- Cas du groupe unitaire $U(n)$.

Nous allons indiquer rapidement comment on peut appliquer la méthode des paragraphes 3 et 4 au groupe unitaire $U(n)$.

Dans ce cas, on obtient visiblement un tore maximal en choisissant une base orthonormale $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ et en prenant les opérateurs unitaires qui admettent ces vecteurs pour vecteurs propres : $U.\vec{e}_k = e^{ix_k}.\vec{e}_k$ ; le rang de $U(n)$ est donc $n$. Le groupe $N$, normalisateur de $T$ dans $G$, est le groupe des opérateurs "monomiaux" relativement à la base $(\vec{e}_k)$, c'est-à-dire des opérateurs qui permutent les droites complexes définies par les $\vec{e}_k$. Le groupe $\Phi = N/T$ est donc le groupe des permutations des $n$ objets $x_1, \dots, x_n$, et $I_G$ est l'algèbre des polynomes symétriques en les $x_i$. Il en est donc de même de $H^*(B_G) = I_G \otimes Z_p$.

D'après le théorème des fonctions symétriques, $H^*(B_G)$ est donc engendrée par les fonctions symétriques élémentaires, $C_i = \sum x_1 \dots x_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Les $C_i$ jouent donc le rôle des $q_i$ du n° 3 et ceci montre que $H^*(U(n))$ est l'algèbre extérieure engendrée par des éléments $P_i$ de degrés $1, 3, \dots, 2n-1$, correspondant par transgression aux $C_i$.

Calculons maintenant les $St_p^i$ des $C_i$ (et donc des $P_i$). On peut se borner aux $i$ divisibles par $2(p-1)$, car les autres sont nuls sur $H^*(B_T)$, et donc *a fortiori* sur $H^*(B_G)$ , d'après les propriétés (2.4) et (2.7) (c'est un cas particulier d'un résultat de THOM [10] ). On est donc ramené à calculer $St_p^{2k(p-1)}(C_i)$ . Si l'on se place dans $H^*(B_T)$ , on a $C_i \equiv \sum x_1 \ldots x_i$ , d'où, grâce à (2.4) , (2.7), ... etc :

$$St^{2k(p-1)}(C_i) \equiv \pm \sum x_1^p \ldots x_k^p x_{k+1} \ldots x_i \ .$$

Ecrivons alors le polynome symétrique $\sum x_1^p \ldots x_k^p x_{k+1} \ldots x_i$ comme polynome par rapport aux fonctions symétriques élémentaires :

$$\sum x_1^p \ldots x_k^p x_{k+1} \ldots x_i \equiv b_p^{k,j} \sum x_1 \ldots x_j + \ldots \text{ etc } (j = i + k(p-1)),$$

les termes non écrits étant des produits, et $b_p^{k,j}$ un entier "calculable". On a donc :

$$St_p^{2k(p-1)}(C_i) \equiv \pm b_p^{k,j}.C_j + \ldots \text{ etc, et de même (par transgression) :}$$

$$St_p^{2k(p-1)}(P_i) \equiv \lambda . b_p^{k,j} . P_j \quad (\text{mod } p)$$

où $\lambda$ est un entier $\not\equiv 0$ mod p dont on trouvera la valeur explicite dans la note [6] .

EXEMPLE d'application du résultat précédent.- Prenons $k = 1$ ; on trouve alors tout de suite que $b_p^{1,j} \equiv j$ modulo p . Si l'on examine alors la dernière formule écrite (celle relative aux $P_i$) , on voit ceci :

*Si $j > p$ , et si $j \not\equiv 0$ mod p , tout élément de $H^{2j-1}(U(n), Z_p)$ peut s'exprimer par des $St_p^{2(p-1)}$ et des cup-produits, à partir d'éléments de degré inférieur (strictement).*

Combinant ceci avec la méthode 1.2 , on voit que $U(n)/U(n-1) = S_{2n-1}$ n'a pas de section si $n \geq 3$ car dans ce cas on peut toujours trouver un nombre premier p tel que $n > p$ et $n \not\equiv 0$ mod p (prendre un diviseur premier de $n - 1$ par exemple).

On peut appliquer également ces résultats aux variétés de Stiefel complexes (je renvoie à la note [6] pour l'énoncé précis), et aux sphères presque-complexes. Mais dans ce dernier cas, une autre méthode conduit plus vite au résultat.

## 6.- Les sphères presque-complexes.

On s'appuie sur le résultat auxiliaire suivant :

6.1. *Soit E un espace fibré dont le groupe structural soit le groupe unitaire U(n) et la base B . Soient $c_i \in H^{2i}(B)$ les classes de Chern de E . Si $i \geq 4$ il existe un nombre premier $p \neq 2$ tel que $c_i$ , réduit mod p , puisse s'exprimer* par des $St_p^{2(p-1)}$ et des cup-produits à partir des classes de Chern $c_k$ de degrés plus petits.

Il suffit évidemment de prouver ceci dans la grassmannienne complexe, c'est-à-dire dans $B_G$, où $G = U(n)$. Mais dans ce cas, il est connu que les $c_i$ engendrent (au point de vue multiplicatif) l'algèbre $H^*(B_G)$ et ils sont donc égaux à des éléments décomposables près, à des multiples non nuls des $C_i$ introduits au paragraphe précédent. En appliquant la formule qui donne $St_p^{2(p-1)}(C_i)$, on obtient le résultat cherché.

NOTE.- Il serait intéressant de savoir si par hasard on n'aurait pas exactement $C_i = c_i$ ; cela semble très probable, étant donné certains résultats de WU [11] ; en tout cas, on peut prouver que $C_i = \pm c_i$. A partir de 6.1, on a très facilement:

6.2. Les sphères $S_2$ et $S_6$ sont les seules sphères admettant une structure presque-complexe.

Le cas de $S_4$ a été traité par WU (voir paragraphe 1, et [7]). Il nous suffit de nous occuper de $S_{2n}$, avec $n \geqslant 4$. Dans ce cas, soient $c_i$ les classes de Chern de $S_{2n}$, supposée muni d'une structure presque complexe ; toutes ces classes sont nulles sauf la n-ième (vu la nullité des groupes de cohomologie de $S_{2n}$!) qui, on le sait, est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de $S_{2n}$ (voir par exemple STEENROD, Topology of fibre bundles, 41.8), c'est-à-dire 2. Ainsi, si $p$ est premier $\neq 2$, on a :

$$c_i = 0 \quad \text{si} \quad i \neq n \quad \text{et} \quad c_n \neq 0 \mod p .$$

Il est clair que ceci est en contradiction avec 6.1, C.Q.F.D.

NOTE.- Si l'on veut uniquement démontrer le résultat 6.2, on peut éviter les théorèmes assez délicats des paragraphes 3, 4 ; tout revient à calculer les p-puissances réduites dans la grassmannienne complexe $B_G$. Pour cela, on introduit $B_T$ sous une forme "géométrique" : c'est l'espace des systèmes de n-droites complexes orthogonales deux à deux dans un espace numérique complexe de "grande dimension" ; on doit alors prouver :

a) que la cohomologie de $B_T$ est isomorphe à celle du produit de $n$ espaces projectifs complexes, et est donc une algèbre de polynomes engendrée par des éléments de degré 2, en nombre $n$.

Ceci est particulièrement facile en regardant les groupes d'homotopie.

b) $B_G$ est un quotient de $B_T$ ; il faut montrer que la cohomologie de $B_G$ se plonge isomorphiquement dans celle de $B_T$ (évident par la théorie de Leray, par exemple).

c) il faut voir que $H(B_G)$ s'identifie ainsi aux polynomes symétriques de $H(B_T)$ ; cela semble le point le plus difficile.

7.- Cas du groupe symplectique $Sp(n)$ . Le groupe $\pi_6(S_3)$.

Le groupe $\Phi$ est alors le groupe des permutations et changements de signe des n variables $x_1, \ldots, x_n$ ; les éléments $q_i$ sont donc les fonctions symétriques des carrés des variables :

$$\sum x_1^2 \quad , \quad \sum x_1^2 x_2^2 \quad , \ldots$$

Les calculs se développent exactement comme dans le cas unitaire, et ont des corollaires analogues. En particulier $Sp(n)/Sp(n-1) = S_{4n-1}$ n'a pas de section si $n \geqslant 2$ . Si $n = 2$ , $Sp(n-1) = Sp(1) = S_3$ ; donc la fibration de $Sp(2)$ par $S_3$ , base $S_7$ n'a pas de section. Cela montre que la classe caractéristique $\alpha \in \pi_6(S_3)$ de cette fibration n'est pas nulle. En fait, la démonstration utilisant le nombre premier 3 , on peut en tirer que cet élément n'est pas divisible par 3 dans $\pi_6(S_3)$ (i.e. définit un élément non nul de $\pi_6(S_3) \otimes Z_3$)

D'autre part MASSEY et G. WHITEHEAD ont prouvé (d'après Steenrod) que cet élément $\alpha$ est homotope à l'élément de Blakers-Massey, et n'est donc pas divisible par 2 . Si l'on admet que $\pi_6(S_3)$ est cyclique d'ordre 12 (ce qui résulte des travaux, en majeure partie non publiés, d'une dizaine de personnes), ceci montre que $\alpha$ est un générateur de $\pi_6(S_3)$ .

A partir de ce résultat, les méthodes usuelles permettent de calculer les $\pi_6$ de tous les groupes classiques, de $G_2$ et de $F_4$ . Une dernière remarque :

Contrairement à ce qui se passe pour le cup-produit, aucun groupe classique n'a même cohomologie ($St_p^i$ compris) qu'un produit de sphères ($S_1$ et $S_3$ exceptés, bien entendu ! ).

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Armand). - Impossibilité de fibrer une sphère par un produit de sphères, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 943-945.

[2] BOREL (Armand). - Sur la cohomologie des variétés de Stiefel et de certains groupes de Lie, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 1628-1630.

[3] BOREL (Armand). - La transgression dans les espaces fibrés principaux, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 2392-2394.

[4] BOREL (Armand). - Sur la cohomologie des espaces homogènes des groupes de Lie compacts, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 233, 1951, p. 569-571.

[5] BOREL (Armand). - Cohomologie des espaces homogènes, Séminaire Bourbaki, t. 3, 1950/51.

[6] BOREL (Armand) et SERRE (Jean-Pierre). - Détermination des p-puissances réduites de Steenrod dans la cohomologie des groupes classiques,. applications, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 233, 1951, p. 680-682.

[7] EHRESMANN (Charles). - Sur les variétés presque complexes, Séminaire Bourbaki, t. 3, 1950/51. [On y trouvera la bibliographie des travaux sur les variétés presque complexes, antérieurs à 1950].

[8] SERRE (Jean-Pierre). - Homologie singulière des espaces fibrés, Ann. of Math., t. 54, 1951, p. 425-505 (Thèse Sc. math. Paris. 1951).

[9] STEENROD (N.E.). - Reduced powers of cohomology classes. - Cours professé au Collège de France, mai 1951.

[10] THOM (René). - Une théorie axiomatique des puissances de Steenrod, Colloque de Topologie, Strasbourg 1951.

[11] WU WEN-TSUN. - Sur les puissances de Steenrod, Colloque de Topologie, Strasbourg 1951.

## ADDITIF

Pour la <u>théorie générale</u> des opérations de Steenrod, voir :

STEENROD (N.E.). - Reduced powers of cohomology classes, Ann. of Math., t. 56, 1952, p. 47-67.

STEENROD (N.E.). - Homology groups of symetric groups and reduced power operations, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 39, 1953, p. 213-217.

STEENROD (N.E.). - Cyclic reduced powers of cohomology classes, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 39, 1953, p. 217-223.

Les <u>relations</u> entre opérations de Steenrod ont été déterminées par :

ADEM (José). - The relations on Steenrod powers of cohomology classes, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz. - Princeton, Princeton University Press, 1957, p. 191-242.

CARTAN (Henri). - Sur l'itération des opérations de Steenrod, Comm. Math. Helv., t. 29, 1955, p. 40-58.

Quant aux résultats du présent exposé, leurs démonstrations détaillées ont été publiées dans :

BOREL (Armand) et SERRE (Jean-Pierre). - Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod, Amer. J. of Math., t. 57, 1953, p. 409-448.

Des résultats plus complets ont été récemment obtenus par A. BOREL et F. HIRZEBRUCH (non encore publiés) ; on y trouvera notamment l'équivalence des diverses définitions des classes de Chern (Cf. la note suivant 6.1).

Signalons aussi que la restriction faite au n° 4 sur le groupe G (ne contenir aucun facteur isomorphe à $E_6$ , $E_7$ ou $E_8$ ) est inutile ; on sait en effet démontrer que G/T n'a pas de torsion, donc que sa cohomologie est nulle en toute dimension impaire.

Pour toutes ces questions on pourra consulter l'article suivant, qui contient une abondante bibliographie :

BOREL (Armand). - Topology of Lie groups and characteristic classes, Bull. Amer. math. Soc., t. 61, 1955, p. 397-432.

[Avril 1957]