ROBERT PALLU DE LA BARRIÈRE

L'existence de sous-espaces stables

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 85, p. 327-334

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__327_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1953)

L'EXISTENCE DE SOUS-ESPACES STABLES, D'APRÈS WERMER

par Robert PALLU de LA BARRIÈRE

1. Orientation.

Le principal résultat de WERMER est le suivant :

THÉORÈME 1. - Soit A un opérateur continu sur un espace de Banach E , A étant inversible (c'est-à-dire possédant un inverse borné) et tel que la suite $\{|||A^n|||\}_{n \in Z}$ soit à croissance lente. Il existe des sous-espaces (fermés non triviaux (c'est-à-dire $\neq 0$ et $\neq E$) stables par A .

WERMER déduit ce résultat d'un résultat plus fin où les conditions imposées sur la suite $\{|||A^n|||\}$ sont moins restrictives. Cependant nous ferons un exposé direct du cas où $\{|||A^n|||\}$ est à croissance lente, étant donné la lumière jetée dans ce cas par la transformation de Fourier F .

REMARQUES générales. - Soient E un Banach et $L(E , E)$ l'algèbre des endomorphismes continus de E . A tout opérateur $A \in L(E , E)$, inversible, correspond une représentation $n \longrightarrow A^n$ de Z dans $L(E , E)$. La recherche de sous-espace stables par A revient au problème de la réductibilité de la représentation $n \longrightarrow A^n$. Soit alors X un groupe élémentaire (c'est-à-dire de la forme $R^{\ell} \times Z^m \times T^h \times D$, D étant un groupe fini). Une représentation $x \longrightarrow A(x)$ de X sera dite à croissance lente si elle est continue pour la topologie de la convergence simple forte et si $|||A(x)|||$ est à croissance lente pour $x \longrightarrow \infty$. Le théorème 1 est alors un cas particulier du suivant (L. SCHWARTZ).

THÉORÈME 2. - Toute représentation irréductible à croissance lente d'un groupe élémentaire X est de dimension 1 .

2. Démonstration du théorème 2.

A. PROPOSITION. - A toute représentation $x \longrightarrow A(x)$ à croissance lente correspond une représentation $\varphi \longrightarrow A(\varphi)$ de $(S)_x$ algèbre des fonctions numériques indéfiniment dérivables à décroissance rapide munies du produit de composition.

DÉMONSTRATION. –

a. Existence de $A(\varphi)$. – Pour tout $e \in E$ poser $A(\varphi)e = \int A(x)e\,\varphi(x)dx$,

b. Continuité de $A(\varphi)$. – On a

$$\| A(\varphi)e \| \leqslant \| e \| \int |||A(x)||| \; |\varphi(x)|\, dx \qquad \text{d'où}$$

$$|||A(\varphi)||| \leqslant \int |||A(x)||| \; |\varphi(x)|dx .$$

c. Continuité de $\varphi \longrightarrow A(\varphi)$. – Si $\varphi \longrightarrow 0$, $A(\varphi) \longrightarrow 0$ dans $L(E , E)$ muni de la topologie uniforme.

d. $A(\varphi * \Psi) = A(\varphi)\, A(\Psi)$, car

$$A(\varphi * \Psi) = \int A(x)(\varphi * \Psi)(x)\, dx =$$

$$= \iint A(x + x')\; \varphi(x)\; \Psi(x')\, dx\, dx' = \int A(x)\, A(x')\; \varphi(x)\; \Psi(x')\, dx\, dx' =$$

$$= \int A(x)\; \varphi(x)\, dx \int A(x')\; \Psi(x')\; dx' = A(\varphi)\, A(\Psi) .$$

REMARQUE. – On a également $A(\tau_h \varphi) = A(h)\, A(\varphi) = A(\varphi)\, A(h)$ si τ_h est la translation d'amplitude h .

B. – Soit y le groupe dual de X . Munissons $(S)_y$ du produit usuel. L'application $u \longrightarrow A(F^{-1}\bar{u}) = B(u)$ est une représentation de $(S)_y$ dans $L(E , E)$ c'est-à-dire que $B(uv) = B(u)\, B(v)$.

On peut considérer les applications $\varphi \longrightarrow A(\varphi)$ et $u \longrightarrow B(u)$ comme des distributions A et B sur X et sur Y à valeurs dans $L(E , E)$ ($A \in (S')_x^{L(E , E)}$, $B \in (S')_y^{L(E , E)}$) . B n'est autre que la transformée de Fourier de A . Le support Σ de B sera appelé spectre de la représentation.

A tout $e \in E$ correspond une distribution $B_e \in (S')_y^E$ définie par $B_e(v) = B(v)e$. L'application $e \longrightarrow B_e$ est continue, car si v décrit un borné de $(S)_y$, $B(v)$ décrit un borné de $L(E , E)$, et si de plus $e \longrightarrow 0$, alors $B_e(v) = B(v)e \longrightarrow 0$.

A tout couple $e \in E$, $e' \in E'$ correspond une distribution usuelle $B_{e,e'}$ définie par $B_{e,e'}(v) = \langle B(v)e , e' \rangle = F \langle A(x)e , e' \rangle$; Σ n'est autre que l'adhérence de la réunion des supports des B_e ou des $B_{e,e'}$, le support de B_e étant par ailleurs l'adhérence de la réunion des supports des $B_{e,e'}$ quand e' parcourt E' .

C. Construction de sous-espaces stables.

1re méthode. – Soit $e \in E$; le sous-espace fermé $\mathfrak{M}_e$ engendré par les $A(x)e$ est stable par les $A(x)$ et les $A(\varphi)$.

2e méthode. – Soit σ fermé $\subset \Sigma$. Le sous-espace $\mathfrak{N}_\sigma$ des $e \in E$, tels que B_e ait son support contenu dans σ, est fermé et stable par tout opérateur permutant aux $A(\varphi)$ en particulier par les $A(x)$ et les $A(\varphi)$. En effet l'ensemble des distributions de $(S')_y^{L(E,E)}$ ayant leur support dans σ est fermé, et $e \to B_e$ est continue, donc $\mathfrak{N}_\sigma$ est fermé. $\mathfrak{N}_\sigma$ est stable, car soit $T \in L(E, E)$ permutant aux $A(x)$. Il faut montrer que $B_e(u) = 0$ entraîne $B_{Te}(u) = 0$. Or ceci découle de

$$B_{Te}(u) = B(u)(Te) = TB(u)e = TB_e(u) .$$

3e méthode. – Soit Δ_v le noyau de $B(v)$. Δ_v est un sous-espace fermé et stable par tout $T \in L(E, E)$ permutant aux $A(\varphi)$.

REMARQUES.

1° Si σ est le support de B_e, on a $\mathfrak{M}_e \subset \mathfrak{N}_\sigma$

2° Δ_v est l'ensemble des e tels que $vB_e = 0$. Si σ est l'ensemble des $y \in \Sigma$ tels que $v(y) = 0$, on a $\Delta_e \subset \mathfrak{N}_\sigma$

D. Sous-espaces stables non triviaux

a. Cas où Σ ne se réduit pas à un point. – Soit $u, v \in (S)_y$ tels que $uv = 0$, u et v n'étant pas identiques à 0 sur Σ. On a $B(u)\,B(v) = B(v)\,B(u) = 0$, $uB \neq 0$, $vB \neq 0$ et par suite $B(u) \neq 0$ et $B(v) \neq 0$ (car $uB(w) = B(u)\,B(w)$). Δ_u et Δ_v sont des sous-espaces stables non triviaux, ainsi que $\mathfrak{N}_\sigma$, si σ est l'intersection de Σ et du support de u (ou de v) ou encore $\mathfrak{M}_e$ avec $e = B(u)e_o$, $e_o \notin \Delta_u$.

b. Cas où Σ se réduit à un point. – Si $\Sigma = \{0\}$, la distribution A est un polynôme en x à coefficients dans $L(E, E)$, soit $A(x) = \sum_{p=0}^{p=P} K_p \frac{x^p}{p!}$.

La relation $A(x + x') = A(x)\,A(x')$ entraîne $K_p K_q = K_{p+q}$, d'où $K_o = 1$ et $K_p = (K_1)^p$. Ou bien $K_1 = 0$, ou bien le noyau de K_1 est non trivial.

Si $\Sigma = \{a\}$, on se ramène au cas précédent en posant $A_1(x) = e^{-iax} A(x)$ et l'on voit que si la représentation est irréductible on a $A(x) = e^{iax}.I$, ce qui suppose E de dimension 1.

3. Cas où $X = R$.

A la représentation $x \longrightarrow A(x)$ sont associées deux représentations de R_+ et de R_- dites semi-groupes positif et négatif. Soit

$$R_1(\lambda) = \int_0^{\infty} A(x)\, e^{-\lambda x}\, dx \quad \text{et} \quad R_2(\lambda) = -\int_{-\infty}^{0} A(x)\, e^{-\lambda x}\, dx .$$

$R_1(\lambda)$ et $R_2(\lambda)$ sont les transformées de Laplace des semi-groupes positif et négatif, définies et holomorphes respectivement dans $\mathcal{R}(\lambda) > 0$ et $\mathcal{R}(\lambda) < 0$. Soit K le générateur infinitésimal de la représentation. On a $R_1(\lambda) = (\lambda - K)^{-1}$ pour $\mathcal{R}(\lambda) > 0$ et $R_2(\lambda) = (\lambda - K)^{-1}$ pour $\mathcal{R}(\lambda) < 0$. Le spectre Σ_1 de K est donc sur l'axe imaginaire et peut être ainsi défini : un point $\lambda_0 = 0 + i\eta \in \complement \Sigma_1$, si λ_0 est centre d'un cercle γ tel que $R_1(\lambda)$ et $R_2(\lambda)$ soient dans γ en prolongement analytique de part et d'autre de l'axe imaginaire.

Ces considérations rappellent celles de Carleman en ce qui concerne la définition du spectre d'une fonction. On peut exprimer ainsi l'idée de Carleman. Soit $T \in (\mathcal{D}')_x$. Posons $T = T_1 - T_2$, T_1 ayant son support sur R_+ et T_2 son support sur R_- (T_1 et T_2 sont définies à une distribution de support 0 près). Supposons que T_1 ait sa transformée de Laplace

$$f_1(\lambda) = f_1(\xi + i\eta) = F(T_1\, e^{-\xi x})$$

définie dans $\mathcal{R}(\lambda) > 0$ et T_2 sa transformée de Laplace

$$f_2(\lambda) = f_2(\xi + i\eta) = F(T_2\, e^{-\xi x})$$

définie dans $\mathcal{R}(\lambda) < 0$, auquel cas nous dirons que T est à croissance presque lente (ce qui sera réalisé en particulier pour $T \in (S')_x$). Identifions l'axe imaginaire du plan des λ avec le dual de R. Le spectre σ_T de T est défini de la façon suivante : $\eta \in \complement\, \sigma_T$ si $0 + i\eta$ est centre d'un cercle γ tel que $f_1(\lambda)$ et $f_2(\lambda)$ soient dans γ en prolongement analytique de part et d'autre de l'axe imaginaire. σ_T est visiblement fermé.

Si $T \in (S')_x$, on a

$$F(T) = F(T_1) - F(T_2) = \lim_{\xi \to 0} [f_1(\xi + i\eta) - f_2(-\xi + i\eta)]$$

le crochet étant considéré comme une distribution en η dépendant du paramètre ξ. Par suite si $\eta \in \complement\, \sigma_T$, il existe un voisinage ouvert V de η tel que $F(T) = 0$ sur V, et η n'appartient pas au support de $F(T)$. On peut montrer la réciproque. Donc si $T \in (S')_x$, le spectre de T coïncide avec le support de $F(T)$.

Ces considérations se généralisent à des distributions à valeurs vectorielles.

Nous voyons donc que pour une représentation à croissance presque lente (c'est-à-dire telle que la distribution $A(x)$ soit à croissance presque lente), le spectre au sens de Carleman de la distribution $A(x)$ coïncide avec le spectre du générateur infinitésimal K de la représentation et si $A(x)$ est à croissance lente avec le spectre de la représentation.

On peut donner des définitions analogues pour $T \in (\mathcal{D}')_Z$, $T = \{t_n\}$. La transformée de Laplace sera

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{t_n}{\lambda^n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} t_n \, e^{-in\theta}/\rho^n = F\{t_n/\rho^n\}$$

fonction holomorphe de $\lambda = \rho e^{i\theta}$ à l'intérieur de la couronne déterminée par les ρ tels que $T/\rho^n \in (S')_Z$. T sera dite à croissance presque lente si $T_1 = \{t_n\}_{n>0}$ et $T_2 = \{t_n\}_{n \leq 0}$ ont leurs transformées de Laplace

$$f_1^T(\lambda) = F(T_1/\rho^n) = \sum_1^{\infty} \frac{t_n}{\lambda^n}$$

et

$$f_2^T(\lambda) = F(T_2/\rho^n) = \sum_{-\infty}^{0} \frac{t_n}{\lambda^n} = \sum_{0}^{+\infty} t_{-n}\lambda^n$$

respectivement définies dans $|\lambda| > 1$ et $|\lambda| < 1$. Le spectre σ_T de T est ainsi défini : $\theta \in \complement\sigma_T$ si $e^{i\theta}$ est centre d'un cercle γ tel que $f_1^T(\lambda)$ et $f_2^T(\lambda)$ soient dans γ en prolongement analytique de part et d'autre de $|\lambda| = 1$. On a alors : dans le cas d'une représentation à croissance presque lente $n \longrightarrow A^n$ (c'est-à-dire telle que $\{|||A^n|||\}$ soit à croissance presque lente) le spectre au sens de Carleman de la distribution $\{A^n\}$ coïncide avec le spectre du générateur A de la représentation et si $n \longrightarrow A^n$ est à croissance lente avec le spectre de la représentation.

4. Sous-espaces invariants par une représentation à croissance presque lente.

Une suite $\{\rho_n\}$, $\rho_n \geq 0$ sera dite satisfaire à la condition (A) s'il existe une suite $\{d_n\}$, $d_n \geq 0$ telle que

a. $\rho_n \leq d_n$ pour tout n .

b. $d_{-n} = d_n$

c. $d_n \geq 1$

d. $\sum_0^{\infty} \log d_n/n^2 + 1 < \infty$

e. d_n est non décroissante pour $|n|$ croissant

f. $\log d_n/n$ décroît quand $|n|$ croît

La condition (A) est vérifiée en particulier si $\rho_n = 0(\exp(|n|^{\alpha}))$ avec $0 < \alpha < 1$.

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 3. – Soit A un opérateur inversible tel que la suite $|||A^n|||$ vérifie (A), Σ le spectre de A (sur le cercle unité), σ un ensemble fermé $\subset \Sigma$. L'ensemble $\mathfrak{N}_\sigma$ des $e \in E$ tels que le spectre (au sens de Carleman) de la suite $A^n e$ soit contenu dans σ est un sous-espace fermé invariant par les A^n. Si Σ n'est pas réduit à un point, il existe des $\mathfrak{N}_\sigma$ non triviaux.

Pour la démonstration de ce théorème (lemmes 1 à 5) WERMER associe à toute suite $\{\rho_n\}$ vérifiant (A) l'espace de Banach L des suites $H = \{h_n\}$ telles que $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h_n| \rho_n < \infty$ et son dual L' espace des suites $X = \{x_n\}$ telles que $\sup|x_n|/\rho_n < \infty$. Si $X \in L'$, X est à croissance presque lente. L est une algèbre pour le produit de composition et le produit de composition d'un élément de L par un élément de L' est défini et est dans L'.

LEMME 1. – Soit Λ un ensemble fermé du cercle unité. L'ensemble E_Λ des $X \in L'$ dont le spectre $\sigma(X)$ est dans Λ est un sous-espace faiblement fermé de L'.

DÉMONSTRATION. – Soient $X^p = \{x_n^p\} \to X$ avec $\sigma(X^p) \subset \Lambda$, $X^p \to X$ (faiblement), $\lambda_0 \in \complement \Lambda$, γ un cercle de centre λ_0 tel que $f_1^{X^p}$ et $f_2^{X^p}$ soient en prolongement analytique dans γ, $f^{(p)}$ holomorphe dans γ et prolongeant $f_1^{X^p}$ et $f_2^{X^p}$. On montre d'abord que les $f^{(p)}$ sont uniformément bornés dans γ (démonstration très technique où interviennent les différentes parties de (A)). Soit alors dans un voisinage de λ_0, $f(\lambda)$ la limite d'une suite partielle de $f^{(p)}$. Pour tout n on a $\lim_{p\to\infty} x_n^p = x_n$. Par suite $|x_n^p| \leqslant \|X^p\|\rho_n \leqslant \rho_n$ et pour $|\lambda| > 1$

$$f^{(p)}(\lambda) \to \sum_1^\infty x_n/\lambda^n = f_1^X(\lambda) .$$

De même pour $|\lambda| < 1$,

$$f^{(p)}(\lambda) \to f_2^X(\lambda)$$

d'où la conclusion.

LEMME 2. – Soit S un ensemble fermé du cercle unité, et $z \in \complement S$. Il existe $H \in L$, avec $FH = 0$ sur S et $FH(z) \neq 0$.

DÉMONSTRATION. – Soit $X_\lambda = \{\lambda^n\}$ pour $|\lambda| = 1$. On a $\sigma(X_\lambda) = \{\lambda\}$ et $FH(\lambda) = \langle H, X_\lambda \rangle$. Il suffit de prendre H orthogonal à E_Λ et tel que $\langle H, X_{\lambda_0} \rangle \neq 0$.

LEMME 3. – Soit $X_o \in L'$ et S l'ensemble sur lequel s'annulent toutes les FH pour $H * X_o = 0$, S_1 un voisinage fermé de S. Si $FH = 0$ sur S_1, on a $H * X_o = 0$.

DÉMONSTRATION. – Sinon soit λ un point du cercle unité qui considéré comme caractère de L annule l'idéal fermé I des K tels que $K * (H * X_o) = 0$. On vérifie que $\lambda \in S$. Soit alors $H_1 \in L$ avec $FH_1(\lambda) \neq 0$ et $FH_1 = 0$ sur $\complement S_1$. On a $H_1 * H = 0$, d'où $H_1 \in I$ et contradiction.

COROLLAIRE. – Soit $H \in L$. Si $H * X_o = 0$, $FH = 0$ sur $\sigma(X_o)$.

DÉMONSTRATION. – Il suffit de montrer que $X_o \in E_{S_1}$. Sinon soit $H \in L$ avec $\langle H, X_o \rangle \neq 0$, $\langle H, X \rangle = 0$ pour $X \in E_{S_1}$ d'où $FH(\lambda) = 0$ sur S_1 et $H * X_o = 0$ et enfin la contradiction $\langle H, X_o \rangle = 0$.

A partir de maintenant $\rho_n = |||T^n|||$.

LEMME 4. – $\mathcal{H}_\sigma$ est un sous-espace fermé invariant par tout $T \in L(E, E)$ permutant aux A^n.

DÉMONSTRATION. – $\mathcal{H}_\sigma$ est fermé d'après le lemme 1 et la continuité des applications $e \to \langle A^{n'} e, e' \rangle$ de E dans L'. $\mathcal{H}_\sigma$ est invariant par T d'après $\langle A^n Te, e' \rangle = \langle A^n e, T^* e' \rangle$.

LEMME 5. – Si Σ n'est pas réduit à un point, il existe des sous-espaces stables non triviaux.

DÉMONSTRATION. – Il existe $H, K \in L$ tels que $H * K = 0$, FH et FK n'étant pas identiques à zéro sur Σ. Soit $A(H) = \sum_{n \in Z} h_n A^n$, on a $A(H) \neq 0$ sinon $H * \{A^n\} = 0$ et FH serait nulle sur le spectre Σ de A^n. De même $A(K) = \sum_{n \in Z} k_n A^n \neq 0$ et $A(H)\,A(K) = A(H * K) = 0$. Les noyaux de $A(H)$ et $A(K)$ sont des sous-espaces stables non triviaux ainsi que $\mathcal{H}_\sigma$, σ étant l'intersection de Σ et du support de u.

REMARQUE. – Le théorème 1 se déduit chez WERMER du théorème 3 grâce à un théorème de Gelfand et Hille : Si A est inversible, la suite $|||A^n|||$ à croissance lente et le spectre de A réduit à un point p, $A - p$ est nilpotent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARLEMAN (T.). - Sur l'application de la théorie des fonctions analytiques dans la théorie des transformées de Fourier, Colloque d'Analyse harmonique [Nancy 1947]. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1949 (Coll. intern. du C.N.R.S., n° 15) ; p. 45-53.

[2] WERMER (John). - The existence of invariant subspaces, Duke math. J., t. 19, 1952, p. 615-622.

Signalons également :

ARONSZAJN (N.) and SMITH (K.T.). - Invariant subspaces of completely continous operators. - Lawrence, University of Kansas, 1953 (Studies in eigenvalue problem, Technical report n° 9)

où est démontrée l'existence de sous-espaces stables non triviaux par un opérateur complétement continu dans un Banach (résultat généralisé par DIXMIER à un espace vectoriel topologique localement convexe quelconque).
