Jean-Louis Koszul

Relations d'équivalence sur les courbes algébriques ayant des points multiples

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 75, p. 247-254
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__247_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1953)

RELATIONS D'ÉQUIVALENCE SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES AYANT DES POINTS MULTIPLES

par Jean-Louis KOSZUL
[d'après : Maxwell ROSENLICHT(1)]

1. Systèmes complets de diviseurs.

Soit C une courbe algébrique ayant k pour corps de définition dans un espace projectif S^n. Son idéal p est un idéal premier homogène de l'algèbre de polynômes $k[X_0, X_1, \dots, X_n]$. Le corps des quotients de $k[X]/p$ qui est engendré par les images x_i des X_i sera noté $k(x)$. On désigne par K le corps des fonctions de C rationnelles sur k qui est constitué par les éléments de $k(x)$ de la forme $F(x)/G(x)$ où F et G sont des polynômes homogènes de même degré dans $k[X]$ et $G \notin p$.

A toute forme $F \in k[X]$ est associé un diviseur entier (F) du corps K. C'est le P.P.C.M. des diviseurs des fonctions $F(x)/G(x)$ où G est une forme de même degré que F et $G(x) \neq 0$. Supposons que tous les points de C soient simples relativement à k, on appelle alors système complet de diviseurs un ensemble Λ de diviseurs entiers de K vérifiant la condition suivante : si $A \in \Lambda$, pour tout $f \in K$ tel que $(f)A$ soit entier, $(f)A \in \Lambda$. Il est bien connu que, pour m assez grand, l'ensemble des diviseurs des formes de degré m est un système complet. Ce résultat subsiste pour des courbes ayant des points multiples, à condition d'affaiblir la notion de système complet.

Soit P un point de C. Son anneau local est constitué par les quotients $F(x)/G(x) \in K$, où F et G sont des formes de même degré dans $k[X]$ et $G(P) \neq 0$. Pour que le point P soit simple relativement à k, il faut et il suffit que sont anneau local dans K soit l'anneau d'une valuation de K sur k. Soit $\mathfrak{o}$ l'intersection des anneaux locaux des points multiples de C. Un ensemble Λ de diviseurs entiers de K sera appelé un système complet de diviseurs de C s'il vérifie la condition suivante : si $A \in \Lambda$, pour tout

(1) ROSENLICHT (Maxwell). - Equivalence relations on algebraic curves, Annals of Math., Series 2, t. 56, 1952, p. 169-191.

$f \in \mathfrak{o}$ tel que $(f)A$ soit entier, $(f)A \in \Lambda$. Avec cette définition, on a le

THÉORÈME 1. - Pour m assez grand, l'ensemble des diviseurs des formes de degré m est un système complet.

Soit L_r le sous-espace des éléments de $k(x)$ de la forme $F(x)/G(x)$ où F et G sont des formes dans $k[X]$ vérifiant les conditions :

1° degré F - degré $G = r$;

2° (F) est multiple de (G) ;

3° $G(P) \neq 0$ pour tout point multiple P de C . L'espace L_r contient le sous-espace $k_r[x]$ des $F(x)$ où F est une forme de degré r .

Le théorème signifie que, pour r assez grand, $L_r = k_r[x]$ et sa démonstration diffère peu de celle que l'on donne dans le cas d'une courbe sans point multiple.

2. Anneaux semi-locaux.

On appellera anneau semi-local un anneau noethérien n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux maximaux. Lorsqu'il sera question d'anneau dans $K \supset k$, on sous-entendra toujours qu'il s'agit d'un anneau contenant k et dont K est le corps des quotients.

THÉORÈME 2. - Soit K un corps de fonctions algébriques d'une variable sur k . Pour les anneaux $\mathfrak{o} \subset K$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° $\mathfrak{o}$ est semi-local,

2° Il existe dans $\mathfrak{o}$ un élément y transcendant sur k et des éléments $\xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n$ tels que $K = k(y , \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n)$ et que $\mathfrak{o}$ soit l'ensemble des éléments de la forme $a/G(y)$, où $a \in k[y , \xi_1 , \ldots , \xi_n]$ et G est un polynôme à coefficients dans k tel que $G(0) \neq 0$.

3° Il existe des valuations v_i $(i = 1 , 2 , \ldots , p)$ de K et un entier N tel que $\mathfrak{o}$ contienne tous les $x \in K$ pour lesquels $v_i(x) \geq N$ $(i = 1 , 2 , \ldots , p)$.

4° $\mathfrak{o}$ n'est contenu que dans un nombre fini d'anneaux de valuation de K .

Pour passer de 1° à 2°, on choisit y dans l'intersection des idéaux maximaux de $\mathfrak{o}$. Si G est un polynôme à coefficients dans k tel que $G(0) \neq 0$, alors $1/G(y) \in \mathfrak{o}$. On démontre alors, en utilisant l'hypothèse que $\mathfrak{o}$ est noethérien, que $\mathfrak{o}$ est une algèbre engendrée par un nombre fini d'éléments ξ sur l'anneau des $F(y)/G(y)$ avec $G(0) \neq 0$.

Supposant maintenant que $\mathfrak{o}$ vérifie la condition 2°, tout élément z de K étant algébrique sur $k(y)$ et contenu dans le corps des quotients de $\mathfrak{o}$ peut se mettre sous la forme $z = a/F(y)$, où $a \in \mathcal{O}$ et où F est un polynôme à coefficients dans k. Il existe donc pour tout $z \in K$ un entier n tel que $z\, y^n \in \mathcal{O}$. La fermeture intégrale de $k[y]$ dans K étant un $k[y]$ module de type fini, il existe un entier r tels que $y^r\, \overline{k[y]} \subset \mathcal{O}$. Soient v_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ les valuations de K telles que $v_i(y) > 0$. Si N est le plus grand des entiers $r\, v_i(y)$, pour tout $x \in K$ tel que $v_i(x) \geqslant N$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, il existera un polynôme G à coefficients dans k tel que $G(0) \neq 0$ et $v(G(y)x/y^N) \geqslant 0$ pour toute valuation de K dont l'anneau contient $k[y]$. Par suite $G(y)x \in \mathcal{O}$ et donc $x \in \mathcal{O}$.

3° $\Longrightarrow$ 4° et 4° $\Longrightarrow$ 1° sont immédiats.

On dira qu'une place de K sur k est une place de l'anneau semi-local $\mathcal{O}$ si son anneau de valuation contient $\mathcal{O}$. D'après 4°, un anneau semi-local n'a qu'un nombre fini de places. On observera que la condition 3° entraîne : K est le corps des quotients de $\mathcal{O}$. Elle montre donc que toute intersection d'un nombre fini d'anneaux semi-locaux (et en particulier d'anneaux locaux) dans K est un anneau semi-local dans K.

Inversement, si $\mathcal{O}$ est un anneau semi-local dans K, ses idéaux maximaux $\mathfrak{m}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ définissent des anneaux locaux $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}_i}$ dans K qui n'ont pas de place commune deux à deux et qui contiennnent tous $\mathcal{O}$. On a $\mathcal{O} = \bigcap \mathcal{O}_{\mathfrak{m}_i}$ car, $\mathcal{O}$ étant noethérien, a, $b \in \mathcal{O}$ et $a/b \in \bigcap \mathcal{O}_{\mathfrak{m}_i}$ entraînent $a \in b\mathcal{O}$.

Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux anneaux semi-locaux n'ayant pas de place commune. Tout anneau local $\mathcal{O}$ contenant $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ contient l'un des anneaux $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$. Choisissons en effet un $x \in K$ tel que $v(x)$ soit très grand pour toute valuation v dont l'anneau contient $\mathcal{O}_1$ et $v(x - 1)$ très grand pour toute valuation v dont l'anneau contient $\mathcal{O}_2$. Alors, $x \in \mathcal{O}_1$, $x - 1 \in \mathcal{O}_2$, donc $x \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}$. Si $1/x \in \mathcal{O}$, alors quel que soit $a \in \mathcal{O}_1$, on a $ax \in \mathcal{O}$ et donc $a \in \mathcal{O}$. Si $1/x$ n'est pas dans $\mathcal{O}$, alors $1/(x - 1) \in \mathcal{O}$ et l'on démontre que $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}$. On déduit de là que si $\mathcal{O}$ est un anneau semi-local dans K et si $\mathcal{O} = \bigcap \mathcal{O}_i$ où les $\mathcal{O}_i$ sont des anneaux locaux sans place commune deux à deux, la famille des $\mathcal{O}_i$ est, à l'ordre près, la famille des anneaux locaux $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}_i}$ associés aux idéaux maximaux de $\mathcal{O}$.

On démontre d'autre part que, si $\mathcal{O}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ est une famille d'anneaux semi-locaux sans place commune deux à deux et si $\overline{\mathcal{O}}_i$ désigne la fermeture intégrale de $\mathcal{O}_i$ dans K, alors

$$\dim_k \bigcap \bar{\mathfrak{o}}_i / \bigcap \mathfrak{o}_i = \sum \dim_k \bar{\mathfrak{o}}_i/\mathfrak{o}_i \quad .$$

L'intersection des anneaux locaux des points multiples d'une courbe est donc un anneau semi-local $\mathfrak{o}$ qui <u>détermine</u> ces anneaux locaux. La dimension sur k de $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{o}$ peut être appelée le "degré de singularité de la courbe".

THÉORÈME 3. – <u>Soient</u> $\mathfrak{o}_1 , \mathfrak{o}_2 , \dots , \mathfrak{o}_n$ <u>des anneaux locaux sans place commune deux à deux dans un corps de fonctions algébriques d'une variable</u> K . <u>Il existe un modèle projectif</u> C <u>de</u> K <u>tel que</u>

1° <u>chaque</u> $\mathfrak{o}_i$ <u>soit l'anneau local d'un point au moins de</u> C

2° <u>les points</u> de C <u>dont l'anneau local n'est pas un</u> $\mathfrak{o}_i$ <u>sont simples</u>.

Utilisons en effet la description de l'anneau semi-local $\mathfrak{o} = \bigcap \mathfrak{o}_i$ donnée au théorème 2 , 3°. La courbe C' ayant $(y , \xi_1 , \dots , \xi_n)$ pour point générique non homogène sur k , est un modèle affine de K . L'intersection avec $k[y , \xi]$ d'un idéal maximal de $\mathfrak{o}$ est l'idéal d'un point de C' ayant l'un des $\mathfrak{o}_i$ pour anneau local. On passe de là à un modèle projectif, puis on fait disparaître au besoin les points multiples qui n'ont pas l'un des $\mathfrak{o}_i$ pour anneau local en effectuant des transformations quadratiques qui n'altèrent pas les $\mathfrak{o}_i$.

3. <u>Théorème de Riemann Roch relatif à un anneau semi-local</u>.

Soit K un corps de fonctions algébriques d'une variable ayant k pour <u>corps de constantes</u>, et soit $\mathfrak{o}$ un anneau semi-local dans K . Pour tout diviseur A de K , on note $d(A)$ le degré de A et $L(A)$ l'espace sur k des $x \in K$ dont le diviseur (x) est multiple de A^{-1} . On désigne par $\ell(A)$ la dimension sur k de $L(A)$ et par $\ell_o(A)$ celle de $L(A) \cap \mathfrak{o}$. Les diviseurs premiers de K dont l'anneau de valuation contient $\mathfrak{o}$ seront notés $q_1 , q_2 , \dots , q_n$. Un diviseur A de K sera dit <u>premier aux places de</u> $\mathfrak{o}$ lorsque $v_{q_i}(A) = 0$ pour $i = 1 , 2 , \dots , n$. Un diviseur A sera dit <u>multiple</u> mod $\mathfrak{o}$ d'un diviseur B lorsque $v_p(A) \geqslant v_p(B)$ pour tout diviseur premier p dont l'anneau de valuation ne contient pas $\mathfrak{o}$.

D'après le théorème 2 du n° 2 , il existe en entier $N > 0$ tel que, si $Q = q_1 q_2 \dots q_n$, $L(AQ^{-N}) \subset \mathfrak{o}$ pour tout diviseur A premier aux places de $\mathfrak{o}$. On a alors $d(A) - \ell_o(A) \leq d(A) - \ell_o(AQ^{-N}) = d(AQ^{-N}) - \ell(AQ^{-N}) + Nd(Q)$. Le théorème de Riemann montre donc que, pour les diviseurs A premiers aux places de $\mathfrak{o}$, les entiers $d(A) - \ell_o(A)$ sont bornés supérieurement. Cette borne supérieure sera notée $g_o - 1$; l'entier g_o est le "genre de K relatif à $\mathfrak{o}$ ".

On va maintenant associer à l'anneau $\mathcal{O}$ un $\mathcal{O}$-module dans l'espace des différentielles de K dont on utilisera pour cela la définition reposant sur les répartitions. Soit R l'algèbre des répartitions de K (c'est-à-dire des applications t de l'ensemble des diviseurs premiers p de K dans K telles que $v_p(t.p) \geqslant 0$ sauf pour un nombre fini de p). On désigne par $L^*(A)$ la sous-algèbre des répartitions t telles que $v_p(t.p) \geqslant -v_p(A)$ pour tout p. L'algèbre R est la somme directe de deux idéaux : l'idéal R_o des répartitions t telles que $t.q_i = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et l'idéal des répartitions nulles sur tout diviseur premier p qui n'est pas un q_i. Il y a donc une projection canonique $pr : R \longrightarrow R_o$.

Le corps K étant identifié à une sous-algèbre de répartitions, les différentielles de K sont les fonctions k-linéaires sur R nulles sur une sous-algèbre $K + L^*(A)$, où A est un diviseur arbitraire. On dira qu'une différentielle ω de K est une <u>$\mathcal{O}$-différentielle</u> si elle est nulle sur $pr(\mathcal{O})$. En s'appuyant sur le théorème de Riemann Roch classique, on démontre le

THÉORÈME 4. - <u>Pour tout diviseur</u> A <u>premier aux places de</u> $\mathcal{O}$,

$$i_o(A) = \ell_o(A) - d(A) + g_o - 1$$

<u>est la dimension sur</u> k <u>de l'espace des</u> <u>$\mathcal{O}$-différentielles dont le diviseur est multiple de</u> $A \bmod \mathcal{O}$.

Désignant par t_p la répartition définie par $t_p.p = 1$ et $t_p.p' = 0$ (p, p' diviseurs premiers distincts), le résidu d'une différentielle ω de K en p sera définie par $\mathrm{res}_p\,\omega = \omega(t_p)$. Pour toute répartition t, on a alors $\omega(t) = \sum \mathrm{res}_p\,(t.p)\omega$, la somme étant étendue à tous les diviseurs premiers p de K. Dire que ω est une $\mathcal{O}$-différentielle signifie donc que

$$\sum_p \mathrm{res}_p\,((pr\ x).p)\omega = \sum_{p \neq q_i} \mathrm{res}_p\, x\omega = 0$$

pour tout $x \in \mathcal{O}$. On en déduit que <u>les $\mathcal{O}$-différentielles sont les différentielles ω de</u> K <u>telles que $\sum_i \mathrm{res}_{q_i}\, x\omega = 0$ pour tout</u> $x \in \mathcal{O}$.

Une différentielle ω de K sera dite <u>finie aux places de</u> $\mathcal{O}$ si $v_{q_i}((\omega)) \geqslant 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Il est clair que les $\mathcal{O}$-différentielles constituent un $\mathcal{O}$-module $D_{\mathcal{O}}$ contenant toutes les différentielles finies aux places de $\mathcal{O}$, donc en particulier les différentielles de première espèce. Les différentielles finies aux places de $\mathcal{O}$ sont du reste les $\bar{\mathcal{O}}$-différentielles ($\bar{\mathcal{O}}$ étant la fermeture intégrale de $\mathfrak{O}$ dans K).

THÉORÈME 5. – Il existe un isomorphisme canonique de $D_{\mathfrak{O}}/D_{\bar{\mathfrak{O}}}$ sur le dual du k-espace $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$.

A toute $\mathfrak{O}$-différentielle ω , associons en effet la fonction k-linéaire $x \to \sum_i \mathrm{res}_{q_i} x\omega$ sur $\bar{\mathfrak{O}}$. Elle est nulle sur $\bar{\mathfrak{O}}$. On obtient ainsi une application k-linéaire de $D_{\mathfrak{O}}$ dans le dual de $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$ dont le noyau est visiblement $D_{\bar{\mathfrak{O}}}$. Pour vérifier que son image est $(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O})$, on utilise l'anneau semi-local $\mathfrak{O}' \subset \mathfrak{O}$ des éléments de la forme $c + x$ où $c \in k$ et $v_{q_i}(x) \geqslant N$ $(i=1,2,\dots,n$; N grand). L'isomorphisme $D_{\mathfrak{O}}/D_{\bar{\mathfrak{O}}} \to (\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O})^*$ défini comme plus haut a pour image $(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}')^*$ car on voit facilement que ces deux espaces ont tous deux la dimension $N\, d(q_1\, q_2 \dots q_n) - 1$. Toute fonction linéaire sur $\bar{\mathfrak{O}}$ nulle sur $\mathfrak{O}$ est ainsi de la forme $\sum_i \mathrm{res}_{q_i} x\omega$ où $\omega \in D_{\mathfrak{O}'}$. Si elle est nulle sur $\mathfrak{O}$, c'est que $\omega \in D_{\mathfrak{O}}$.

Une $\mathfrak{O}$-différentielle ω sera dite de première espèce si elle est multiple mod $\mathfrak{O}$ du diviseur unité. Les $\mathfrak{O}$-différentielles de première espèce constituent un espace de dimension g_o sur k (théorème 4) dont l'intersection avec $D_{\bar{\mathfrak{O}}}$ est l'espace de dimension g des différentielles de première espèce de K .

THÉORÈME 6. – Toute $\mathfrak{O}$-différentielle est somme d'une différentielle finie aux places de $\mathfrak{O}$ et d'une différentielle de première espèce. La dimension de $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$ est égale à $\delta = g_o - g$.

Pour l'anneau $\mathfrak{O}'$ envisagé plus haut, les $\mathfrak{O}'$-différentielles de première espèce sont les différentielles de K dont le diviseur est multiple de $q_1^{-N}, q_2^{-N}, \dots, q_n^{-N}$. Le théorème de Riemann-Roch montre donc qu'elles constituent un sous-espace de dimension $N\, d(q_1, q_2, \dots, q_n) + g - 1 = g + \dim D_{\mathfrak{O}'}/D_{\bar{\mathfrak{O}}}$. Le théorème est donc vérifié pour $\mathfrak{O}'$, et le résultat pour $\mathfrak{O}$ en résulte facilement.

Soit E le diviseur entier de plus bas degré tel que $v_{q_i}(\omega) \geqslant -v_{q_i}(E)$ pour toute $\mathfrak{O}$-différentielle ω et tout i . Soient A un diviseur premier aux places de $\mathfrak{O}$ et ω une $\mathfrak{O}$-différentielle. Si (ω) est multiple de A mod $\mathfrak{O}$, alors (ω) est multiple de AE^{-1} , donc $2g - 2 = d((\omega)) \geqslant d(A) - d(E)$. Pour qu'il existe une $\mathfrak{O}$-différentielle dont le diviseur est multiple de A mod $\mathfrak{O}$, il est donc nécessaire que $d(A) \leq 2g - 2 + d(E)$. Si k est infini, on pourra effectivement trouver une $\mathfrak{O}$-différentielle ω_o dont le diviseur sera $W E^{-1}$ avec W premier aux places de $\mathfrak{O}$ et l'égalité aura lieu pour $A = W$.

Soit c l'ensemble des $x \in K$ tels que $v_{q_i}(x) \geq v_{q_i}(E)$ pour tout i. C'est visiblement un idéal de $\mathfrak{O}$; de plus, si $x \in c$ et $y \in \bar{\mathfrak{O}}$, alors $\sum_i \operatorname{res}_{q_i} xy\omega = 0$ pour toute $\mathfrak{O}$-différentielle ω ce qui entraîne $xy \in \mathfrak{O}$ en vertu du théorème 5. L'idéal c est donc le plus grand idéal de $\mathfrak{O}$ qui est un idéal de $\bar{\mathfrak{O}}$. Puisque $d(E) = \dim \bar{\mathfrak{O}}/c = \dim \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O} + \dim \mathfrak{O}/c$, on a $d(E) \geq \delta$. Lorsque k est infini, on a $d(E) \leq 2\delta$, l'égalité ayant lieu lorsque $D_{\mathfrak{O}}$ est un module de rang 1 sur $\mathfrak{O}$. Reprenons en effet la différentielle ω_0 de diviseur WE^{-1}. L'isomorphisme $x \to x\omega_0$ de $\mathfrak{O}$ dans $D_{\mathfrak{O}}$ composé avec $D_{\mathfrak{O}} \to D_{\mathfrak{O}}/D_{\bar{\mathfrak{O}}}$ donne une application de noyau c. Donc $\dim \mathfrak{O}/c \leq \delta$. Si $\dim \mathfrak{O}/c = \delta$, alors $\mathfrak{O}\,\omega_0$ contient un supplémentaire de $D_{\bar{\mathfrak{O}}}$ dans $D_{\mathfrak{O}}$. Comme $\mathfrak{O}\omega_0$ contient trivialement $D_{\bar{\mathfrak{O}}}$, on voit que $D_{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}\omega_0$. Inversement si $D_{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}\omega$, puisque $c\omega$ est alors dans $D_{\bar{\mathfrak{O}}}$, on a $\dim \mathfrak{O}/c \geq \delta$, donc $\dim \mathfrak{O}/c = \delta$.

Lorsque $d(E) = 2\delta$, les $\mathfrak{O}$-différentielles qui sont multiples mod $\mathfrak{O}$ d'un diviseur A premier aux places de $\mathfrak{O}$ s'obtiennent en multipliant ω_0 par les $x \in K$ tels que $(x)W$ soit multiple de A. L'égalité de Riemann-Roch relative à $\mathfrak{O}$ s'écrit dans ce cas : $\ell_0(A/W) = \ell_0(A) - d(A) + \delta_0 - 1$.

Pour que cette condition $d(E) = 2\delta$ soit vérifiée, il faut et il suffit que l'égalité analogue soit vérifiée pour chaque anneau local associé à $\mathfrak{O}$. On démontre que les points multiples d'une courbe plane ainsi que ceux d'une intersection complète vérifient cette condition.

Si K est une extension régulière de k et si k' est une extension de k, alors $k'\mathfrak{O}$ est un anneau semi-local dans le corps K' des quotients de $k' \otimes K$. Si K possède un modèle projectif dont tous les points sont absolument simples, on démontre que le genre de K' relativement à $k'\mathfrak{O}$ est égal à g_0 et que E, considéré comme diviseur de K' sur k' est encore le diviseur associé à l'anneau semi-local $k'\mathfrak{O}$.

4. Courbes quasi-hyperelliptiques.

On suppose dans ce qui suit que k est algébriquement clos et que l'anneau semi-local $\mathfrak{O}$ est l'intersection des anneaux locaux des points multiples d'un modèle projectif C de K. Si $g_0 = 0$, alors $g = 0$, $\delta = 0$, donc C est une courbe rationnelle sans point multiple. Si $g_0 = 1$, ou bien $g = 0$ et $\delta = 1$, auquel cas C est une courbe rationnelle ayant un point double ou un point d'arrêt, ou bien $g = 1$ et $\delta = 0$, auquel cas C est elliptique sans point multiple.

Lorsque $g_o > 1$, le choix d'une base $\omega_1 , \omega_2, \ldots , \omega_{g_o}$ de $\mathfrak{o}$-différentielles de première espèce permettra d'associer à C la courbe C' ayant pour point générique homogène sur k : $(1 , \omega_2/\omega_1 , \ldots , \omega_{g_o}/\omega_1)$. Lorsque $K = k(\omega/\omega_1)$, il y a correspondance birationnelle entre C et C' ; on dira que C est "non-quasi-hyperelliptique". Dans le cas contraire C sera "quasi-hyperelliptique". On peut préciser de ce point de vue les cas où $d(E) = 2\delta$:

THÉORÈME 7. - *Si* C *est quasi-hyperelliptique, alors* $d(E) = 2\delta$. *Dans le cas contraire, pour que* $d(E) = 2\delta$, *il faut et il suffit que la correspondance birationnelle entre* C *et* C' *soit birégulière. Lorsque* $d(E) < 2\delta$, *la correspondance est régulière en tout point de* C' *ainsi qu'en tout point simple de* C .

On démontre également que, pour que C soit quasi-hyperelliptique, il faut et il suffit qu'il existe un élément x *dans* $\mathfrak{o}$ tel que $[K : k(x)] = 2$.