PAUL JAFFARD

Les corps quasi-algébriquement clos

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 70, p. 201-212
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__201_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1952)

LES CORPS QUASI-ALGÉBRIQUEMENT CLOS

par Paul JAFFARD

(d'après Serge LANG [3].)

Tous les corps considérés ici seront supposés commutatifs.

1. Définitions et propriétés des corps C_i .

Un corps F sera dit avoir la propriété C_i (ou être C_i) si toute forme sur F de degré d à n variables et telles que $n > d^i$ a un zéro non trivial dans F . (Le zéro trivial est $(0, 0, \dots, 0)$) .

On voit que la propriété C_{i+1} généralise la propriété C_i et que les corps C_0 sont les corps algébriquement clos. Les corps C_1 sont qualifiés par ARTIN de quasi-algébriquement clos.

Une forme sur F de degré d à n variables sera dite normique d'ordre i si $n = d^i$ et si la forme admet seulement dans F le zéro trivial.

Les formes normiques de degré 1 et celles d'ordre 0 sont du type ax ou ax^n $(a \neq 0)$ Elles existent dans chaque corps et sont de nature triviale. Quand nous parlerons désormais d'une forme normique, nous supposerons implicitement que nous ne sommes dans aucun de ces deux cas.

THÉORÈME 1. - Pour que le corps F soit algébriquement clos, il faut et il suffit qu'il n'admette pas de forme normique d'ordre 1 .

Il est évident que si F est algébriquement clos il n'admet pas de forme normique d'ordre 1 , en vertu de la remarque qui précède (exclusion des formes ax). Supposons que F ne soit pas algébriquement clos. Il admet alors une extension E de degré n . Si $\omega_1, \dots, \omega_n$ est une base de E sur F , la norme de l'élément général $x_1 \omega_1 + \dots + x_n \omega_n$ est une forme normique d'ordre 1 définie sur F .

REMARQUE. - La considération analogue de la norme réduite montre que si F est quasi-algébriquement clos, il ne peut pas exister de corps non commutatif E de degré fini sur F et tel que F soit contenu dans le centre de E .

Pour un corps F , la propriété C_i implique que certaines formes admettent des zéros non triviaux sur F . On peut envisager des propriétés plus fortes, soit en demandant que certains polynomes sans terme constant admettent des zéros non triviaux sur F , soit en demandant que certains systèmes de formes (ou même de polynomes sans terme constant) admettent un zéro commun sur F .

C'est ainsi qu'un corps F sera dit <u>fortement</u> C_i si tout polynome sans terme constant sur F de degré d à n variables et tel que $n > d^i$ a un zéro non trivial dans F .

Dans le cas d'un corps algébriquement clos on a le théorème bien connu suivant :

THÉORÈME 2. - <u>Soit F algébriquement clos et $f_1 , \dots , f_r$ des polynomes sur F à n variables, chacun sans terme constant. Ils ont un zéro commun non trivial si $n > r$. La dimension de la variété qu'ils définissent est au moins égale à $n - r$.</u>

Dans le cas de corps non algébriquement clos, on a cependant les théorèmes suivants :

THÉORÈME 3 (<u>Critère d'Artin</u>). - <u>Soit F un corps C_i admettant au moins une forme normique d'ordre i . Soient $f_1 , \dots , f_r$ r formes sur F de degré d en n variables. Si $n > rd^i$, ces formes ont un zéro commun non trivial contenu dans F .</u>

Montrons d'abord le :

LEMME. - <u>Si F a une forme normique d'ordre $i \geqslant 1$, il a des formes normiques d'ordre i et de degré arbitrairement élevé.</u>

Soit φ une forme normique de degré d à n variables $(n = d^i)$.
$\varphi(\varphi|\varphi| \dots |\varphi)$ est une forme normique de degré d^2 .

La notation $\varphi(\varphi|\varphi| \dots |\varphi)$ signifient que de nouvelles variables doivent être utilisées après chaque $|$.

Montrons maintenant le théorème 3 :
Soit N une forme normique d'ordre i et de degré suffisamment élevé. Soit $\Phi = N(f_1 , \dots , f_r | f_1 , \dots , f_r | \dots | f_1 , \dots , f_r | 0 , \dots , 0)$ où 0 apparaît à t places avec $t < r$. Supposons que le système $f_1 , \dots , f_r$ apparaisse s fois. Φ est une forme de degré $d \sqrt[i]{rs + t}$ à ns variables. En choisissant le degré de N suffisamment élevé, on aura $(n - rd^i)s > td^i$ ou $ns > d^i(rs + t)$. Par suite F étant C_i , Φ aura un zéro non trivial. Mais comme N est normique, ceci ne peut arriver que si $f_1 , \dots , f_r$ ont un zéro non trivial commun.

On peut éliminer la restriction que $f_1 , \dots , f_r$ aient même degré en faisant sur F des hypothèses un peu plus fortes :

THÉORÈME 4. – *Soit F un corps C_i admettant des formes normiques d'ordre i et de degré quelconque. Si $f_1 , \dots , f_r$ sont des formes en n variables de degrés $d_1 , \dots , d_r$ telles que $n > d_1^i + \dots + d_r^i$, elles ont un zéro commun non trivial dans F .*

Soit N_k une forme normique d'ordre i et de degré $d_1 d_2 \dots d_{k-1} d_{k+1} \dots d$ $(1 \leq k \leq r)$. Considérons les r systèmes d'équations :

$$1) \quad N_1(f_1|f_1| \dots |f_1) = 0 \ |N_1(f_1|f_1| \dots |f_1) = 0 \ \dots$$

$$2) \quad N_2(f_2|f_2| \dots |f_2) = 0 \ |N_2(f_2|f_2| \dots |f_2) = 0 \ \dots$$

$\dots$

$$r) \quad N_r(f_r|f_r| \dots |f_r) = 0 \ |N_r(f_r|f_r| \dots |f_r) = 0 \ \dots$$

le k-ième système possédant d_k^i équations, les mêmes systèmes de variables étant utilisés dans chaque nouveau système d'équations.

L'ensemble des r systèmes forme un système de $d_1^i + \dots + d_r^i$ formes à $n(d_1 \dots d_r)^i$ variables, chacune de degré $(d_1 \dots d_r)$. Puisque par hypothèse $n(d_1 \dots d_r)^i > (d_1^i + \dots + d_r^i)(d_1 \dots d_r)^i$, on peut appliquer le théorème 3 et il en résulte le théorème 4 .

THÉORÈME 5. – *Si F est un corps C_i admettant une forme normique d'ordre i toute extension de degré fini E de F est aussi C_i .*

Soit $f(x_1 , \dots , x_n)$ une forme sur E de degré d telle que $n > d^i$. Soient r le degré de E sur F et $\omega_1 , \dots , \omega_r$ une base de E sur F . Posons :

$$x_\nu = x_{\nu 1} \omega_1 + \dots + x_{\nu r} \omega_r \qquad (\nu = 1 , \dots , n)$$

$$f(x_1 , \dots , x_n) = f_1(x_{ij}) \omega_1 + \dots + f_r(x_{ij}) \omega_r .$$

Chaque f_ν est une forme à nr variables sur F de degré d . Comme $nr > d^i r$, on peut utiliser le théorème 3 d'où le théorème 5 .

COROLLAIRE. – *Si F est quasi-algébriquement clos, toute extension de degré fini de F est aussi quasi-algébriquement close.*

Résulte immédiatement des théorèmes 1 et 5 .

On peut énoncer des théorèmes analogues au théorème 5, mais donnant des résultats sur la résolution des systèmes de formes ou sur la propriété C_i forte. Il faut alors supposer l'existence dans F de formes normiques de degré quelconque et utiliser le théorème 4 au lieu du théorème 3.

2. Étude des corps de fonctions.

On a le :

LEMME. - *Si* F *est un corps muni d'une valuation discrète* v *et si son corps des restes* k *a une forme normique d'ordre* i , F *a une forme normique d'ordre* $i + 1$.

Soit N' une forme normique d'ordre i et de degré d à n variables sur k . Soit π un élément d'ordre 1 dans F , N une forme sur F qui représente N' , la forme $M = N + \pi | N + \dots + \pi^{d-1} | N$ est une forme normique d'ordre $i + 1$:

Il suffit de montrer qu'elle ne peut s'annuler pour un système de nd entiers de F . Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'elle s'annule pour $(a_1 , a_2 , \dots , a_{dn})$. On peut toujours supposer $\inf(v(a_1) , \dots , v(a_{nd})) = 0$. Puisque N' est normique, on voit que $v(N(b_1 , \dots , b_n)) = d(\inf(v(b_1), \dots , v(b_n)))$. Soit donc i le plus petit nombre tel que

$$\inf(v(a_{in+1}) , \dots , v(a_{i(n+1)})) = 0 .$$

On en déduit que

$$v(\pi^{1-1} N(a_{in+1} , \dots , a_{i(n+1)})) = i - 1$$

est pour tout autre valeur de j strictement inférieur à

$$v(\pi^{j-1} N(a_{jn+1} , \dots , a_{j(n+1)})) .$$

On a donc : $v(M(a_1 , \dots , a_{dn})) = i - 1$, ce qui contredit $M(a_1 , \dots , a_{dn}) = 0$.

On en déduit le

THÉORÈME 6. - *Soit* k *un corps* C_i *qui admette une forme normique d'ordre* i . *Le corps* F *des fonctions rationnelles à* m *variables définies sur* k *est un corps* C_{i+m} *qui admet une forme normique d'ordre* $i+m$.

En vertu du lemme précédent, il suffit de montrer que si F est un corps C_i admettant une forme normique d'ordre i , le corps $F(t)$ des fractions rationnelles définies sur F est C_{i+1} :

Soit donc $f(X_1 , \dots , X_n)$ une forme sur $F(t)$ que l'on peut supposer à coefficients entiers et telle que si d désigne son degré, on ait $n > d^{i+1}$.

Posons : $$x_i = \zeta_{i0} + \zeta_{i1} t + \dots + \zeta_{is} t^s \qquad (1 \leq i \leq n) .$$
s étant un nombre suffisamment grand.

Si r est le plus haut degré des coefficients de f , en substituant les x_i dans f on a :

$$f(x_1 , \dots , x_n) = f_0 + f_1 t + \dots + f_{ds+r} t^{ds+r} .$$

f_j étant une forme sur F de degré d par rapport à l'ensemble des $n(s + 1)$ variables (ζ_{ij}) . $(0 \leq j \leq ds + r)$.

Or, en vertu du théorème 3, ces $ds + r + 1$ formes admettent une racine commune non triviale si $n(s + 1) > (ds + r + 1)d^i$, ou $s(n - d^{i+1}) > (r + 1)d^i - n$ ce qui est vérifié si on a pris s assez grand.

REMARQUE. - Si on suppose que k admette des formes normiques de degré quelconque, le théorème 6 se généralise aux corps fortement C_i et à la résolution simultanée de systèmes de polynomes.

3. Corps locaux.

THÉORÈME 7. - Si k est un corps fini, le corps $F = k((t))$ des séries formelles à une variable sur k est C_2 .

Comme k est fini, il n'est pas algébriquement clos. Il admet donc une forme normique d'ordre 1. En vertu d'un théorème de Chevalley [1]), il est C_1 . Le théorème 6 montre alors que $k(t)$ est C_2 . Soit $f(X_1 , \dots , X_n)$ une forme à n variables sur F (à coefficients entiers) et de degré d tel que $n > d^2$. Si nous supprimons dans les coefficients les termes où t a une puissance supérieure à ν , nous obtenons une forme f_ν sur $k(t)$. Elle admet donc un zéro non trivial $\alpha_\nu = (\alpha_1^{(\nu)} , \dots , \alpha_n^{(\nu)})$. Nous pouvons supposer que tous les $\alpha_i^{(\nu)}$ sont des entiers et que l'un d'entre eux est une unité. Si on munit F de sa topologie habituelle définie par sa valuation canonique (les voisinages de 0 sont donnés par les puissances de t), k étant fini, on voit que l'ensemble E des entiers de F est compact. Il en est de même de l'espace produit E^n et par suite l'ensemble $(\alpha_\nu)_{\nu \geq 0}$ des racines admet un point d'accumulation $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ Comme les f_ν converge vers f on en déduit que β est une racine de f . β n'est pas une racine triviale car tous les α_ν ont au moins une composante qui est une unité. D'où le théorème 7.

On va montrer dans ce qui suit que si le corps F , complet par rapport à la valuation discrète v est tel que son corps des restes k soit algébriquement clos, F est lui-même quasi-algébriquement clos.

On sait ([2] et [4]) que de tels corps sont complètement déterminés. Ce sont les extensions finies et complètement ramifiées d'un sous-corps K qui peut être de deux types :

1. Cas d'égale caractéristique. $K = F$ est le corps $k((t))$ des séries formelles à une variable sur k .

2. Cas d'inégale caractéristique. K est le corps des vecteurs de WITT à composantes dans k . (k a une caractéristique $p \neq 0$ et K a pour caractéristique 0).

Pour fixer les idées, nous nous placerons ici seulement dans le cas d'égale caractéristique. La démonstration demeure pratiquement la même dans l'autre cas.

Soit donc $F = k((t))$ et $f(X_1 , \dots , X_n)$ un polynome à n variables dans F que l'on supposera à coefficients entiers. Chercher une racine entière de ce polynome $x = (x_1 , \dots , x_n)$ revient à résoudre dans k un système composé d'une infinité d'équations. En effet si on pose $x_i = \sum_0^\infty \xi_{i\nu} t^\nu$ $(1 \leq i \leq n)$, l'équation $f(x_1 , \dots , x_n) = 0$ est équivalente au système d'équations à coefficients dans k :

$$f_0(\xi_0) = 0 , \quad f_1(\xi_0 , \xi_1) = 0 , \dots , f_i(\xi_0 , \dots , \xi_1) = 0 , \dots$$

en posant $\xi_i = (\xi_{1i} , \xi_{2i} , \dots , \xi_{ni})$.

Nous allons montrer d'abord que si l'idéal $\mathfrak{a} = (f_0 , f_1 , \dots , f_i , \dots)$ de l'anneau $A = k[X_i]_{i\in Z_+}$ (anneau de polynomes à une infinité dénombrable de variables sur k) est propre, f admet une racine contenue dans F .

Il est d'abord facile de voir que f possède une racine situé dans une extension complète F_1 de F , admettant pour corps des restes une extension algébriquement close k_1 de k : Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier contenant $\mathfrak{a}$, k_1 sera la cloture algébrique du corps des quotients de l'anneau d'intégrité $A/\mathfrak{p}$ et $F_1 = k_1((t))$. η_i étant l'image de x_i dans $A/\mathfrak{p}$ $(\eta_0 , \eta_1 , \dots , \eta_i , \dots)$ est bien un zéro de $\mathfrak{a}$ situé dans k_1 . On en déduit une racine de f située dans $k_1((t))$.
On va maintenant spécialiser cette racine en une racine contenue dans $k((t))$.
Pour cela on va utiliser les trois lemmes suivants :

LEMME 1. – Soient $k \subset k_1$ deux corps algébriquement clos, $F = k((t))$ et $F_1 = k_1((t))$. F est algébriquement clos dans F_1 et toute extension de type fini de F et contenue dans F_1 est séparable.

On voit immédiatement à partir des définitions que F est algébriquement clos dans F_1. Si $F(x_1, \dots, x_n) \subset F_1$, on montre qu'il ne peut y avoir de relation de plus petit degré de la forme $g(x_1^p, \dots, x_n^p) = 0$ où g est un polynôme sur F à coefficients entiers, l'un au moins des coefficients étant égal à 1 et $x_1, \dots, x_n$ étant des entiers de F_1. On en déduit que $F(x_1, \dots, x_n)$ est une extension séparable de F.

LEMME 2. – Soient k un corps algébriquement clos, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ un point générique sur k et $h_\nu(x_1, \dots, x_n)$ un ensemble fini de polynomes sur k dont aucun ne s'annule sur η. Il existe alors une spécialisation η' de η sur k telle qu'aucun des h_ν ne s'annule sur η'.

Soit $h(x) = \prod_\nu h_\nu(x)$. Alors $h(\eta) \neq 0$. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal de $k[x_1, \dots, x_n]$ formé par les polynomes s'annulant sur η. On a $h(x) \notin \mathfrak{p}$. Le lemme résulte alors du théorème des zéros de Hilbert.

LEMME 3. – Soit F un corps complet par rapport à une valuation non-archimédienne v. Soit $f(x)$ un polynome ayant pour coefficients des entiers de F et soit α_0 un entier de F tel que $v\left(\frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)^2}\right) > 0$. Alors la suite

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)}$$

converge vers une racine α de $f(x)$.

Montrons d'abord par récurrence sur i que l'on a toujours :

$$(1) \qquad v(\alpha_i) \geq 0$$

$$(2) \qquad v\left(\frac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)}\right) \geq 2^i a \qquad \text{si on pose } a = v\left(\frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_i)}\right)$$

Pour $i = 0$ ce sont les hypothèses. Supposons ces inégalités vérifiées pour i. On a alors :

$$v(\alpha_{i+1} - \alpha_i) = v\left(\frac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)}\right) \geq 2^i a > 0 .$$

Comme $v(\alpha_i) \geq 0$, ceci implique $v(\alpha_{i+1}) \geq 0$. α_{i+1} est donc un entier du corps F.

La formule de Taylor permet d'écrire :

$$f(\alpha_{i+1}) = f(\alpha_i) + (\alpha_{i+1} - \alpha_i)f'(\alpha_i) + (\alpha_{i+1} - \alpha_i)^2 X = (\alpha_{i+1} - \alpha_i)^2 X ,$$

X étant un entier de F, d'où $v(f(\alpha_{i+1})) \geqslant 2v\left(\frac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)}\right) = v\left(\frac{f(\alpha_i)^2}{f'(\alpha_i)^2}\right)$

Mais on a de même :

$$f'(\alpha_{i+1}) = f'(\alpha_i) + (\alpha_{i+1} - \alpha_i)Y = f'(\alpha_i) - \frac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} Y \quad (Y \text{ étant un entier de } F).$$

D'où :

$$\frac{f'(\alpha_{i+1})}{f'(\alpha_i)} = 1 - \frac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)^2} Y \quad \text{et} \quad v\left(\frac{f'(\alpha_{i+1})}{f'(\alpha_i)}\right) = 0$$

Par suite

$$v\left(\frac{f(\alpha_{i+1})}{f'(\alpha_{i+1})^2}\right) \geqslant v\left(\frac{f(\alpha_i)^2}{f'(\alpha_i)^2} \ \frac{1}{f'(\alpha_{i+1})^2}\right) = 2v\left(\frac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)^2}\right) \geqslant 2^{i+1} a .$$

Les formules (1) et (2) sont donc bien démontrée par récurrence.
Comme $v(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \geqslant 2^i a$, on a

$$v(\alpha_{i+p} - \alpha_i) = v((\alpha_{i+p} - \alpha_{i+p-1}) + (\alpha_{i+p-1} - \alpha_{i+p-2}) + \dots + (\alpha_{i+1} - \alpha_i)) \geqslant 2^i a$$

(p étant un nombre entier positif).

La suite (α_i) est donc une suite de Cauchy. F étant complet elle converge vers $\alpha \in F$. La suite $(f(\alpha_i))$ converge donc vers $f(\alpha))$. Or comme on a vu que

$$v(f'(\alpha_i)) = v(f'(\alpha_0)) ,$$

il résulte de (2) que $v(f(\alpha_i))$ croît au delà de toute valeur et par suite $f(\alpha) = 0$. D'où le lemme.

THÉORÈME 7. - <u>Soient</u> $k \subset k_1$ <u>deux corps algébriquement clos,</u> $F = k((t))$ <u>et</u> $F_1 = k_1((t))$. <u>Soit</u> $\eta = (\eta_1 , \dots , \eta_n) \in F_1^n$. η <u>a une spécialisation dans</u> F.

En vertu du lemme 1, on a $F(\eta) = F(x_1 , \dots , x_r , \alpha)$ où $x = (x_1 , \dots , x_r)$ est une base de transcendance séparante de α séparable sur $F(x)$. On peut supposer que les x_i et α soient des entiers. On a :

$$\eta_i = \sum_{\nu} \frac{\varphi_{i\nu}(x)}{\psi_{i\nu}(x)} \alpha^{\nu} ,$$

les φ et les ψ étant des polynomes à coefficients dans F. α satisfait à l'équation irréductible $g(y , x) = 0$ sur $F(x)$. On peut d'ailleurs supposer que les coefficients de g soient dans $F[x]$. On a de plus $\partial g/\partial\alpha \neq 0$.

Soit $\{f_i(X_1 , \dots , X_n)\}$ un ensemble fini de générateurs de l'idéal de $F[X_1 , \dots , X_n]$ formé par les polynômes qui s'annulent sur η .
On peut écrire

$$f_j(\dots , \sum_\nu \frac{\varphi_{i\nu}(x)}{\psi_{i\nu}(x)} y^\nu , \dots) = g(y , x)h_j (y , x)$$

où $h_j(y , x)$ est un polynome en y avec coefficients dans $F(x)$.
Soient $x_i = \sum_{\nu\geqslant 0} x_{i\nu}t^\nu$ $(1 \leq i \leq r)$, $\alpha = \sum_{\nu\geqslant 0} \alpha_\nu t^\nu$ $(x_{i\nu} , \alpha_\nu \in k_1)$

On pose :

$$(\alpha_i , x_{ij})_s = (\alpha_0 , \dots , \alpha_s , x_{10} , \dots , x_{r0} , \dots , x_{1s} , \dots , x_{rs}) .$$

On a de même :

$$g(\alpha , x) = \sum_\nu g_\nu(\alpha_i , x_{ij})t^\nu$$
$$\partial g/\partial\alpha = \sum_\nu g'_\nu (\alpha_i , x_{ij})t^\nu$$

On a $g_\nu(\alpha_i , x_{ij}) = 0$ pour tout ν et il existe m tel que $g'_m(\alpha_i , x_{ij}) \neq 0$.
Si $(\beta_i , u_{ij})_s$ est une spécialisation de $(\alpha_i , x_{ij})_s$ dans k on pose :

$$u_i = \sum_{\nu\leq s} u_{i\nu}t^\nu \quad (1 \leq i \leq r) \quad \text{et} \quad \beta = \sum_{\nu\leq s} \beta_\nu t^\nu$$

On a alors $u_1 , \dots , u_r , \beta \in F$.

En prenant s suffisamment grand le lemme 2 montre que l'on peut trouver une spécialisation $(\beta_i , u_{ij})_s$ de $(\alpha_i , x_{ij})_s$ dans k telle que :

1° $g(\beta, u)$ satisfasse aux hypothèses du lemme 3 .

2° les dénominateurs $\psi_{i\nu}(X)$ ne s'annulent pas sur cette spécialisation.

Le lemme 3 permet alors de trouver une racine γ de $g(y , u)$ contenue dans F .

On voit que si on pose $\bar\eta_i = \sum_\nu \frac{\varphi_{i\nu}(u)}{\psi_{i\nu}(u)} \gamma^\nu$, $\bar\eta = (\bar\eta_1 , \dots , \bar\eta_n)$ est une spécialisation de η .

COROLLAIRE. - <u>Si</u> $\mathfrak{p}$ <u>est l'idéal premier de la valuation et si</u> $f(x_1 , \dots , x_n)$ <u>est un polynome en</u> F <u>tel que</u> $f \equiv 0$ $(\mathfrak{p}^\nu)$ <u>admette pour tout</u> ν <u>une solution dans</u> F , f <u>admet au moins une racine dans</u> F .

Si f est un tel polynome, en vertu de ce qui précède, il suffit de montrer que l'idéal $\mathfrak{a} = (f_0 , f_1 , \dots , f_i , \dots)$ est différent de $A = k[X_i]_{i \in Z_+}$.

S'il n'en était pas ainsi on aurait $1 = a_0 f_0 + \dots + a_p f_p$ $(a_i \in k)$ et l'équation $f \equiv 0$ $(\mathfrak{p}^p)$ n'aurait pas de solution, contrairement à l'hypothèse.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que F est quasi-algébriquement clos : Soit $f(x_1 , \dots , x_n)$ une forme à coefficients entiers dans F, de degré d et telle que $n > d$. Soit $f_0 = 0$ $f_1 = 0$, ... le système infini associé. Soit r un nombre quelconque.

Le système partiel $f_0 = 0 , \dots , f_r = 0$ est un système de $r + 1$ équations par rapport aux $n(r + 1)$ inconnues

$$(\xi_{10} , \dots , \xi_{n0} , \xi_{11} , \dots , \xi_{n1} , \dots , \xi_{1r} , \dots , \xi_{nr}) = (\xi_0 , \dots , \xi_r) .$$

Montrons qu'il existe une solution $(\xi_0 , \dots , \xi_r)$ telle que $(\xi_0) \neq (0)$. Raisonnons par l'absurde : Supposons que le système $f_0 = 0 , \dots , f_r = 0$ implique $(\xi_0) = (0)$. Montrons par récurrence sur K que $f_0 = 0 , \dots , f_{r+kd} = 0$ implique $(\xi_0) = (0) , \dots , (\xi_k) = 0$.

Supposons donc que $f_0 = 0 , \dots , f_{r+kd} = 0$ implique $(\xi_0) = (0) , \dots , (\xi_k) = 0$.
Soit alors le système :

(I) $$f_0 = 0 , \dots , f_{r+(k+1)d} = 0$$

Il est équivalent à $v(f(x_1 , \dots , x_n)) > r + (k + 1)d$.
D'après les hypothèses de récurrence ceci implique $x_i = t^{k+1} y_i$, y_i étant un entier de $F (1 \leq i \leq n)$.
D'où

$$f(x_1 , \dots , x_n) = t^{d(k+1)} f(y_1 , \dots , y_n)$$

et

$$v(f(x_1 , \dots , x_n)) > r + (k + 1)d$$

équivaut à

$$v(f(y_1 , \dots , y_n)) > r ,$$

mais par hypothèse ceci implique $v(y_i) > 0$ $(1 \leq i \leq n)$, donc $v(x_i) > k + 1$, et $(\xi_0) = 0 , \dots , (\xi_{k+1}) = 0$.

Le système $f_0(\xi_0) = 0 , \dots , f_{r+kd}(\xi_0 , \xi_1 , \dots , \xi_{r+kd}) = 0$ définit une surface algébrique dans l'espace $k^{n(r+kd+1)}$ à $n(r + kd + 1)$ dimensions.

Cette surface est de dimension au moins égale à $n(r + kd + 1) - (r + kd + 1)$ (en vertu du théorème 2).

D'après ce qu'on vient de voir une telle surface est contenue dans la variété linéaire $(\xi_0) = 0, \ldots, (\xi_k) = 0$ de dimension $n(r + kd + 1) - n(k + 1)$. On doit donc toujours avoir :

$n(r + kd + 1) - n(k + 1) \geqslant n(r + kd + 1) - (r + kd + 1)$ où $r + 1 - n \geqslant k(n - d)$,

ce qui n'est pas vrai si on prend k suffisamment grand puisque $n > d$. On voit donc que pour tout entier r le système $f_0 = 0, \ldots, f_r = 0$ admet une solution $(\xi_0), \ldots, (\xi_r)$ telle que $(\xi_0) \neq 0$. Il en résulte qu'il y a un des x_i, soit par exemple x_1, tel que pour tout r, le système $f_0 = 0, \ldots, f_r = 0$ admette une solution $(\xi_0), \ldots, (\xi_r)$ avec $\xi_{01} \neq 0$. A cause de l'homogénéité de f ceci montre que pour tout ν on peut résoudre la congruence

$$f(1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0 \quad (\mathfrak{p}^\nu).$$

D'après le corollaire du théorème 7, on peut donc résoudre dans F l'équation $f(1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, ce qui prouve que F est quasi-algébriquement clos. On démontre plus généralement de la même manière :

THÉORÈME 8. - <u>Un corps complet par rapport à un valuation discrète et tel que son corps des restes soit algébriquement clos est lui-même quasi-algébriquement clos.</u>

Ce théorème résout dans le cas $i = 0$ le problème irrésolu suivant :

<u>Un corps complet par rapport à une valuation discrète et tel que son corps des restes soit</u> C_i <u>est-il lui-même</u> C_{i+1} ?

Un raisonnement presque identique à celui employé dans la démonstration du théorème 7 permet de montrer le :

THÉORÈME 9. - <u>Soit</u> $\overline{F}$ <u>un corps complet par rapport à une valuation et</u> F <u>un sous-corps partout dense dans</u> $\overline{F}$. <u>Soit</u> $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ <u>un point de</u> $\overline{F}^n$ <u>tel que</u> $F(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ <u>soit séparable sur</u> F. <u>Alors</u> η <u>a dans</u> F^n <u>des spécialisations aussi rapprochées qu'on le veut.</u>

On en déduit le :

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> F <u>et</u> $\overline{F}$ <u>vérifiant les conditions du théorème 9 et tels que toute extension intermédiaire de type fini soit séparable. Alors tout ensemble (fini) de polynomes</u> $f_1, \ldots, f_r$ <u>à coefficients dans</u> F <u>et ayant une racine</u>

commune dans $\overline{F}$ ont aussi une racine commune dans F (qui est non triviale si la racine contenue dans F ne l'est pas). En particulier si $\overline{F}$ est C_1, il en est de même de F.

Il est nécessaire de supposer dans l'énoncé du théorème 9 que $F(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ soit séparable. En effet si on pouvait trouver dans $\overline{F}$ un ensemble d'éléments qui engendrent sur F une extension non séparable, on pourrait trouver des éléments $a_1, \ldots, a_s$ de F linéairement indépendants sur F^{p-1}, mais dépendants sur $\overline{F}^{p-1}$. La forme $a_1 x_1^p + \ldots + a_s x_s^p$ aurait donc un zéro non trivial dans $\overline{F}$ et n'en aurait pas dans F. Les théorèmes qui précèdent permettent d'énoncer le :

THÉORÈME 10. - Les corps suivants et leurs extensions algébriques sont quasi-algébriquement clos :

L'extension non ramifiée maximale d'un corps complet par rapport à une valuation discrète et ayant un corps des restes parfaits.

Le sous-corps (absolument) algébrique de l'extension non-ramifiée maximale d'un corps p-adique ordinaire.

Les séries de puissances convergentes sur un corps de constantes valué algébriquement clos.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Démonstration d'une hypothèse de M. Artin, Abh. math. Seminar Hans. Univ., t. 11, 1935, p. 73-75.

[2] HASSE (Helmut). - Vorlesungen über Zahlentheorie. - Berlin, Springer, 1950, Paragraphe 10, p. 136-166.

[3] LANG (Serge). - On quasi algebraic closure, Annals of Math., Series 2, t. 55, 1952, p. 373-390.

[4] WITT (Ernest). - Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n ..., J. f. reine angew. Math., t. 176, 1937, p. 126-140.