Bernard Malgrange

Équations de Sturm-Liouville

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n^{o} 65, p. 155-165
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__155_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1952)

EQUATIONS DE STURM-LIOUVILLE,

par Bernard MALGRANGE.

Introduction.

L'exposé a pour but d'étendre au cas du demi-axe positif les résultats classiques concernant le développement des fonctions suivant les fonctions propres d'un opérateur de Sturm-Liouville sur un intervalle borné. H. WEYL a donné une méthode qui part d'une décomposition spectrale de l'opérateur considéré [9]. Ses résultats ont été généralisés par KODAIRA [4] aux opérateurs différentiels formellement autoadjoints d'ordre > 2 .

Une autre méthode, introduite par DELSARTE [1], consiste à associer à un opérateur de Sturm-Liouville une convolution généralisée ; on est alors amené à considérer une certaine algèbre normée commutative, et à lui appliquer le théorème de Plancherel abstrait : c'est essentiellement la méthode suivie par LEVITAN [5].

1. La méthode de H. WEYL.

On pose $Lf = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{df}{dx}\right) + q(x)\, f$, $a < x < b$ (a et b finis ou non), avec p et q réelles et continues, et $p > 0$.

Nous supposerons dans toute la suite que f est localement à variation bornée dans $]a , b[$ (ceci pour que Lf ait un sens).

Notations :

$$(f\, ,\, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

$$[f\, ,\, g](x) = p(x)\left(f\frac{dg}{dx} - g\frac{df}{dx}\right)$$

1° La fonction de Green.

Soit λ un nombre complexe, avec $\Im\lambda \neq 0$, et soit D l'ensemble des solutions non nulles de $Lf - \lambda f = 0$, modulo la multiplication par les constantes (D est visiblement une droite projective complexe). Si f est solution de $Lf - \lambda f = 0$, on appelle $\tilde{f}$ son image dans D .

Soient $a < \alpha < \beta < b$; soit D_{β^-} (resp. D_β , D_{β^+}) l'ensemble des $\tilde{f}$ qui vérifient :

$$\frac{1}{i\Im\lambda}\ [f\ ,\ \bar{f}]\,(\beta) \leqslant 0 \qquad (\text{resp.} = 0, \geqslant 0)$$

Quel que soit β , ces ensembles sont non vides et compacts (théorème d'existence des solutions des équations différentielles) ; appliquons maintenant la formule de Green, en tenant compte de la relation $Lf = \lambda f$.

$$-2i\Im\lambda\int_\beta^\gamma f\,\bar{f}\,dx = \int_\beta^\gamma (f\,L\,\bar{f} - \bar{f}\,L\,f)\,dx = [f\ ,\ \bar{f}](\gamma) - [f\ ,\ \bar{f}](\beta) \qquad (\beta < \gamma < b)$$

Par conséquent, on a : $D_{\gamma^+} \subset D_{\beta^+}$; d'où $D_{b^+} = \bigcap D_{\beta^+}$

On vérifie alors que les deux cas suivants sont les seuls à se présenter (détails dans [9]) :

a. D_{b^+} est un point ("Grenzpunkt") ; les f vérifiant : $\tilde{f} \in D_{b^+}$ sont les seuls à être de carré sommable au voisinage de b ; pour un tel f , on a :

$$\lim_{\beta\to b}[f\ ,\ \bar{f}](\beta) = D$$

Dans ce cas, nous noterons encore D_b le point D_{b^+} .

b. D_{b^+} est une boule (non réduite à un point !) de la sphère de Riemann associée à D ("Grenzkreis") ; toutes les solutions de $Lf = \lambda f$ sont de carré sommable au voisinage de b . Notons ici par D_b la frontière de D_{b^+} ; les $\tilde{f} \in D_b$ sont exactement celles qui vérifient :

$$\lim_{\beta\to b}\ [f\ ,\ \bar{f}](\beta) = 0$$

On définit de même $D_{a^-} = D_{d^-}$ et D_a

DÉFINITION. - <u>Etant données</u> $\tilde{f}_a \in D_a$ et $\tilde{f}_b \in D_b$, <u>on appelle fonction de Green associée à</u> $\tilde{f}_a$ <u>et</u> $\tilde{f}_b$ <u>la fonction suivante</u> $(a < x < b\ ,\ a < y < b)$:

$$G(x\ ,\ y) = \begin{cases} f_a(x)\ f_b(y)/[f_a\ ,\ f_b] & \underline{\text{si}}\ \ x \leqslant y \\ f_b(x)\ f_b(y)/[f_a\ ,\ f_b] & \underline{\text{si}}\ \ x \leqslant y \end{cases}$$

(Noter que $[f_a\ ,\ f_b]$ est une constante).

Soit maintenant h une fonction continue à support compact $\in\ ]\,a\ ,\ b\,[$; posons

$$Gh = \int_a^b G(x\ ,\ y)\ h(y)\ dy$$

L'opérateur G possède les propriétés suivantes :

a) $LGh - \lambda Gh = h$ (évident).

b) $\lim\limits_{\alpha \to a} [Gh , \overline{Gh}] (\alpha) = 0$ (utiliser $\lim\limits_{\alpha \to a} [fa , \bar{f}a] (\alpha) = 0$)

Propriété analogue en b .

c) $(LGh , Gh) = (Gh , LGh)$ (utiliser b) et la formule de Green).

d) $\|Gh\|_2 \leq \frac{1}{|\Im \lambda|} \|h\|_2$ (résulte facilement de a) et c)).

De d) résulte que G se prolonge en un opérateur continu sur $L^2(a , b)$; et les propriétés précédentes s'étendent sans difficulté à cet opérateur.

2° Décomposition spectrale de L .

Soit H_o l'ensemble des $f \in L^2(a , b)$ telles que l'on ait : $Lf \in L^2(a , b)$. En général (plus précisément : sauf dans le cas "Grenzpunkt" en a et en b), L , muni du domaine H_o n'est pas autoadjoint.

Prenons alors $\tilde{f}_a \in D_a$ et $\tilde{f}_b \in D_b$; soit $G(x , y)$ la fonction de Green associée à $\tilde{f}_a$ et $\tilde{f}_b$. On vérifie facilement ceci : soit H l'ensemble des $h \in H_o$ qui vérifient $G(L - \lambda)h = h$ (ou, ce qui revient au même, posons : $H = G \circ L^2(a , b)$) . Alors, L , muni du domaine H , est autoadjoint.

Pour faire le raccord avec la théorie classique, nous allons maintenant donner une autre interprétation de H . Partons pour cela des résultats suivants :

a. L'adjoint de L (domaine H_o) est la restriction de L à un sous-espace H_o^* de H_o (peut se voir directement ; il faut faire un peu attention, parce qu'on ne suppose pas $p(x)$ différentiable).

b. Pour $f \in H_o$ et $g \in H_o$, $\lim\limits_{\alpha \to a} [f , g] (\alpha)$ et $\lim\limits_{\beta \to b} [f , g] (\beta)$ existent (utiliser la formule de Green) ; désignons ces limites respectivement par $[f , g](a)$ et $[f , g](b)$. On a alors :

$$(f , Lg) - (Lf , g) = [f , \bar{g}] (b) - [f , \bar{g}] (a)$$

c. Dans le cas "Grenzpunkt" en a , et seulement dans ce cas, on a, pour tout $f \in H$ et tout $g \in H$: $[f , g] (a) = 0$ (se démontre en partant de la formule : $h = G(L - \lambda) h + k$, où k vérifie $Lk - \lambda k = 0$) .

Notons que ce résultat montre, a posteriori, que la distinction "Grenzpunkt", "Grenzkreis" est indépendante de λ.

Cela étant, pour trouver H , nous procéderons ainsi :

1) Dans le cas "Grenzpunkt" en a , nous n'imposerons à h aucune condition en a .

2) Dans le cas "Grenzkreis" en a , soit g_a une fonction <u>réelle</u> $\in H_o$ telle que la forme linéaire $h \to [g_a , h](a)$ ne soit pas triviale sur H_o ; nous imposerons à h de vérifier : $[g_a , h](a) = 0$.

3) Nous imposerons des conditions analogues en b , et H désignant l'espace des $h \in H_o$ qui vérifient les conditions précédentes, on vérifie que L (domaine H) est autoadjoint.

Cette méthode se raccorde ainsi à la précédente : soit $\tilde{f}_a \in D_a$; $\tilde{f}_a$ vérifiant en outre, dans le cas "Grenzkreis" la condition : $[g_a , f_a](a) = 0$ (on en vérifie facilement l'existence et l'unicité). Soit de même $\tilde{f}_b$, et soit $G(x , y)$ la fonction de Green associée à $\tilde{f}_a$ et $\tilde{f}_b$; on montre que l'espace H qui vient d'être défini coïncide avec $G \circ L^2(a , b)$.

EXEMPLE. - Dans le cas classique (a et b finis, p et q continus au bord) on impose à h pour appartenir à H , les conditions suivantes :

$$\alpha h(a) + \beta h'(a) = 0 \quad ; \quad \gamma h(b) + \delta h'(b) = 0$$

$$(\alpha , \beta , \gamma , \delta \text{ réels, } (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) \neq 0) .$$

REMARQUE. - La méthode précédente, qui, en gros, consiste à imposer à h des conditions indépendantes en a et en b , n'est pas la seule méthode pour obtenir des sous-espaces de H_o sur lesquels L soit autoadjoint. Exemple :

$$L = \frac{d^2}{dx^2} , \ a = 0 \ ; \ b = 1 \ ; \text{ imposer : } h(0) = h(1) \ ; \ h'(0) = h'(1) \ !$$

Maintenant : étant donné un $H \subset H_o$ sur lequel L est autoadjoint, il lui correspond une décomposition spectrale de L ; en interprétant les opérateurs de projection qui interviennent, on démontre le :

THÉORÈME 1. - <u>On peut trouver</u> :

1° <u>Pour chaque</u> λ <u>réel une solution</u> $\varphi(x , \lambda)$ de $L\varphi = \lambda\varphi$

2° <u>une mesure</u> > 0 , $d\rho(\lambda)$ $(\lambda \in R)$

tels que

a. l'application $f(x) \to \hat{f}(\lambda) = \int f(x)\, \varphi(x,\lambda)\, dx$ (f continue à support compact dans $]a\,,\,b[$ se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(a\,,\,b)$ sur l'espace $\hat{L}^2$ des fonctions de carré sommable pour $d\rho(\lambda)$. On aura en particulier ("formule de Plancherel") :

$$\int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \int \hat{f}(\lambda)\, \overline{\hat{g}(\lambda)}\, d\rho(\lambda)$$

b. pour $f \in H$, on ait : $\widehat{Lf} = \lambda \hat{f}$.

REMARQUES.

a. Du théorème précédent résulte, pour f convenable (le lecteur précisera) la "formule d'inversion de Fourier"

$$f(x) = \int \hat{f}(\lambda)\, \varphi(x,\lambda)\, d\rho(\lambda)$$

b. Les $\varphi(x\,,\lambda)$ et la mesure $d\rho(\lambda)$ ne sont pas déterminés de manière unique par H. Par exemple, soit $\omega(\lambda)$ une fonction continue et > 0 de $\lambda \in R$; on pourrait aussi bien prendre $\omega(\lambda)\, \varphi(x,\lambda)$ et $\frac{1}{\omega^2}\, d\rho(\lambda)$ au lieu de $\varphi(x\,,\lambda)$ et $d\rho(\lambda)$.

c. Pour $f \in H_0$, $f \notin H$, on ne peut pas avoir $\widehat{Lf} = \lambda \hat{f}$ (sinon, dans $\hat{L}^2$, l'opérateur de multiplication par λ et de domaine $\hat{H}$, ne serait pas autoadjoint).

2. La méthode de Levitan.

1° Définition de la convolution généralisée.

Nous étudierons seulement le cas où l'on a :

$$Lf = \frac{d^2 f}{dx^2} - r(x)\, f \qquad (0 \leq x < +\infty) ;$$

$r(x)$ étant réel, continu et borné.

REMARQUE. - On vérifie alors aisément qu'on se trouve alors dans le cas du "Grenzpunkt" pour $+\infty$; cela explique pourquoi nous n'imposerons de conditions que pour $x = 0$.

Soit A un opérateur continu de $L^2(0\,,\,+\infty)$; c'est un noyau au sens de L. SCHWARTZ [7]. Cherchons à quelles conditions A permute à L (en tant qu'opérateur sur les fonctions assez dérivables à support compact) ; pour cela, on doit avoir :

$$L_x\, A_{x,y} = A_{x,y}\, L_y$$

comme L est formellement autoadjoint :

$$A_{x,y} L_y = L_y A_{x,y}$$

d'où la condition :

$$L_x A_{x,y} = L_y A_{x,y}$$

Soit maintenant $\mathcal{A}$ l'espace des fonctions $f(x)$ deux fois continuement différentiables à support compact dans $[0, +\infty[$, qui vérifient $hf(0) - f'(0) = 0$ (h est un nombre <u>réel</u> fixé une fois pour toutes). A tout $g \in \mathcal{A}$, nous allons associer un noyau A_g défini par la fonction $A_g(x, y)(x \geq 0, y \geq 0)$ vérifiant les conditions suivantes (existence et unicité de A_g par la théorie des équations hyperboliques à deux variables) :

a) $$L_x A_g(x, y) = L_y A_g(x, y)$$

b) $$A_g(x, 0) = g(x), \qquad \frac{\partial}{\partial y} A_g(x, 0) = hg(x)$$

c) $$A_g(y, x) = A_g(x, y)$$

Pour f continue à support compact, on pose $A_g f = f * g = \int_0^{+\infty} A_g(x, y) f(y)\, dy$

On démontre alors le :

THÉORÈME 2. - <u>L'application</u> $(f, g) \to f * g$ <u>définit sur</u> $\mathcal{A}$ <u>une structure de C-algèbre commutative munie de l'involution</u> $f \to \bar{f}$. <u>De plus, pour</u> $f \in \mathcal{A}$, <u>on a</u> :

$$L(A_g f) = A_g(Lf)$$

2° <u>Une majoration</u>.

On utilise le résultat suivant (je n'ai pu trouver la référence indiquée par LEVITAN ; de toute façon, cela ne doit pas être bien difficile) .

La fonction de Riemann de l'opérateur $L_x - L_y$, ainsi que ses dérivées du premier ordre sont majorées en valeur absolue par $C e^{\sqrt{2}\, y}$ (C une constante > 0).

Démontrons alors le :

THÉORÈME 3. - <u>Il existe une fonction</u> $\alpha(x) = \beta + \gamma x e^{\sqrt{2}\, x}$ (β <u>et</u> γ <u>constantes</u> > 0) telles que, pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ <u>et tout</u> p $(1 \leq p \leq +\infty)$, <u>on ait</u> :

$$\|f * g\|_p \leq \|\alpha f\|_1 \, \|g\|_p$$

Il suffit de démontrer que, pour tout $h(x) \in \mathcal{A}$, on a :

$$\left|\int_0^{+\infty} f * g(x)\, f(x)\, dx\right| \left(= |f * g * h(0)|\right) \leqslant \|\alpha f\|_1\, \|g\|_p\, \|h\|_{p'}, \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$$

Or :

$$A_f(x\,,\,y) = \frac{1}{2}[f(x+y) + f(x-y)] + \int_{x-y}^{x+y} w(x\,,\,y\,,\,t)\, f(t)\, dt \quad \text{si} \quad y \leqslant x$$

$$= A_f(y\,,\,x) \quad \text{si} \quad y \geqslant x$$

w étant la fonction de Riemann de $L_x - L_y$. Il suffit de majorer l'intégrale :

$$\left| \iint_{\substack{0 \leqslant y \\ 0 \leqslant x-y}} f(y)\, g(x)\, dy\, dx \int_{x-y}^{x+y} w(x\,,y\,,t)\, h(t)\, dt \right|$$

Par un changement de variables, elle s'écrit :

$$\left|\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(y)\, g(\xi + y)\, d\xi\, dy \int_0^{2y} w(\xi + y\,,\, y\,,\, \xi + r)\, h(\xi + r)\, dr\right|$$

$$\leqslant C\int_0^{+\infty} |f(y)|\, e^{\sqrt{2}y}\, dy \int_0^{2y} dr \int_0^{+\infty} |g(\xi + y)\, h(\xi + r)|\, d\xi$$

$$\leqslant 2C\int_0^{+\infty} |f(y)|\, y\, e^{\sqrt{2}y}\, dy\, \|g\|_p\, \|h\|_{p'},$$

d'où le théorème.

COROLLAIRE. - <u>Pour</u> $f \in \mathcal{A}$, <u>l'application</u> $g \longrightarrow f * g$ <u>se prolonge en un opérateur continu de</u> $L^2(0,+\infty)$.

La norme de cet opérateur sera désignée par $|||f|||$.

3° <u>Etude des caractères de</u> $\mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{A}_o$ l'espace des caractères de $\mathcal{A}$

a. Non nuls.

b. Hermitiens (i.e $\overline{\chi(f)} = \chi(\bar{f})$)

c. Continus pour la norme $|||\cdot|||$

D'après le théorème 3, on a $|\chi(f)| \leqslant |||f||| \leqslant \|\alpha f\|_1$, donc on a :

$$\chi(f) = \int_0^{+\infty} \varphi_\chi(x)\, f(x)\, dx$$

où $\varphi_\chi(x)$ est une fonction mesurable et (essentiellement) bornée sur tout compact.

χ se prolonge aux fonctions continues à support compact, en particulier aux Lf ($f \in \mathcal{A}$) ; on a donc :

$$\chi(Lf)\ \chi(g) = \chi(Lf * g) = \chi(f * Lg) = \chi(f)\ \chi(Lg)$$

Enfin, puisque χ n'est pas nul, il existe $g \in \mathfrak{A}$ tel que $\chi(g) \neq 0$; par conséquent :

$$\chi(Lf) = \frac{\chi(Lg)}{\chi(g)}\ \chi(f) = \lambda\,\chi(f) \qquad \lambda \text{ indépendant de } f .$$

On déduit facilement de là :

THÉORÈME 4. - Pour tout $\chi \in \hat{\mathfrak{A}}_o$, il existe une fonction $\varphi(x , \lambda)$ $(0 \leq x < +\infty$, λ réel) telle que l'on ait :

$$\chi(f) = \int f(x)\ \varphi(x , \lambda)\ d\chi$$

et $\varphi(x , \lambda)$ possède les propriétés suivantes :

a) $\qquad L_x\ \varphi = \lambda\varphi$

b) $\qquad \varphi(0 , \lambda) = 1 \quad ; \quad \varphi'_x(0 , \lambda) = h$

Enfin, l'application $\chi \to \lambda$ est un isomorphisme (topologique) de $\hat{\mathfrak{A}}_o$ sur un sous-ensemble fermé de R.

4° Le théorème de Plancherel.

Nous allons appliquer les résultats de Godement sur le "théorème de Plancherel abstrait".

Sur $\mathfrak{A}$, la forme linéaire $\mu(f) = f(0)$ possède les propriétés suivantes :

a. Elle est hermitienne positive (i.e. $\overline{\mu(f * \bar{g})} = \mu(\bar{f} * g)$; $\mu(f * \bar{f}) \geq 0$)
Cela résulte de la formule :

$$\mu(f * g) = \int_0^{+\infty} f(x)\ g(x)\ dx$$

b. Elle est unitaire (i.e. $\mu(f * \bar{f} * g * \bar{g}) \leq M_f\ \mu(g * \bar{g})$
Cela résulte du théorème 3.

LEMME. - Pour tout $f \in \mathfrak{A}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathfrak{A}$ tel que l'on ait : $|||g * f - f||| < \varepsilon$ (prendre pour g une fonction positive, nulle en dehors d'un intervalle $[0 , \eta]$ assez petit, et appliquer le théorème 3).

Alors d'après GODEMENT :

THÉORÈME 5. - Il existe une mesure positive $d\rho(\lambda)$, $(\lambda \in R)$ et un isomorphisme isométrique $f(x) \to \hat{f}(\lambda)$ entre :

- l'espace L^2 des fonctions de carré sommable sur $(0, +\infty)$ pour dx.
- l'espace $\hat{L}^2$ des fonctions de carré sommable pour $d\rho(\lambda)$;

cet isomorphisme prolongeant l'application $f \longrightarrow \hat{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx$ $(f \in \mathcal{O})$ où $\varphi(x, \lambda)$ désigne la fonction vérifiant :

$$L\varphi = \lambda\varphi , \quad \varphi(0, \lambda) = 1 , \quad \varphi'_x(0, \lambda) = h$$

En particulier, on a la "formule de Plancherel" :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \int \hat{f}(\lambda)\,\overline{\hat{g}(\lambda)}\,d\rho(\lambda)$$

Enfin, si $Lf \in L^2$ et $hf(0) - f'(0) = 0$, on a : $\widehat{Lf} = \lambda\hat{f}$

3. - Autres problèmes.

1° On peut chercher à généraliser les notions de fonction de type positif, ou de fonction presque-périodique, et leurs propriétés. Voir DELSARTE [1], LEVITAN [5].

2° On peut chercher à améliorer les majorations précédentes, en imposant à $r(x)$ des conditions plus précises. Voici, par exemple, les résultats de POVZNER [6] :

Dans les hypothèses de la 2e partie, avec $h = 0$:

- Si $r(x) = O\left(\frac{1}{x^{3+\varepsilon}}\right)$ $(\varepsilon > 0)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. Il existe K tel que $|\varphi(x, 0)| \leq K$

b. Il existe K' tel que $|\varphi(x, \lambda)| \leq K'$ $\quad \forall \lambda \geq 0$

c. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \; \|g\|_1$

- Si $r(x) = O\left(\frac{1}{x^{2+\varepsilon}}\right)$, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|\varphi(x, \lambda)| \leq K(|x| + 1) \quad \forall \lambda \geq 0$$

et, si l'on pose

$$\|f\| = \int_0^{+\infty} (1 + t)\,|f(t)|\,dt$$

on a :

$$\|f * g\| \leq C\,\|f\| \,.\, \|g\|$$

3° h étant fixé et $d\rho(\lambda)$ étant donné, on peut inversement, chercher s'il existe un opérateur $\frac{d^2}{dx^2} - r$. La question a été entièrement résolue par MARCENKO, KREIN, GEL'FAND et LEVITAN, qui ont démonté ceci [2] :

Soit $\rho(\lambda)$ une fonction monotone croissante qui possède les propriétés suivantes :

a. $\int_{-\infty}^{0} e^{x\sqrt{|\lambda|}}\, d\rho(\lambda) < +\infty$ pour tout $x > 0$

b. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x\sqrt{\lambda}}{\lambda}\, d\sigma(\lambda)$ est quatre fois continuement différentiable (on pose $\sigma(\lambda) = \rho(\lambda)$ si $\lambda \leqslant 0$, $= \rho(\lambda) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}$ si $\lambda \geqslant 0$)

c. $d\rho(\lambda)$ n'est pas discrète (cela, pour éliminer le cas "Grenzkreis" à l'infini).

Alors, il existe une fonction $r(x)$ continue et <u>une seule</u>, telle que $d\rho(\lambda)$ soit la "mesure spectrale" de l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2} - r$, avec la condition initiale $h\, f(0) - f'(0) = 0$.

(Précision : dans l'énoncé du théorème 1, la mesure $d\rho(\lambda)$ présente un certain arbitraire ; ici, GEL'FAND et LEVITAN la fixent, comme nous l'avons fait dans 2, en prenant pour $\varphi(x , \lambda)$ la solution de $L\varphi = \lambda\varphi$ qui vérifie $\varphi(0 , \lambda) = 1$ et $\varphi'(0 , \lambda) = h$: la même remarque vaut pour ce qui suit).

Réciproquement, soit $r(x)$ une fonction une fois continuement dérivable sur $[0 , +\infty[$. Et supposons que l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2} - r$ soit dans le cas "Grenzpunkt" à l'infini. Alors, la mesure spectrale $d\rho(\lambda)$ correspondant à la condition initiale $h\, f(0) - f'(0) = 0$ vérifie a et b.

D'autres cas limites (Grenzkreis à $+\infty$, intervalle borné) sont aussi étudiés.

[Revu et corrigé en Octobre 1957]

BIBLIOGRAPHIE

[1] DELSARTE (J.). - Une extension nouvelle de la théorie des fonctions presque-périodiques de Bohr, Acta math., t. 69, 1938, p. 259-317.

[2] GEL'FAND (I.M.) et LEVITAN (B.M.). - Sur la définition d'une équation différentielle par sa fonction spectrale [en russe], Izv. Akad. Nauk Ser. Mat., t. 15, 1951, p. 309-360.

[3] GODEMENT (Roger). - Sur la théorie des représentations unitaires, Annals of Math., Series 2, t. 53, 1951, p. 68-124.

[4] KODAIRA (Kunihiko). - On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions, Amer. J. Math., t. 72, 1950, p. 502-544.

[5] LEVITAN (B.M.). - Application des opérateurs de translation généralisés ... [en russe], Uspekhi mat. Nauk, t. 4 (29), 1949, p. 3-112.

[6] POVZNER (A.). - O differencial'nykh uravnenjjakh tipa Šturma-Liuvillja na poluosi, Recueil math. Akad. Sc. Moscou (Mat. Sbornik), t. 65, 1948, p. 3-52.

[7] SCHWARTZ (Laurent). - Mémoire de K. Kodaira : Harmonic fields in Riemann manifolds (generalised potentiel theory), I., Séminaire Bourbaki, t. 2, 1949/50.

[8] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des Distributions. - Paris, Hermann, 1950-1951 (Act. scient. et ind. n° 1091 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg n° 9).

[9] WEYL(H.). - Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, Math. Annalen, t. 68, 1910, p. 220-269.

ADDITIF

Les questions abordées dans l'exposé précédent ont fait l'objet, depuis 1952, de nombreux travaux dont il est impossible de rendre compte ici ; nous nous bornerons à renvoyer à quelques articles et ouvrages :

1) Pour la théorie spectrale des opérateurs différentiels ordinaires, à

NAJMARK (M.A.). - Linejnye differencial'nye operatory. - Moscou, 1954.

2) Pour le développement des fonctions suivant les fonctions propres d'un opérateur autoadjoint, à

GEL'FAND (I.M.) et SILOV (G.E.). - Quelques applications de la théorie des fonctions généralisées, J. Math. pures et appl., t. 35, 1956, p. 383-413 (paragraphes 9-11).

CARTIER (Pierre). - Développements de fonctions arbitraires suivant les fonctions propres d'un opérateur différentiel, Séminaire Bourbaki, t. 7, 1954/55.

3) Pour d'autres applications de la convolution généralisée de Delsarte, à

LIONS (J.L.). - Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 9-95.

[Octobre 1957]