

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE DOLBEAULT

Le théorème de Riemann-Roch sur les surfaces kählériennes compactes

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 63, p. 133-143

http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__133_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH SUR LES SURFACES KÄHLÉRIENNES COMPACTES.

(d'après KODAIRA [1])

par Pierre DOLBEAULT.

Soit V une variété analytique complexe. On appelle sous-variété principale Γ un sous-ensemble fermé de V tel que, pour tout point $\mathfrak{p} \in V$, il existe un voisinage $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ de \mathfrak{p} et une fonction holomorphe $r_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ dont $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \cap \Gamma$ soit l'ensemble des zéros. $r_{\mathfrak{p}} = 0$ est dite équation locale minimale si les facteurs irréductibles d'un polynôme distingué équivalent à $r_{\mathfrak{p}}$ sont tous différents. Γ est irréductible si elle n'est pas réunion de 2 sous-variétés principales distinctes.

On appelle diviseur (resp. diviseur positif) toute combinaison linéaire formelle finie de sous-variétés principales irréductibles à coefficients entiers (resp. entiers positifs) : $D = \sum_k m_k \Gamma_k$. Si $r_k = 0$ est une équation locale minimale de Γ_k en \mathfrak{p} , $R_{\mathfrak{p}} = \prod_k r_k^{m_k}$ est une fonction méromorphe dans un voisinage $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ de \mathfrak{p} ; $D \cap \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ est l'ensemble des variétés de zéros de $R_{\mathfrak{p}}$ diminué de l'ensemble des variétés polaires de $R_{\mathfrak{p}}$ affectées respectivement de multiplicités égales aux $|m_k|$. Si $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} = V$, le diviseur est défini par une fonction F méromorphe sur V et est noté (F) .

PROBLÈME. - V étant une variété kählérienne compacte de dim 2, D un diviseur, on cherche à exprimer la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(D)$ des fonctions méromorphes sur V multiples de $-D$, i.e. telles que $(F) + D$ soit un diviseur positif, à l'aide des "caractères de D " comme le nombre d'intersection de D avec lui-même, etc.

Un diviseur D est linéairement équivalent à 0 s'il existe une fonction méromorphe ϕ sur V avec $D = (\phi)$; $\dim \mathcal{F}(D)$ ne dépend que de la classe d'équivalence linéaire de D , on la note $\dim \{D\}$.

1. Généralités.

Un courant (de degré p) sur une variété indéfiniment différentiable, de dim n est un élément du dual (\mathcal{D}) de l'espace (\mathcal{D}) des formes différentielles (de degré $n - p$) indéfiniment différentiables à support compact. (voir L. SCHWARTZ [2]). $|T|$ désigne le support du courant T . En particulier, toute forme différentielle ω localement sommable définit un courant :

$$\omega[p] = \int_V \omega \wedge \varphi$$

Les opérateurs agissant sur les formes différentielles sont étendus aux courants, en particulier $dT[\varphi] = (-1)^{p+1} T[d\varphi]$, T étant de degré p . Sur une variété complexe de $\dim \mathbb{C}m$, un courant est dit pur de type (r, s) si $T[\varphi^{(r', s')}] = 0$ pour $r' \neq m - r$; $s' \neq m - s$.

Une variété kählérienne de dimension complexe m , V_m , est une variété analytique complexe possédant une métrique hermitienne définie localement par :

$$ds^2 = \sum_{j=1}^m \omega_j \bar{\omega}_j, \text{ telle que } \Omega = \sum_{j=1}^m \omega_j \wedge \bar{\omega}_j \text{ soit fermée.}$$

Les propriétés suivantes sont démontrées dans l'exposé 1 du Séminaire CARTAN, t. 4, 1951/52 : les opérateurs d et ∂ se décomposent en $d = d' + d''$; $\partial = \partial' + \partial''$ ($d', d'', \partial', \partial''$ sont respectivement de type $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$). $e(\Omega)$, resp. $i(\Omega)$ désignant les opérateurs de multiplication extérieure, resp. intérieure par Ω , on a :

$$i(\Omega)d' - d'i(\Omega) = -2\partial'' ;$$

$$i(\Omega)d'' - d''i(\Omega) = 2\partial' ;$$

$$i(\Omega)\partial - \partial i(\Omega) = 0 ;$$

et les formules qui s'en déduisent par transposition. Il en résulte :

$$(1) \quad d' \partial'' + \partial'' d' = 0 ;$$

$$(1') \quad d'' \partial' + \partial' d'' = 0 ;$$

$$(2) \quad \Delta = 2(d'\partial' + \partial' d') = 2(d''\partial'' + \partial'' d'')$$

et, si la variété est compacte, ce qu'on suppose désormais, la formule de décomposition, valable pour les courants :

$$(3) \quad T = HT + 2 d'' \partial'' GT + 2 \partial'' d'' GT .$$

THÉOREME 1. - Soit T un courant de type $(p, 1)$ défini sur V_m tel que $dT = 0 = HT$, ($0 \leq p$ entier $\leq m$), alors il existe un $(p, 0)$ -courant $\Theta = 2 \partial'' GT$ tel que $d\Theta = T$ qui est une p -forme holomorphe dans $V - |T|$. Soit Q un p -courant arbitraire tel que $T = dQ$, alors, pour tout cycle

$$Z \subset V - |T| : \int_Z \Theta := \langle *Z, Q \rangle - Q[HZ] .$$

DÉMONSTRATION. - $d'' \Theta = T$; $d' \Theta = 2 d' \partial'' GT = -2 \partial'' Gd' T = 0$;

$\partial'' \Theta = d'' \Theta = 0$ dans $V - |T|$, donc Θ holomorphe dans $V - |T|$;

$$Q = \Theta + dU + HQ ; \int_Z \Theta = \langle \bar{\Theta}, *Z \rangle = \langle \bar{Q}, *Z \rangle - \langle H\bar{Q}, *Z \rangle = \langle \bar{Q}, *Z \rangle - \overline{[HZ]}$$

2. Diviseurs caractéristiques.

V est désormais une variété kählérienne compacte de dim 2 . Une courbe sur V est une sous-variété principale de V : $\Gamma = \sum_{\nu=1}^k \Gamma_{\nu}$ où les Γ_{ν} sont irréductibles.

Γ_{ν} est l'image holomorphe d'un modèle \mathcal{C}_{ν} sans singularité : $\Gamma_{\nu} = \Phi(\mathcal{C}_{\nu})$. Soit $\mathcal{C} = \sum_{\nu=1}^k \mathcal{C}_{\nu}$ la somme directe des \mathcal{C}_{ν} ; l'application $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \Gamma$ est holomorphe et établit une correspondance biunivoque entre les points de \mathcal{C} et les branches irréductibles aux points de Γ .

Γ est définie en chaque point \wp de V par une équation locale minimale $R_{\wp}(z^1, z^2) = 0$. Pour chaque point $p \in \mathcal{C}$, on choisit un voisinage U_p de p tel que $\overline{\Phi(U_p)} - \Phi(p)$ ne contienne pas de point singulier de Γ et que l'équation $R_{\wp}(z^1, z^2) = 0$ soit valable dans $\overline{\Phi(U_p)}$. Alors, si $U_p \cap U_q \neq \emptyset$,

$T_{\wp q}(z) = R_{\wp}(z)/R_q(z)$ est une fonction holomorphe inversible dans un voisinage de $\overline{\Phi(U_p \cap U_q)}$. τ_p étant une coordonnées locale sur \mathcal{C} en p , $t_{pq} = T_{\wp q}(\Phi(\tau_p))$ et

(4) $t_{pq} \cdot t_{qr} \cdot t_{rp} = 1$ dans $U_p \cap U_q \cap U_r \neq \emptyset$.

THÉORÈME 2 (A. WEIL). - t_{pq} étant un système de fonctions holomorphes sur $U_p \cap U_q$ satisfaisant à (4), il existe un système de fonctions méromorphes h_p sur U_p telles que $h_p/h_q = t_{pq}$ sur $U_p \cap U_q$.

Enoncé équivalent : Tout espace fibré analytique complexe de base \mathcal{C} , de fibre S^2 de groupe structural C^* admet une section analytique.

DÉMONSTRATION. - On ramène la donnée à celle de fonctions holomorphes t_{jk} définies sur $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ telles que $t_{jk} t_{kl} t_{lj} = 1$ dans $U_j \cap U_k \cap U_l \neq \emptyset$, $\{U_j\}$ étant un système d'ouverts situés chacun dans un voisinage de coordonnées et tels que U_j et $U_j \cap U_k$ soient simplement connexes. Alors, si

$f_{jk} = \frac{1}{2\pi i} \log t_{jk}$, les entiers $f_{jk} + f_{kl} + f_{lj} = \mathcal{C}_{jkl}$ associés aux

$U_j \cap U_k \cap U_l$ définissent un 2-cocycle entier, modulo un cobord sur le nerf N du recouvrement, donc une 2-classe de cohomologie de N , soit J . Si $J = 0$, on détermine, à l'aide du théorème 1, des fonctions holomorphes γ_j telles que $\rho_{jk} - \gamma_j + \gamma_k = \lambda_{jk}$ constant. Les λ_{jk} définissent une 1-classe de cohomologie de \mathcal{C} à coefficients complexes d'où un caractère du 1er groupe de Betti de \mathcal{C} auquel appartient une fonction méromorphe multiplicative f sur \mathcal{C} ; f_j étant la restriction à U_j d'une détermination de f , $h_j = f_j \exp 2\pi i(\gamma_j + \lambda_j)$, λ_j constante. Si $J \neq 0$, τ_j et τ_k étant des coordonnées locales nulles aux points p_j, p_k de U_j, U_k respectivement, on détermine les entiers m_j pour que la classe J' associée aux

$$t'_{jk}(\tau) = t_{jk}(\tau) \tau_j^{m_j} / \tau_k^{m_k}$$

soit nulle.

Soit $f(\tau_p) = \tau_p^m (a_0 + a_1 \tau_p + \dots)$ ($a_0 \neq 0$) une fonction méromorphe définie dans U_p , $v_p(f) = m$; $\delta = \sum_p v_p(h_p) \cdot p$ est un diviseur caractéristique de Γ ; sa classe d'équivalence linéaire est définie de façon unique.

THÉORÈME 3. - Le degré $(\sum_p v_p(h_p))$ du diviseur caractéristique δ de Γ est égal au nombre d'intersection $I(\Gamma, \Gamma)$ du cycle Γ avec lui-même.

Il suffit de remarquer que les classes de cohomologie duales des classes d'homologie de Γ et de δ sur V et \mathcal{C} respectivement sont images l'une de l'autre.

REMARQUE. - Sur une surface algébrique, il existe toujours une fonction méromorphe Φ ayant chaque composante de Γ comme courbe polaire simple, alors $\delta = ((\Phi) + \Gamma) \cdot \Gamma$; δ est un élément de la série caractéristique de Γ .

3. Courant défini par une fonction méromorphe.

LEMME. - La distribution "valeur principale de Cauchy" définie par une fonction méromorphe est indépendante du choix de la coordonnée complexe locale de z .

Énoncé équivalent : $G(z)$ étant une fonction méromorphe au voisinage de $z = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}$, pour toute fonction $\zeta(z)$ holomorphe nulle en 0 ($\zeta'(0) \neq 0$),

$$(5) \quad T[\varphi] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\zeta(z)| > \varepsilon} G(z) \varphi \, dz \wedge d\bar{z}$$

existe et est indépendante du choix de $\zeta(z)$.

$$T[\varphi] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\zeta| > \epsilon} G(z(\zeta)) \varphi z'(\zeta) \overline{z'(\zeta)} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

D'où l'existence de la limite. G est la somme d'une fonction ayant un pôle d'ordre 1 pour laquelle l'intégrale est absolument convergente et d'une fonction ayant un pôle d'ordre m sans résidu, donc de la forme $F'(z)$, F ayant un pôle d'ordre $m - 1$:

$$T[\varphi] = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\xi| > \epsilon} F(z(\xi)) \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi \overline{z'(\xi)}) d\xi \wedge d\bar{\xi} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\xi(z)| > \epsilon} F(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \wedge d\bar{z}$$

intégrale du même type que (5), la fonction méromorphe ayant un pôle d'ordre $m - 1$. On obtient le théorème par récurrence sur m . (L. SCHWARTZ)

a. $\frac{1}{R_{\mathcal{P}}}$ définit un 0-courant sur $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$, voisinage de \mathcal{P} sur V :

$$\frac{1}{R_{\mathcal{P}}} [Y dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^2] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|z^2| > \epsilon} \frac{1}{R_{\mathcal{P}}} Y dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^2.$$

Si \mathcal{P} est un point simple de Γ , l'intégrale est absolument convergente.

Si \mathcal{P} est un point singulier de Γ , on utilise la représentation paramétrique de chaque branche Γ_s de Γ en \mathcal{P} :

$$z^1 = \varrho_s(\tau_s) = \tau_s^k (a_{s0} + a_{s1} \tau_s + \dots);$$

$$z^2 = \tau_s^m (a_{s0} \neq 0, k_s \geq 1).$$

Soit

$$\rho_s(\tau_s) = 1 / \frac{\partial R_{\mathcal{P}}}{\partial z^1} (\varrho_s(\tau_s), \tau_s^m)$$

et

$$\psi(v, z) = \int Y(v + w, z) w^{-1} dw \wedge d\bar{w}.$$

Cette dernière intégrale converge absolument vers une fonction C^∞ en \mathcal{U}_v , \mathcal{I}_v , \mathcal{R}_z , \mathcal{I}_z et

$$\frac{1}{R_{\mathcal{P}}} [Y dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^2] = \sum_s \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\tau_s| > \epsilon} \rho_s \psi(\varrho_s, \tau_s^m) |\tau_s|^{2m_s - 2} m_s^2 d\tau_s \wedge d\bar{\tau}_s$$

c'est une valeur principale de Cauchy.

b. Ψ étant une 3-forme arbitraire, C^∞ , avec $\text{supp } \Psi \subset U_\varphi$

$$(6) \quad d''\left(\frac{1}{R}\right)[\Psi] = - \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{|z^2| > \varepsilon} \int_{|R| > \delta} \frac{1}{R} d''\Psi = - \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left\{ \int_{\substack{|R| = \delta \\ |z^2| = \varepsilon}} \frac{\Psi(2,1)}{R} + \int_{|R| > \delta} \frac{\Psi(2,1)}{R} \right\}$$

soit

$$\sigma_p = \frac{d \Phi_p^2}{\partial_{R_\varphi}(\Phi_p)/\partial z^1} = - \frac{d \Phi_p^2}{\partial_{R_\varphi}(\Phi_p)/\partial z^2}$$

alors :

THÉORÈME 4. -

$$(7) \quad d''\left(\frac{1}{R}\right)[\Psi] = 2\pi i \sum_{\Phi(p)=\varphi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|U_p| > \varepsilon} \sum_{\beta} \Psi_{12\beta}(\Phi_p) \sigma_p d\bar{\Phi}_p^\beta$$

COROLLAIRE. - Soit $B_\varphi = B_{12}(z) dz^1 \wedge dz^2$ une 2-forme holomorphe dans U_φ , alors, pour une 1-forme X arbitraire C^∞ à support dans U_φ :

$$(8) \quad d(B_\varphi/R)[X] = 2\pi i \sum_{\Phi(p)=\varphi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|U_p| > \varepsilon} B_{12}(\Phi_p) \sigma_p \wedge \mathcal{E}$$

où \mathcal{E} désigne la forme induite par X sur Γ_p .

D'après le lemme, les expressions (7) et (8) sont indépendantes du choix du paramètre local φ .

THÉORÈME 5. - Pour une 2-forme holomorphe $B_\varphi = B_{12}(z) dz^1 \wedge dz^2$,

$$(9) \quad \sum_{\Phi(p)=\varphi} \text{Rés}_p [B_{12}(\Phi_p) \sigma_p] = 0.$$

Si φ est simple, le 2e terme de (6) est nul, d'où le théorème 4 ; le théorème 4 pour φ simple entraîne le théorème 5 pour φ singulier, il en résulte : le 2e terme de (6) est nul et le théorème 4 est valable pour φ singulier.

CONSÉQUENCE. - $\frac{1}{R}$ est indépendant du choix des coordonnées.

C'est évident si \mathfrak{p} est un point simple de Γ . Si \mathfrak{p} est singulier, il résulte facilement de (7) que $d''(\frac{1}{R})$ est indépendant des coordonnées. Soit $S_{\mathfrak{p}} = \frac{1}{R_{\mathfrak{p}}}$ dans $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} - \Gamma$ et $d''S_{\mathfrak{p}} = d''(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}})$. Comme V est kählérienne, $\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}} - S_{\mathfrak{p}}$ est holomorphe, donc identiquement nul sur $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$.

Si $W = W_{12}(z) dz^1 \wedge dz^2$ est une 2-forme définie dans un domaine $D \subset V$, telle que, pour tout point $\mathfrak{p} \in D$, $R_{\mathfrak{p}} W$ soit holomorphe en \mathfrak{p} , alors, $R_{\mathfrak{p}} W_{12}(\Phi_{\mathfrak{p}}) \sigma_{\mathfrak{p}}$ est la restriction à $U_{\mathfrak{p}}$ d'une forme ξ définie sur $\mathcal{U} \cap \Phi^{-1}(D)$ dite résidu de W (POINCARÉ); $d_W[X] = 2\pi i \int_{\mathcal{U}} \xi \wedge X$ pour toute forme C^∞ avec $|X| \subset D$; de plus $\sum_{\Phi(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}} \text{Rés } |\xi| = 0$.

4. Dimension de $\mathcal{F}(\Gamma)$.

Si $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $R_{\mathfrak{p}} F$ est une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$; donc $f(\nu) = R_{\mathfrak{p}} F(\Phi_{\mathfrak{p}}(\nu))/h_{\mathfrak{p}}(\nu)$ est la restriction à $U_{\mathfrak{p}}$ d'une fonction méromorphe sur \mathcal{U} , soit $\mathcal{S}_h(F)$; f possède les propriétés :

(α) $(f) + \delta \geq 0$;

(β) $\sum_{\Phi(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}} \text{Rés}_{\mathfrak{p}} [(\Phi_{\mathfrak{p}}^1)^k (\Phi_{\mathfrak{p}}^2)^\ell f h_{\mathfrak{p}} \sigma_{\mathfrak{p}}] = 0$ ($k, \ell = 0, 1, \dots$)

(d'après le théorème 5). Soit $\mathcal{F}(\Gamma, \delta)$ l'espace vectoriel des fonctions méromorphes f sur \mathcal{U} satisfaisant à (α) et (β). L'application $F \rightarrow f = \mathcal{S}_h(F)$ est un homomorphisme de $\mathcal{F}(\Gamma)$ dans $\mathcal{F}(\Gamma, \delta)$ dont le noyau est formé des constantes.

Soit $\mathcal{A}(\Gamma)$ l'espace vectoriel des fonctions méromorphes additives (ou intégrales simples de Picard de seconde espèce) multiples de $-\Gamma$. A toute $F \in \mathcal{A}(\Gamma)$, on peut associer $f = \mathcal{S}_h(F)$ telle que $R_{\mathfrak{p}} F/h_{\mathfrak{p}} = f|_{U_{\mathfrak{p}}}$ où f est une fonction méromorphe uniforme appartenant à $\mathcal{F}(\Gamma, \delta)$; de plus, Ψ étant une 3-forme C^∞ arbitraire $d''F[\Psi] = 2\pi i \int_{\mathcal{U}} \sum_{\beta} \Psi_{12\beta}(\Phi_{\mathfrak{p}}) f h_{\mathfrak{p}} \sigma_{\mathfrak{p}} d\bar{\Phi}_{\mathfrak{p}\beta}$ l'intégrale étant une valeur principale de Cauchy quand elle ne converge pas absolument.

THÉORÈME 6. - L'homomorphisme $\mathcal{A}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{F}(\Gamma, \delta)$ est sûr.

DÉMONSTRATION. - Soit $f \in \mathcal{F}(\Gamma, \delta)$, considérons

$$Q_f[\Psi] = - \int_{\mathcal{U}} \sum_{\beta} \Psi_{12\beta}(\Phi_{\mathfrak{p}}) f h_{\mathfrak{p}} \sigma_{\mathfrak{p}} d\bar{\Phi}_{\mathfrak{p}\beta}$$

1° $\sum_{\beta} \Psi_{12\beta}(\Phi_{\mathfrak{p}}) f h_{\mathfrak{p}} \sigma_{\mathfrak{p}} d\bar{\Phi}_{\mathfrak{p}\beta}$ est la restriction à $U_{\mathfrak{p}}$ d'une 2-forme définie

sur \mathcal{C} ;

2° le support de Q_f est Γ ;

3° Q_f est de type $(0, 1)$;

4° $dQ_f = d'Q_f$, en effet :

$$d''Q_f[\varphi^{(2,0)}] = -Q_f[d''\varphi^{(2,0)}] = \int_{\mathcal{C}} \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}} (\varphi_{12}) f_{h_p} \sigma_p d\bar{\varphi}_p^{\beta} = \int_{\mathcal{C}} d(\varphi_{12} f_{h_p} \sigma_p) = 0$$

(condition (β)).

Soit $\theta_f = 2 \int_{\Gamma} G dQ_f$; d'après le théorème 1, c'est une forme holomorphe dans $V - \Gamma$ et, pour tout cycle $Y \subset V - \Gamma$: $\int_Y \theta_f = -\bar{Q}_f[\overline{HY}]$; $F_f(z) = 2\pi i \int^z \theta_f$ est une fonction holomorphe additive dans $V - \Gamma$. Pour tout $\varphi \in \Gamma$, $R_{\varphi} F_f$ est holomorphe dans \mathcal{U}_{φ} . En effet : si φ est un point simple de Γ , $R_{\varphi} = z^1$; $z^2 = \tau_p$, la fonction holomorphe $N(z) = f(z^2) \cdot h_p(z^2)$ prolonge $f(\mathcal{C})h_p(\mathcal{C})$ sur \mathcal{U}_{φ} et $d''(N/R_{\varphi}) = -2\pi i Q_f$; $T = 2\pi i \theta_f - d'(N/R_{\varphi})$ est une 1-forme holomorphe fermée sur \mathcal{U}_{φ} et $L(z) = \int^z T$ est holomorphe sur \mathcal{U}_{φ} , donc $F_f = N/R_{\varphi} + L + Cte$ dans $\mathcal{U}_{\varphi} - \Gamma$, donc, $R_{\varphi} F_f$ est holomorphe dans \mathcal{U}_{φ} ; de plus, $R_{\varphi} F_f(\phi_p)/h_p = f$ dans \mathcal{U}_{φ} . Si φ est un point singulier de Γ , $R_{\varphi} F_f$ est holomorphe dans $\mathcal{U}_{\varphi} - \varphi$, donc dans tout \mathcal{U}_{φ} (HARTOGS) ; donc $F_f \in \mathcal{A}(\Gamma)$ et $\zeta(F_f) = f$.

C.Q.F.D.

Si A_1, \dots, A_q est une base orthogonale de l'espace vectoriel des 1-formes holomorphes sur V , toute $F(z) \in \mathcal{A}(\Gamma)$ satisfaisant à $\zeta_h(F) = f$ s'écrit :

$$F(z) = \int^z 2\pi i \theta_f + \sum_{\nu=1}^q \gamma_{\nu} \int^z A_{\nu} + \gamma_0 \quad (\gamma_{\nu} = Ctes)$$

et

$$dF(z) = 2\pi i \theta_f + \sum_{\nu} \gamma_{\nu} A_{\nu} - 2\pi i Q_f.$$

Soit $\{Y_1, \dots, Y_{2q}\}$ un système de représentants d'une base du premier groupe de Betti de V :

$$HY_j = \sum \alpha_{j\mu} * A_{\mu} + \sum \beta_{j\mu} * \bar{A}_{\mu} ;$$

$$* A_{\mu} = i \Omega \wedge A_{\mu} ; \int_{Y_j} \theta_f = -\bar{Q}_f[\overline{HY_j}] = -\sum_{\mu} \frac{\overline{\alpha_{j\mu} Q_f[*A_{\mu}]}}{\alpha_{j\mu} Q_f[*A_{\mu}]} = +i \sum_{\mu} \frac{\overline{\alpha_{j\mu} Q_f[\Omega \wedge A_{\mu}]}}{\alpha_{j\mu} Q_f[*A_{\mu}]}$$

$$\sum_{\nu=1}^q \gamma_{\nu} \langle A_{\nu}, [Y_j] \rangle = \sum_{\nu=1}^q \gamma_{\nu} \langle A_{\nu}, * \bar{Y}_j \rangle = - \sum_{\nu=1}^q \gamma_{\nu} \cdot \beta_{j\nu} \langle A_{\nu}, A_{\nu} \rangle$$

THÉORÈME 7 (Théorème d'existence). - Soit f arbitraire $\in \mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{S})$. Alors, il existe, sur V, une fonction $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ telle que $\mathcal{S}_h(F) = f$ si et seulement si :

$$(10) \quad Q_f[\Omega \wedge A_{\lambda}] = 0 \quad (\lambda = 1, \dots, q)$$

et, dans ce cas $F(z) = 2\pi i \int^z \theta_f + Cte.$

Soit j la dimension de l'espace vectoriel des 1-formes holomorphes A telles que $Q_f[\Omega \wedge A] = 0$ pour tout $f \in \mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{S})$, puisque $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ est déterminée par $f = \mathcal{S}_h(F)$ à une constante additive près, $\dim \mathcal{F}(\Gamma) - 1$ est égal à la dimension j de l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{S})$ satisfaisant à (10) :

$$\dim \{\Gamma\} = \dim \mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{S}) - q + j + 1 .$$

$D.C.(\Gamma) = \dim \mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{S}) - \dim \{\Gamma\} + 1 = q - j \geq 0$ est appelé défaut caractéristique de Γ : $D.C.(\Gamma) \leq q$; $\dim \mathcal{X}(\Gamma) = \dim \mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{S}) + q + 1 .$

THÉORÈME 8. - La dimension de l'espace vectoriel des classes d'intégrales simples de Picard de seconde espèce (modulo les fonctions méromorphes uniformes) qui sont multiples de $-\Gamma$ est $q + D.C.(\Gamma)$.

5. Le théorème de Riemann-Roch sur les courbes réductibles.

$\xi_p = fd \tau_p$ étant une forme différentielle méromorphe définie au voisinage de $p \in \mathcal{C}$, soit $v_p(\xi) = v_p(f)$; \mathfrak{m} étant un diviseur arbitraire sur \mathcal{C} , $\mathcal{F}(\mathfrak{m})$ (resp. $\mathcal{H}(\mathfrak{m})$) est l'espace des fonctions f (resp. des différentielles ξ) méromorphes satisfaisant à $(f) + \mathfrak{m} \geq 0$ (resp. $(\xi) + \mathfrak{m} \geq 0$) ;

$$\mathcal{F}^*(\mathfrak{m}) = \mathcal{F}(\mathfrak{m}) + \mathcal{F}(0) ; \mathcal{H}^*(\mathfrak{m}) = \mathcal{H}(\mathfrak{m}) + \mathcal{H}(0) .$$

Soient \mathcal{E} un ensemble fini de points, $\mathfrak{m} = \sum m_p p$ un diviseur sur \mathcal{C} et $\{\xi_p | p \in \mathcal{E}\}$ un système de différentielles définies resp. au voisinage de $p \in \mathcal{E}$,

$$\xi \equiv \sum_{p \in \mathcal{E}} \xi_p(\mathfrak{m}) \iff v_p(\xi - \xi_p) \geq m_p \text{ pour } p \in \mathcal{E} \text{ et } v_p(\xi) \geq m_p \text{ pour } p \notin \mathcal{E} .$$

Les sommes formelles $\sum_p \xi_p^{(\nu)}$ en nombre fini sont indépendantes modulo \mathfrak{m} si

$$0 \equiv \sum a_{\nu} \sum_p \xi_p^{(\nu)}(\mathfrak{m}) \Rightarrow a_{\nu} = 0 .$$

Pour chaque point singulier \mathfrak{p} de Γ soit $\ell_{\mathfrak{p}}$ le nombre de sommes formelles $\sum_{\phi(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}} (\phi_p^1)^k (\phi_p^2)^\ell \sigma_p$ ($k, \ell = 0, 1, 2, \dots$) indépendantes mod 0. C'est aussi le nombre de conditions linéairement indépendantes imposées par

$$(\beta_{\mathfrak{p}}) \sum_{\phi(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}} \text{Rés}_{\mathfrak{p}} [(\phi_p^1)^k \cdot (\phi_p^2)^\ell f h_p \sigma_p] = 0$$

Soit $\overline{\mathfrak{H}}(\Gamma, -\delta) = \{ \xi | \xi \equiv \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{k, \ell} a_{\mathfrak{p}k\ell} \sum_{\phi(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}} (\phi_p^1)^k (\phi_p^2)^\ell h_p \sigma_p(\delta) \}$,

$a_{\mathfrak{p}k\ell} = \text{Ctes arbitraires}$.

THÉOREME 9. - $\dim \mathfrak{F}(\Gamma, \delta) = \deg \delta - \sum_{\nu=1}^n \pi_{\nu} + \mu - \sum_{\mathfrak{p}} \ell_{\mathfrak{p}} + i$, avec $\mu = \underline{\text{nombre de composantes irréductibles de } \Gamma}$; π_{ν} , genre de \mathcal{C}_{ν} et $i = \dim \overline{\mathfrak{H}}(\Gamma, -\delta)$.

$c = -\sum_p v_p(\sigma_p)_p$ est le conducteur de Γ , si $\delta = \delta^+ - \delta^-$ ($\delta^+ \geq 0, \delta^- \geq 0$), on choisit δ tel que $|\delta| \cap |c| = \emptyset$ et $|\delta^-| \cap \mathcal{C}_{\nu} \neq \emptyset$, on montre que $\mathfrak{F}(\delta^*)/\mathfrak{F}^*(\delta - c)$ et $\overline{\mathfrak{H}}(\delta^- + c)/\overline{\mathfrak{H}}^*(c - \delta)$ sont en dualité par rapport

au produit $(\xi | f) = \sum_{q \in |\delta^+ + c|} \text{Rés}_q [f \xi]$ et on applique Riemann-Roch à chaque \mathcal{C}_{ν} .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KODAIRA (Kunihiko). - The theorem of Riemann-Roch on compact analytic surfaces, Amer. J. Math., t. 73, 1951, p. 813-875.
- [2] SCHWARTZ (Laurent). - Mémoire de K. Kodaira : Harmonic fields in Riemann manifolds, Séminaire Bourbaki, t. 2, 1949/50.

ADDITIF

Le théorème fondamental, dont l'établissement et les conséquences devaient faire l'objet d'un autre exposé d'après le mémoire cité de KODAIRA, est le suivant :

THÉOREME de Riemann-Roch. - La dimension de la classe de diviseurs $\{\Gamma\}$ d'une courbe Γ (réductible ou non) est donnée par :

$$\dim \{\Gamma\} = I(\mathfrak{F}, \Gamma) - \pi_{\Gamma} - q + i + j + 2$$

où $2q$ est le premier nombre de Betti de V , le nombre π_{Γ} le genre virtuel de Γ (défini comme en géométrie algébrique classique) et où $I(\Gamma, \Gamma)$, i et j ont été définis ci-dessus.

THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

Le théorème de Riemann-Roch ci-dessus a été généralisé dès 1952 ; il est connu (avec des généralisations) sur une variété algébrique quelconque depuis la fin de 1953, voir à ce sujet :

HIRZEBRUCH (F.). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Berlin, Springer, 1956 (Ergebnisse der Mathematik ..., Neue Folge, 9).

La construction d'un courant associé canoniquement à une fonction méromorphe donnée au n° 3 a été généralisée, voir :

SCHWARTZ (Laurent). - Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe, Géométrie différentielle [1953. Strasbourg]. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1953 (Coll. intern. C. N. R. S., 52).; p. 185-195.

DOLBEAULT (Pierre). - Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, II., Annals of Math., Series 2, t. 65, 1957, p. 282-330.

[Décembre 1958]

