ARMAND BOREL

Les espaces hermitiens symétriques

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 62, p. 121-132

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__121_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1952)

LES ESPACES HERMITIENS SYMÉTRIQUES

par Armand BOREL.

Le but de cet exposé est la détermination des espaces hermitiens, symétriques au sens de E. CARTAN. Ce sont, essentiellement, les domaines bornés symétriques de C^n (cf. [7]) et certaines variétés algébriques (grassmanniennes complexes, quadriques complexes,...) presque toutes étudiées au point de vue topologique par EHRESMANN [10]. Le n° 1 résume quelques points de la théorie des espaces riemanniens symétriques (cf. [6], Chap. 4).

1. Espaces riemanniens symétriques.

La variété riemannienne V_n est (globalement) symétrique si tout point $a \in V_n$ est point fixe isolé d'une isométrie involutive s_a de V_n, la "symétrie" par rapport à a. Le plus grand groupe connexe G d'isométries de V_n, (qui est toujours de Lie), est alors transitif et $V_n = G/H$, H compact, groupe d'isotropie d'un point $c \in V_n$, n'admettant pas de sous-groupe invariant dans G non trivial, la correspondance $g \to s_o g s_o$ est un automorphisme involutif de G, noté aussi s_c ; on a $s_o(h) = H$ pour $h \in H$ et H contient le plus grand groupe connexe d'éléments fixes par s_c ; on dira que H est un <u>sous-groupe caractéristique de</u> s_o.

Réciproquement soit G de Lie connexe, H sous-groupe compact sans sous-groupe $\neq \{e\}$ invariant dans G et caractéristique d'un automorphisme involutif s de G, alors G/H est symétrique par rapport à toute métrique riemannienne invariante par G et on dira que G/H est <u>homogène riemannien symétrique</u>, (G n'est donc pas supposé a priori être le plus grand groupe connexe d'isométries de G/H).

Soient L, X les algèbres de Lie de G, H ; on peut écrire $L = X + Y$ avec $s(x) = x$, $s(y) = -y$, $(x \in X, y \in Y)$, donc

$$(1) \qquad [X,X] \subset X \qquad [X,Y] \subset Y \qquad [Y,Y] \subset X \quad .$$

Les indices latins (grecs) seront relatifs à une base de Y, (resp. X) ; H étant compact, on peut supposer

$$(2) \qquad c^{\gamma}_{\alpha\beta} + c^{\beta}_{\alpha\gamma} = 0 \qquad\qquad c^{j}_{\alpha i} + c^{i}_{\alpha j} = 0 \quad .$$

L'ensemble des $x \in X$ tels que $[x,Y] = 0$ est un idéal dans L, donc nul et ainsi $[x,Y]=0$ entraîne $x=0$.

La forme de Killing $\mathcal{C}(u,v) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, u . \mathrm{ad}\, v)$ est invariante par s et dans des coordonnées convenables on aura $-\mathcal{C}(a,a) = \mu_\alpha (x^\alpha)^2 + \lambda_i (y^i)^2$; ici vu (2) : $\mu_\alpha = \sum (c^\gamma_{\alpha\beta})^2 + \sum (c^i_{\alpha j})^2$ donc $\mu_\alpha > 0$ car sinon $[x_\alpha, Y]=0$; on peut admettre que $\mu_\alpha = 1$, l'invariance de $\mathcal{C}$ donne alors aisément

(3) $$c^\alpha_{ik} = c^k_{\alpha i}\lambda_k = -c^i_{\alpha k}\lambda_i \qquad \text{(sans sommation)} .$$

PROPOSITION 1. - L <u>est semi-simple si et seulement si</u> Y <u>ne contient aucun élément</u> $y \neq 0$ <u>tel que</u> $[y,Y]=0$.

Si L n'est pas semi-simple un des λ_i, disons λ_1, est nul, alors vu (3), on a $c^\alpha_{1k}=0$ donc $[y_1, Y]=0$. Réciproquement l'ensemble Y_1 des $y \in Y$ tels que $[y,Y]=0$ est un idéal abélien de L, vu (1) et Jacobi, qui n'est donc pas semi-simple si cet idéal est $\neq 0$. On remarquera que cette démonstration vaut pour tout algèbre de Lie vérifiant (1),(2),(3).

PROPOSITION 2. - <u>Si</u> L <u>est semi-simple, on a</u> $X=[X,Y]$ <u>et</u> G <u>contient le plus grand groupe local connexe d'isométries locales au voisinage de</u> o.

Il n'est pas difficile de voir que le groupe local des isométries locales est de Lie, ce que nous <u>admettrons</u> ici ; soient L' son algèbre de Lie, X' celle du groupe local d'isotropie de o ; s se prolonge en automorphisme de L' laissant fixes les éléments de X' et $L' = X' + Y$; posons $Z = [X,Y] + Y$, c'est un idéal de L' (utiliser (1) et Jacobi), qui vérifie (1), (2), (3) et est semi-simple (proposition 1) ; il est donc facteur direct dans L' d'où l'existence de $U \subset X'$ tel que

$$L' = U + Z \qquad [U,Z]=0 \qquad [U,U]\subset U .$$

U est ainsi un idéal de L' contenu dans X' donc $U=0$ $L' = L - Z$.

Y est invariant par les automorphismes $\mathrm{ad}\, h$ $(h \in H)$, on sait qu'on peut l'identifier à l'espace tangent T_o à G/H en o de manière à ce que $\mathrm{ad}\, h$ devienne la transformation linéaire induite par la translation que définit h ; on obtient ainsi le <u>groupe linéaire d'isotropie</u> que nous noterons $\tilde{H}$; G/H sera réductible ou irréductible suivant que $\tilde{H}$ est réductible <u>dans le réel</u> ou non ; le sous-espace Y_1 (démonstration de la proposition 1) est invariant par H donc si $\tilde{H}$ est irréductible on a, soit $Y_1 = 0$ et G est semi-simple, soit

$Y_1 = Y$, $[Y,Y] = 0$, et la métrique est localement euclidienne.

THÉORÈME 1. - Tout espace homogène riemannien symétrique G/H est localement isomorphe au produit d'un espace euclidien par des espaces homogènes symétriques irréductibles à groupes d'isométries semi-simples.

Esquisse de démonstration : On peut supposer H connexe, soient Y_2 un supplémentaire de Y (démonstration de la proposition 1) invariant par $\tilde{H}$ et $L_2 = [Y_2,Y_2] + Y_2 = [Y,Y] + Y_2$, c'est un idéal semi-simple d'où l'existence de $X_1 \subset X$ tel que $L = L_1 + L_2$ avec $(L_1 = X_1 + Y_1 , [L_1,L_2] = 0)$; L_1 correspond à un espace euclidien ; il suffit de considérer encore L_2 ; si l'on a une décomposition $Y_2 = U_1 + U_2$ avec $[X_2,U_i] \subset U_i$ alors vu (3) et $\lambda_j \neq 0$, on a $[U_1,U_2] = 0$ et $X_2 = [U_1,U_1] + [U_2,U_2]$ (proposition 2) L_2 est composé direct des algèbres $[U_i,U_i] + U_i$ $(i = 1,2)$, etc... Il faut naturellement s'assurer que ces sous-algèbres engendrent des sous-groupes fermés.

COROLLAIRE.- Si G est simple, H connexe, G/H symétrique, alors G/H est irréductible et H est sous-groupe connexe maximal.

Dans un espace symétrique le transport parallèle le long d'un segment géodésique $\widehat{ab}$ est produit de 2 symétries ([8] Chap. 20) si $a = o$ c'est une transvection $\exp(ty) \in G$, il en résulte facilement que le groupe d'holonomie homogène en o est contenu dans $\tilde{H}$, d'où :

PROPOSITION 3. - Une forme différentielle sur l'espace homogène symétrique G/H invariante par G est à dérivée covariante nulle.

2. Espaces hermitiens symétriques.

Une variété hermitienne V_n $(n = 2m)$ est (globalement) symétrique si tout point $a \in V_n$ est point fixe isolé d'un automorphisme involutif de V_n (pour la structure complexe hermitienne bien entendu). Le groupe des automorphismes de V_n est alors transitif de Lie et $V_n = G/H$. On définit aussi comme précédemment la notion d'espace homogène hermitien symétrique.

L'espace G/H hermitien symétrique est évidemment riemannien symétrique relativement à la métrique riemannienne déduite de la métrique donnée. La proposition 3 appliquée à la partie imaginaire de la métrique hermitienne, montre que cette dernière est toujours kählérienne.

PROPOSITION 4. - Soient G semi-simple, G/H riemannien symétrique. Pour que G/H soit hermitien symétrique, il faut et il suffit que $\tilde{H}$ laisse invariante une structure complexe de T_o, le centre de $\tilde{H}$ est alors continu et contient la symétrie s_o.

Nécessité : claire. Suffisance : on peut évidemment trouver dans T_o une structure unitaire invariante par $\tilde{H}$ et subordonnée à la structure euclidienne, d'où une structure presque hermitienne sur V_n invariante par G, donc définie par une forme différentielle à dérivée covariante nulle (proposition 3) ; comme on est dans le cas analytique réel cette structure dérive d'une structure kählérienne (cf. [13]) évidemment univoquement déterminée, et qui est donc invariante par G puisque la structure presque-hermitienne l'est. Il reste à voir que cette structure est symétrique.

Soit $\mathfrak{H}$ le groupe linéaire de T_o induit par les isométries locales laissant o fixe ; ses transformations infinitésimales (a^i_j) sont caractérisées par le système d'équations linéaires

$$R_{rjkh}\, a^r_i + R_{irkh}\, a^r_j + R_{ijrh}\, a^r_k + R_{ijkr}\, a^r_h = 0 \tag{4}$$

(cf. [5] p.266), les R_{ijkh} étant les valeurs du tenseur de courbure en o ; soient dans notre cas $u^1,\dots,u^m$ des coordonnées complexes locales au voisinage de o, et prenons dans T_o la base duale de $du^1,\dots,du^m$, $d\bar{u}^1 = du^{1^*},\dots,d\bar{u}^m = du^{m^*}$, la métrique de T_o étant $\sum du^i du^{i^*}$. La transformation $I = (a^i_j)$ avec $a^j_j = -a^{j^*}_{j^*} = \sqrt{-1}$ est échangeable avec toute opération de $\tilde{H}$; la métrique étant d'autre part kählérienne, les seules composantes du tenseur de courbure éventuellement non nulles sont celles dont la 1e et la 2e paire d'indices sont simultanément formées d'un indice i et d'un indice j^* (cf. par exemple [1]). Par conséquent la transformation I vérifie (4) et $\exp(tI)$ est un sous-groupe à un paramètre de $\mathfrak{H}$; il fait donc partie de $\tilde{H}$ d'après la proposition 2 et est évidemment dans son centre, enfin $\exp(\pi I)$ est la symétrie s_o, elle est analytique complexe. C.Q.F.D.

Un espace hermitien symétrique est dit irréductible si le groupe linéaire d'isotropie complexe est irréductible ; l'espace riemannien métrique associé étant alors irréductible, un tel espace est soit localement unitaire, soit à groupe d'automorphismes semi-simple. De plus ici, si G/H est hermitien irréductible non localement unitaire, G est simple. En effet, si G n'était pas simple, il serait localement produit de 2 groupes simples G_1, G_2 échangés par s (immédiat),

H serait l'ensemble des produits $g_1.s(g_1)$, $(g_1 \in G_1)$, isomorphe à G_1 et ne pourrait avoir un centre continu.

THÉORÈME 2. – Un espace homogène hermitien symétrique G/H est localement isomorphe au produit d'un espace unitaire par des espaces hermitiens symétriques irréductibles à groupes d'automorphismes simples.

En tant qu'espace riemannien symétrique, G/H est localement produit $G_1/H_1 \times \dots \times G_k/H_k$ d'un espace euclidien G_1/H_1 par des espaces irréductibles à groupes semi-simples ; T_o est une somme de sous-espaces $T_o^{(i)}$ invariante par $\tilde{H}$, qui est lui-même produit direct $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k$ où $\tilde{H}_i$ induit une représentation triviale dans $T_o^{(j)}$ $(j \neq i \; , \; i = 1,\dots,k)$ et une représentation irréductible (dans le réel), dans $T_o^{(i)}$ $(i = 2,\dots,k)$. La structure complexe de T_o invariante par $\tilde{H}$ se caractérise par une transformation I de carré égal à $-Id.$; il est alors immédiat que I laisse les sous-espaces $T_o^{(i)}$ invariants et y induit donc des structures complexes invariantes par $\tilde{H}$. Ainsi G_i/H_i admet une métrique unitaire invariante par H_i donc par G_i , et G_i/H_i $(i \geqslant 2)$ est hermitien symétrique par la proposition 4 ; l'isomorphisme local entre G/H et le produit des G_i/H_i est évidemment compatible avec les structures presque complexes définies par I , il est donc analytique complexe. C.Q.F.D.

Si G/H est hermitien symétrique, on peut dans l'extension complexe $L_C = X_C + Y_C$ mettre Y_C sous la forme $U + U^*$ de sorte que l'on ait pour des bases convenables

$$(5) \qquad [x_\alpha , u_i] = c^j_{\alpha i} u_j \; , [x_\alpha , u_{j*}] = c^{i*}_{\alpha\, j*} \; u_{i*} \qquad (c^i_{\alpha\, j} = \bar{c}^{i*}_{\alpha\, j*})$$

L étant formé des transformations

$$x^\alpha x_\alpha + u^i u_i + u^i u_{i*} \qquad (x^\alpha \text{ réel}, \; u^i = \bar{u}^{i*})$$

LEMME 1. – On a $[U,U] = [U^*,U^*] = 0$.

En effet, de (1),(5) et Jacobi, on tire que $[U,U] \subset X$, $[[U,U],U^*] = 0$ donc, vu (5), $[[U,U],U] = 0$; $[U,U]$ est un idéal de L_C s'il est $\neq 0$ on en tire l'existence d'un idéal de L contenu dans X ce qui est impossible.

3. Domaines bornés symétriques.

Un domaine borné de C^n est homogène si son groupe d'automorphismes (qui est de Lie d'après H. CARTAN) est transitif, il est symétrique si tout point $a \in D$

est point fixe isolé d'un automorphisme involutif de D. Le groupe d'isotropie d'un point est compact (H. CARTAN) d'où une métrique hermitienne invariante par tous les automorphismes (on peut aussi prendre la métrique de Bergmann) un domaine borné symétrique est bien un espace hermitien symétrique au sens du n° 2.

Ce qui suit ne suppose pas nécessairement D univalent ; on peut supposer que D est une variété complexe munie d'une application analytique $f : D \to C^n$ à domaine de valeurs borné vérifiant la condition suivante : tout point $a \in D$ a un voisinage dans lequel l'image réciproque par f d'un point de C^n n'a au plus qu'un nombre fini de points. Cependant on verra que les domaines bornés symétriques sont toujours univalents et simplement connexes. Signalons encore que E. CARTAN a vérifié que les domaines bornés homogènes de C^n sont toujours symétriques si $n \leqslant 3$; on ne sait pas s'il en est de même pour $n > 3$.

PROPOSITION 5. - Le plus grand groupe connexe d'automorphismes d'un domaine borné symétrique est semi-simple.

Nous envisageons G comme groupe de transformations, L comme algèbre des transformations infinitésimales sur D ; d'après H. CARTAN des transformations de L indépendantes sur les réels le sont aussi sur les complexes (sinon en effet on aurait 2 transformations infinitésimales u, v de L vérifiant $u = iv$ et on on déduirait l'existence dans G d'un groupe $\exp(zu)$ à 1 paramètre complexe z ; alors les coordonnées de l'image d'un point $a \in D$ par $\exp(zu)$ seraient fonctions entières bornées de z, donc constantes, cf. [7] p. 121). Les combinaisons linéaires à coefficients complexes des transformations infinitésimales de L forment donc une algèbre de Lie que l'on peut identifier à L_C ; nous y prenons la base indiquée à la fin du n° 2. Vu la proposition 2 et le lemme 5 il suffit de voir que $u^* \in U^*$ et $[u^*, U] = 0$ entraînent $u^* = 0$; $u_1, \ldots, u_m$ sont des champs de vecteurs indépendants en tout point d'un voisinage de o, et l'on peut prendre comme nouvelles coordonnées dans ce dernier les coordonnées canoniques $\xi^1, \ldots, \xi^m$ du groupe abélien complexe engendré par $u_1, \ldots, u_m$, ainsi $u_i = \dfrac{\partial}{\partial \xi^i}$; u^* s'écrira alors $u^* = \rho^i u_i$ où les ρ^i sont des fonctions analytiques des ξ^j ; mais $[u_j, u^*] = 0$ donne alors $\dfrac{\partial \rho^i}{\partial \xi^i} = 0$, $(i,j = 1, \ldots, m)$ donc $\rho^i = \mathrm{Cte}$, et finalement $u^* = 0$ d'après ce qui a été dit au début de la démonstration.

D'après le théorème 2, un domaine borné est localement isomorphe à un produit d'espaces hermitiens symétriques G_i/H_i où G_i est simple ; de plus le lieu des transformés de o par G_i est une variété analytiquement plongée dans G/H.

Si G_i est compact, elle est réduite à un point, G_i est alors un sous-groupe de H invariant dans G, donc $G_i = \{e\}$. Ainsi

PROPOSITION 6. - Un domaine borné symétrique est localement isomorphe à un produit d'espaces hermitiens symétriques irréductibles G_i/H_i où G_i est simple non compact.

4. Espaces hermitiens symétriques irréductibles.

PROPOSITION 7. - Les espaces hermitiens symétriques irréductibles (non unitaires) sont exactement les quotients G/H où G est simple, H compact à centre continu caractéristique d'un automorphisme involutif de G.

On sait déjà que les conditions indiquées pour G et H sont nécessaires (n° 2). Suffisance : G/H est en tout cas riemannien symétrique irréductible (corollaire au théorème 1), mais $\tilde{H}$ n'est pas irréductible dans le complexe puisqu'il possède un centre continu ; $\tilde{H}$ laisse donc invariante une structure complexe de T_o, on peut appliquer la proposition 4.

Soit H' la composante connexe de e de H, elle est connexe maximale (corollaire au théorème 1) ; nous distinguons 2 cas :

a) G non compact ; H' est en tout cas compact maximal, donc H est forcément connexe, G/H est homéomorphe à R^{2m} et le groupe effectif sur G/H est le groupe adjoint de G.

b) G compact ; dans un groupe de Lie compact connexe le centralisateur d'un tore est connexe ([11]), H' qui est connexe maximal, est donc le centralisateur du plus grand groupe connexe de son centre, et ainsi égal à H. Il contient évidemment un tore maximal de G et a donc même rang que lui et G/H est simplement connexe ; H contient le centre de G et G/H s'identifie de nouveau à $\mathrm{ad}\, G/(H \cap \text{centre } G)$. Soit maintenant G simple compact, de centre $= \{e\}$, H connexe maximal ayant même rang que G et un centre continu, H s'identifie alors à la composante connexe de e du centralisateur d'un élément d'ordre 2 de son centre, il est donc caractéristique d'une automorphie involutive et G/H est hermitien symétrique irréductible. Finalement :

THÉORÈME 3. - Les espaces hermitiens symétriques irréductibles (non unitaires) sont toujours simplement connexes, et admettent des groupes simples de centre réduit à e comme plus grands groupes connexes d'automorphismes.

a) Ceux qui sont compacts sont exactement les quotients G/H, G simple compact de centre réduit à e, H connexe maximal à centre continu ayant même rang que G.

b) Ceux qui ne sont pas compacts sont exactement les quotients G/H, G simple non compact, H compact maximal lorsque H est à centre continu.

A un espace irréductible G/H compact correspond un espace irréductible non compact, le quotient par H de la "forme ouverte" de G définie par l'involution dont H est caractéristique. Inversement si G/H est irréductible non compact le quotient G_c/H, où G_c est la forme compacte de G est aussi hermitien irréductible car les groupes linéaires d'isotropie de G/H et de G_c/H sont les mêmes, et G_c est simple (n° 2). On a ainsi une correspondance biunivoque entre ces deux classes d'espaces. En fait, on peut encore établir un lien plus précis et la proposition 7 montre que G_c/H peut être envisagé comme un prolongement analytique compact de G/H.

PROPOSITION 7. - Soient G/H hermitien symétrique irréductible non unitaire, G_c la forme compacte de G, $C(G)$ l'extension complexe de G.

Alors G_c/H est un espace homogène analytique complexe de $C(G)$; G/H en est un ouvert, les automorphismes de G se prolongent en homéomorphismes analytiques complexes de G_c/H.

Principe de démonstration : On peut supposer G et G_c de centres réduits à e, donc plongés dans un groupe complexe $C(G)$ d'algèbre L_C. Dans cette dernière on reprend la décomposition $L_C = X_C + U + U^*$ du n° 2 ; $X + U^*$ est une sous-algèbre, vu $[X_C, U^*] \subset U^*$ et on démontre (en utilisant l'irréductibilité de G/H) qu'elle engendre un sous-groupe fermé F, et que de plus, pour des choix convenables des sous-groupes G et G_c on a $G \cap F = G_c \cap F = H$; $C(G)/F$ est un espace homogène analytique complexe à $2m$ dimensions réelles, il contient donc G_c/H et G/H comme ouverts, le 1er étant de plus compact lui est forcément égal, d'où la proposition.

5. Espaces hermitiens symétriques irréductibles compacts.

Les espaces riemanniens symétriques irréductibles ont été tous déterminés par E. CARTAN par voie infinitésimale [4] ; ici, vu le théorème 3a, on peut aussi utiliser la détermination des sous-groupes connexes maximaux de rang maximum ([2]) ; dans la liste de ces sous-groupes (loc. cit. p. 219) il suffira de considérer ceux dont le centre est continu. On obtient ainsi quatre classes infinies d'espaces hermitiens symétriques irréductibles compacts se répartissent en quatre classes infinies et 2 structures isolées. Dans la liste ci-dessous nous indiquons, pour simplifier les notations, des groupes non nécessairement à centre réduit à e, mais il est entendu que le vrai groupe connexe d'automorphismes est le groupe adjoint de la structure indiquée.

Type 1 : $U(p+q)/U(p) \times U(q)$ à pq dimensions complexes : grassmannienne des sous-espaces à p dimensions de C^{p+q}.

Type 2 : $SO(2n)/U(n)$ à $n(n-1)/2$ dimensions complexes ($n \geqslant 3$) : variété des génératrices planes à $n-1$ dimensions d'une quadrique complexe non dégénérée Q_{2n-2} de l'espace projectif complexe $P_{2n-1}(C)$.

Type 3 : $SO(n+2)/SO(n) \times T^1$: quadrique complexe non dégénérée Q_{n+1} ou aussi variété des droites orientées de l'espace projectif réel $P_{n+1}(R)$, $(n > 2)$.

Type 4 : $Sp(n)/U(n)$ à $n(n+1)/2$ dimensions complexes, espaces des variétés planes à $n-1$ dimensions appartenant à un complexe de droites non dégénéré de $P_{2n-1}(C)$.

Type 5 : $E_6/SO(10) \times T^1$ à 16 dimensions complexes ; E_6 peut être représenté comme le sous-groupe de $U(27)$ laissant invariante une certaine forme cubique ([10] et [11]) . $E_6/SO(10) \times T$ est la variété de $P_{26}(C)$ dont les équations s'obtiennent en annulant les dérivées partielles de la forme cubique.

Type 6 : $E_7/E_6 \times T^1$ à 27 dimensions complexes ; E_7 peut être représenté comme le sous-groupe de $Sp(28)$ qui laisse invariante une certaine forme biquadratique F ([3] p. 144) ; $E_7/E_6 \times T^1$ est la variété dont les équations s'obtiennent en annulant certaines dérivées secondes de F ([3] , loc. cit. p. 144, ligne 9).

On constate ainsi que les espaces hermitiens symétriques irréductibles compacts sont des variétés algébriques.

6. Espaces hermitiens irréductibles symétriques non compacts.

Ils se répartissent en 6 types comme les précédents. E. CARTAN [4] a vérifié que les espaces des 4 premiers types étaient équivalents à des domaines bornés. Je ne sais pas ce qui en est des 2 derniers. Pour les 4 grandes classes, je donne ci-dessous une réalisation comme domaine (domaine non borné) de C^n (cf. [7] ou [14]) .

Type 1 : $G/U(p) \times U(q)$ où G est le groupe d'une forme hermitienne à p carrés positifs et q carrés négatifs, l'espace est celui des $p \times q$ matrices complexes

Z vérifiant $Z'\bar{Z} < E_q$; en écrivant un élément de G comme matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

on le fait opérer sur l'espace considéré par $Z \to (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$. En permutant p et q on obtient des domaines équivalents, pour $p = 1$, on a la boule ouverte de rayon 1 .

Type 2 : $G/U(n)$ où G est le sous-groupe de $SO(n,C)$ laissant invariante une forme hermitienne à n carrés positifs et n carrés négatifs. L'espace est celui des $p \times p$ matrices antisymétriques vérifiant $Z'\bar{Z} < E_n$; G y opère aussi par $Z \to (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$.

Type 3 : $G/SO(n)\times T^1$ où G est le groupe d'une forme quadratique à n carrés positifs et 2 carrés négatifs. Domaine de C^n défini par

$$|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < \frac{1}{2}(1 + |z_1^2 + \dots + z_n^2|^2) < 1 \quad .$$

Il peut aussi se représenter comme ensemble des 2n matrices réelles,vérifiant $XX' < E_2$, G y opérant par $X \to (AX+B)(CX+D)^{-1}$, (cf. [12]) .

Type 4 : $G/U(n)$ où G est le sous-groupe de $Sp(n,C)$ laissant invariante une forme hermitienne à n carrés positifs et n carrés négatifs. L'espace est l'ensemble des $n\times n$ matrices symétriques vérifiant $Z'\bar{Z} < E_n$, G y opérant comme plus haut. C'est le "cercle unité généralisé" il est équivalent au demi-plan généralisé, ensemble des matrices symétriques à partie imaginaire définie positive.

N.B. J'ai suivi la numérotation de E. CARTAN, celle de SIEGEL permute les types 3 et 4.

Enfin les deux derniers sont les représentants ouverts des classes E 3 et E 7 de [4] .

Si l'on admet qu'ils sont aussi équivalents à des domaines bornés on voit que tout domaine borné symétrique est globalement équivalent à un produit de domaines bornés symétriques irréductibles (en tant qu'espaces hermitiens symétriques). En tout cas les domaines bornés symétriques sont simplement connexes puisque tous les espaces hermitiens symétriques à groupes d'automorphismes semi-simples le sont (résulte des théorèmes 2 et 3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOCHNER (S). - Vector fields and Ricci curvature, Bull. Amer. math. Soc., t. 52, 1946, p. 776-797.

[2] BOREL (A.) et de SIEBENTHAL (J.). - Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos, Comm. Math. Helv., t. 23, 1949, p. 200-221.

[3] CARTAN (Elie). - Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. - Paris, Nony, 1894 (Thèse Sc. math. Paris. 1894).

[4] CARTAN (Elie). - Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, Bull. Soc. math. France, t. 54, 1926, p. 214-264 et t. 55, 1927, p. 114-134.

[5] CARTAN (Elie). - Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 44, 1927, p. 345-467.

[6] CARTAN (Elie). - La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs. - Paris, Gauthier-Villars, 1930 (Mém. Sc. math., fasc. 42).

[7] CARTAN (Elie). - Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg, t. 11, 1936, p. 116-162.

[8] CARTAN (Elie). - Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, 2e éd. - Paris, Gauthier-Villars, 1946 (Cahiers scientifiques n° 2).

[9] CHEVALLEY (Claude). - Sur le groupe exceptionnel (E_6), C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 1991-1993.

[10] EHRESMANN (Charles). - Sur la topologie de certains espaces homogènes, Ann. of Math., t. 35, 1934, p. 396-443.

[11] HOPF (Heinz). - Über den Rang geschlossener Lieschen Gruppen, Comm. Math. Helv., t. 13, 1940, p. 119-143.

[12] HUA (Loo-Keng). - On the theory of Fuchsian functions of several variables, Ann. of Math., t. 47, 1946, p. 167-191.

[13] LICHNEROWICZ (André). - Variétés localement kählériennes, Séminaire Bourbaki, t. 4, 1951/52.

[14] SIEGEL (Carl L.). - Analytic functions of several complex variables, Cours professé à Princeton, 1948/49.

ADDITIF

HARISH-CHANDRA montre a priori, dans

HARISH-CHANDRA. - Representations of semisimple Lie groups VI, Amer. J. Math. t. 78, 1956, p. 564-628.

qu'un espace hermitien symétrique irréductible non compact est isomorphe à un domaine borné. Les espaces correspondants compacts font partie de la classe d'espaces homogènes G/H (où G est compact connexe et H le centralisateur d'un tore de G), qui sont tous des variétés algébriques rationnelles ; cf. :

GOTO (M.). - On algebraic homogeneous spaces, Amer. J. Math., t. 76, 1954, p. 811-818.

BOREL (A.). - Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups, Proc. nat. Ac. Sc. U.S.A., t. 40, 1954, p. 1147-1151.

Dans ce dernier article, il est aussi montré que si un domaine borné admet un groupe transitif semi-simple d'automorphismes, il est symétrique, ce qui répond partiellement à la question de E. CARTAN, mentionnée au n° 3. Ce résultat se trouve également dans :

KOSZUL (Jean-Louis). - Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes, Canadian J. Math., t. 7, 1955, p. 562-576.

[Mai 1957]