HENRI CARTAN

Les travaux de Koszul, I

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 1, p. 7-12
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__7_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1948)

LES TRAVAUX DE KOSZUL, I.

par Henri CARTAN.

L'homologie et la cohomologie d'un groupe de Lie compact peuvent s'étudier directement sur l'algèbre de Lie du groupe (cf. CHEVALLEY et EILENBERG.- Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 63, 1948, p. 85-124). En opérant ainsi, on peut étudier des algèbres de Lie sur un corps quelconque (le plus souvent, de caractéristique nulle) ; les hypothèses de compacité sont alors remplacées par des hypothèses de semi-simplicité. La présente conférence a pour but d'exposer quelques outils algébriques utiles à cette étude, et de démontrer les premiers résultats obtenus, notamment le théorème sur le troisième nombre de Betti. Dans une conférence ultérieure, on introduira les notions relatives à une sous-algèbre d'une algèbre de Lie, et à l'"espace homogène" correspondant.

1. Notations générales.

Un opérateur dans un ensemble A (c'est-à-dire une transformation de A dans A) étant désigné par une lettre quelconque telle que T , on notera $T.x$ le transformé de $x \in A$ par T , et TU le composé des opérateurs T et U : $TU.x = T.(U.x)$.

2. Rappel de notions relatives à l'algèbre extérieure (cf. BOURBAKI.- Algèbre, Chap. III).

E : espace vectoriel sur un corps commutatif K (ou même, module unitaire sur un anneau commutatif). $\Lambda(E)$: algèbre extérieure de E , somme directe des $\Lambda^p(E)$ ($\Lambda^0(E) = K$, $\Lambda^1(E) = E$) . Notation : minuscules latines pour les éléments de E , grecques pour ceux de $\Lambda(E)$. Notation $\alpha \wedge \beta$ pour le produit ; en particulier (produit d'éléments de degré un) $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p$.

La forme bilinéaire définissant la dualité entre E et son dual E' est notée $\langle x , x' \rangle$. Le produit intérieur d'un $\alpha \in \Lambda^p(E)$ par un $x' \in E'$ est un élément de $\Lambda^{p-1}(E)$, noté $\alpha \llcorner x'$, défini par

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p) \llcorner x' = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \langle x_i , x' \rangle \; x_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_i \wedge \dots \wedge x_p$$

(le chapeau $\hat{}$ sur x_i indique que le facteur x_i doit être supprimé). L'opérateur de $\Lambda(E)$: $\alpha \to \alpha \llcorner x'$ est noté $i(x')$; on a $i(x')\, i(x') = 0$. On définit $i(\alpha')$ pour $\alpha' \in \Lambda(E')$ par : $i(x'_1 \wedge \dots \wedge x'_p) = i(x'_p) \dots i(x'_1)$. On écrit

$\alpha \llcorner \alpha'$ pour $i(\alpha').\alpha$. On définit de même $i(\alpha)$ qui opère dans $\Lambda(E')$; $i(\alpha).\alpha'$ se note $\alpha \lrcorner \alpha'$. On a $i(\alpha \wedge \beta) = i(\beta)\, i(\alpha)$. Les composantes scalaires de $\alpha \llcorner \alpha'$ et de $\alpha \lrcorner \alpha'$ sont égales ; on note $\langle \alpha , \alpha' \rangle$ cette composante scalaire : ce "produit scalaire" prolonge $\langle x , x' \rangle$ et définit la dualité entre $\Lambda(E)$ et $\Lambda(E')$. On a $\langle \alpha , \alpha' \rangle = 0$ si α et α' sont homogènes de degrés différents, et $\langle x_1 \wedge \ldots \wedge x_p , x'_1 \wedge \ldots \wedge x'_p \rangle = \det(\langle x_i , x'_j \rangle)$.

Soit $e(\beta)$ la multiplication extérieure $\alpha \to \beta \wedge \alpha$, et $e(\beta')$ la multiplication extérieure $\alpha' \to \beta' \wedge \alpha'$. La relation

$$\langle \beta \wedge \alpha , \alpha' \rangle = \langle \alpha , \beta \lrcorner \alpha' \rangle$$

exprime que $e(\beta)$ et $i(\beta)$ sont <u>transposés</u> (le premier opère sur $\Lambda(E)$, le second sur $\Lambda(E')$) . De même, $e(\beta')$ et $i(\beta')$ sont transposés.

3. Notions relatives aux endomorphismes d'algèbres en général.

Notion d'algèbre <u>graduée</u> Λ . On note alors $\alpha \to \bar{\alpha}$ l'automorphisme qui, à un α homogène de degré n , associe $(-1)^n \alpha$. Un endomorphisme θ (de la structure vectorielle) est une <u>dérivation</u> si

$$\theta . \bar{\alpha} = \overline{\theta . \alpha} \quad , \quad \theta.(\alpha \beta) = (\theta . \alpha)\beta + \alpha(\theta . \beta)$$

et une <u>antidérivation</u> si

$$\theta . \bar{\alpha} = -\overline{\theta . \alpha} \quad , \quad \theta.(\alpha \beta) = (\theta . \alpha)\beta + \bar{\alpha}(\theta . \beta) \quad .$$

Si θ est une antidérivation, $\theta\theta$ est une dérivation ; si θ_1 et θ_2 sont des antidérivations, $\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1$ est une dérivation.

Le "crochet" $[\theta_1 , \theta_2]$ de deux opérateurs θ_1 et θ_2 étant par définition $\theta_1 \theta_2 - \theta_2 \theta_1$, le crochet de deux dérivations est une dérivation, le crochet d'une dérivation et d'une antidérivation est une antidérivation.

Si Λ est engendrée par les éléments de degrés 0 et 1 , toute dérivation (resp. antidérivation) qui s'annule sur les éléments de degrés 0 et 1 est identiquement nulle.

Si Λ est l'algèbre extérieure $\Lambda(E)$ d'un espace vectoriel E , $i(x')$ (pour $x' \in E'$) est une antidérivation. Pour toute dérivation θ de $\Lambda(E)$, $e(x)\theta$ est une antidérivation.

4. Rappel relatif aux variétés différentiables.

Pour simplifier, on se bornera aux variétés indéfiniment différentiables. Toutes les "fonctions" seront supposées indéfiniment différentiables.

En chaque point M de la variété V, on a dualité entre l'espace $E(M)$ des vecteurs tangents (en M) et l'espace $E'(M)$ des différentielles de fonctions numériques au point M. Ce sont des espaces vectoriels de dimension n sur le corps réel R (n = dimension de V). Un "champ de vecteurs" X est une fonction qui, à chaque point M de V, associe un vecteur tangent en M ; les champs de vecteurs forment un module E (sur l'anneau des fonctions numériques) dont le duæl E' est le module des formes différentielles de degré un. Notation $\langle X, \omega \rangle$ pour la forme bilinéaire définissant cette dualité. La différentielle df d'une fonction numérique f est une forme différentielle (élément de E'). L'algèbre des "formes différentielles extérieures" s'identifie à l'algèbre extérieure $\Lambda(E')$ (où E' est considéré comme module sur l'anneau des fonctions numériques) ; l'opérateur d ("différentiation extérieure") est caractérisé par les 3 propriétés :

1°) pour une fonction f (élément de $\Lambda^0(E')$), df est la différentielle de f ;
2°) $dd = 0$;
3°) d est une antidérivation.

Chaque champ de vecteurs X définit une transformation infinitésimale, que nous noterons $\theta(X)$, et qui opère sur $\Lambda(E)$ et $\Lambda(E')$. On définit d'abord $\theta(X)$ sur $\Lambda^0(E) = \Lambda^0(E')$ en posant $\theta(X).f = \langle X, df \rangle$. Alors il existe un noyau de groupe d'automorphismes de V, dépendant d'un paramètre réel additif t, soit $M \to \varphi(M, t)$, tel que, pour toute fonction f,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\varphi(M, t)) = \theta(X).\, f(\varphi(M, t)).$$

Ce groupe opère sur $\Lambda(E)$ et $\Lambda(E')$, et, en dérivant par rapport à t pour $t = 0$, on obtient l'opérateur $\theta(X)$. Il se calcule à l'aide des règles suivantes (qui ne nécessitent pas la recherche du groupe d'automorphismes):

$\theta(X)$ commute avec d (sur $\Lambda(E')$) ; pour prendre $\theta(X)$ d'un produit (extérieur, intérieur ou scalaire), on applique la formule classique donnant la dérivée d'un produit ; en particulier, sur $\Lambda(E)$ et sur $\Lambda(E')$, $\theta(X)$ est une dérivation.

Si on applique $\theta(X)$ aux champs de vecteurs, on obtient $\theta(X).Y$; on a la formule fondamentale

$$\theta(\theta(X).Y) = \theta(X)\,\theta(Y) - \theta(Y)\,\theta(X) \qquad (1)$$

qui conduit à noter $[X, Y]$ le champ de vecteurs $\theta(X).Y$. Alors (1) donne l'identité de Jacobi.

Enfin, on a la "formule fondamentale du calcul des variations" :

(2) $\theta(X) = i(X)\,d + d.i(X)$ sur l'espace $\Lambda(E')$ des formes différentielles extérieures, où $i(X)$ désigne, comme au n° 2, le produit intérieur. (Démonstration : les 2 membres sont des dérivations qui commutent avec d et sont égales sur les fonctions).

5. Groupes de Lie.

V désignant la variété d'un groupe de Lie G, on notera $\mathfrak{a}$ le sous-espace de E formé des champs de vecteurs invariants par les translations à gauche du groupe G ; on notera $\mathfrak{a}'$ le sous-espace de E' formé des formes différentielles (de degré un) invariantes à gauche. $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont deux espaces vectoriels de dimension n sur le corps des réels R, et sont en dualité. L'algèbre extérieure $\Lambda(\mathfrak{a}')$ s'identifie à la sous-algèbre de $\Lambda(E')$ formée des formes différentielles extérieures invariantes à gauche et est stable pour l'opérateur d de différentiation extérieure. ($\Lambda^0(\mathfrak{a}')$ est le corps des fonctions constantes, identifié à R).

Si $X \in \mathfrak{a}$, le groupe d'automorphismes de V défini par X (cf. n° 4) est le groupe des translations à droite par les éléments du sous-groupe de G ; trajectoire de l'élément neutre. Donc $\Lambda(\mathfrak{a})$ et $\Lambda(\mathfrak{a}')$ sont stables pour $\theta(X)$, si $X \in \mathfrak{a}$. En particulier, si X et Y sont dans $\mathfrak{a}$, $[X, Y]$ est dans $\mathfrak{a}$. Les éléments sur lesquels $\theta(X)$ s'annule quel que soit $X \in \mathfrak{a}$ sont les éléments invariants à la fois par les translations à gauche et par les translations à droite. On les appellera éléments invariants (tout court).

Comme $\theta(X)$ est nul sur les scalaires (fonctions constantes), on a :

(3) $\langle\theta(X).Y , \omega\rangle + \langle Y , \theta(X).\omega\rangle = 0$ pour $Y \in \mathfrak{a}$ et $\omega \in \mathfrak{a}'$.

Autrement dit, $\theta(X)$ sur les formes est transposé de $-\theta(X)$ sur les champs de vecteurs.

L'espace vectoriel $\mathfrak{a}$, muni de la structure définie par l'application $(X , Y) \to [X , Y]$ de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}$, est l'algèbre de Lie du groupe G.

6. Algèbres de Lie.

On part d'une algèbre de Lie abstraite $\mathfrak{a}$ (définition classique), prise sur un corps K provisoirement quelconque. Soit n la dimension de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ sur K. On va tout construire à partir de la structure de $\mathfrak{a}$, en prenant comme définitions les relations établies plus haut dans le cas du corps R.

Soit $\mathfrak{a}'$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{a}$. On notera désormais x , y , ... les éléments de $\mathfrak{a}$; x' , y' ceux de $\mathfrak{a}'$; α , β , ... les éléments de $\Lambda(\mathfrak{a})$; α', β' , ... ceux de $\Lambda(\mathfrak{a}')$. On *définit* $\theta(x)$, pour $x \in \mathfrak{a}$:

$$\theta(x).y = [x \, , \, y] \quad ; \quad \langle y \, , \, \theta(x).x' \rangle = - \langle [x \, , \, y] \, , \, x' \rangle \quad .$$

$\theta(x)$ étant défini sur $\mathfrak{a}$ et sur $\mathfrak{a}'$, on le prolonge à $\Lambda(\mathfrak{a})$ et $\Lambda(\mathfrak{a}')$ par la condition que $\theta(x)$ soit une *dérivation*. Le $\theta(x)$ qui opère sur $\Lambda(\mathfrak{a})$ est *transposé* de $-\theta(x)$ opérant sur $\Lambda(\mathfrak{a}')$. Les éléments de $\Lambda(\mathfrak{a})$ (resp. de $\Lambda(\mathfrak{a}')$) , sur lesquels $\theta(x)$ s'annule pour tout x de $\mathfrak{a}$, s'appellent éléments *invariants* ou bi-invariants. Les éléments invariants de $\Lambda(\mathfrak{a})$ forment une *sous-algèbre* $\mathfrak{J}$, ceux de $\Lambda(\mathfrak{a})$ une sous-algèbre $\mathfrak{J}$.

La relation (2) conduit à définir un endomorphisme δ de $\Lambda(\mathfrak{a}')$, nul sur les scalaires, tel que

$$\theta(x) = i(x)\delta + \delta\, i(x) \quad ; \tag{4}$$

un tel opérateur δ est unique, il commute avec les $\theta(x)$, et satisfait à $\delta\delta = 0$; c'est une *antidérivation*, caractérisée par

$$\langle x \wedge y \, , \, \delta.x' \rangle = - \langle [x \, , \, y] \, , \, x' \rangle \quad .$$

δ applique $\Lambda^p(\mathfrak{a}')$ dans $\Lambda^{p+1}(\mathfrak{a}')$.

On définit, sur $\Lambda(\mathfrak{a})$, l'endomorphisme ∂ *transposé* de $-\delta$:

$$\langle \partial.\alpha, \alpha' \rangle = - \langle \alpha \, , \, \delta.\alpha' \rangle \quad .$$

∂ commute avec les $\theta(x)$, $\partial\partial = 0$, ∂ applique $\Lambda^p(\mathfrak{a})$ dans $\Lambda^{p-1}(\mathfrak{a})$, est *nul sur* $\mathfrak{a}$; on a enfin

$$\partial.(x \wedge y) = [x \, , \, y] \quad , \quad \theta(x) = e(x)\,\partial + \partial\, e(x) \quad ,$$

d'où par récurrence la formule explicite

$$\partial.(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} [x_i \, , x_j]\, x_1 \wedge \ldots \wedge \hat{x}_i \wedge \ldots \wedge \hat{x}_j \wedge \ldots \wedge x_p \quad .$$

L'opérateur δ sur $\Lambda(\mathfrak{a}')$ ("algèbre des cochaînes"), définit une *algèbre de cohomologie*, notée $H(\mathfrak{a}')$. L'opérateur ∂ , sur $\Lambda(\mathfrak{a})$ ("algèbre des chaînes") définit un *groupe d'homologie* noté $H(\mathfrak{a})$; il n'y a pas, en général, de multiplication dans $H(\mathfrak{a})$, parce que ∂ *n'est pas* une antidérivation.

$H(\mathfrak{a})$ et $H(\mathfrak{a}')$ sont naturellement en *dualité* ; pour chaque degré p , $H^p(\mathfrak{a})$ et $H^p(\mathfrak{a}')$ sont en dualité, donc ont même dimension. Si $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un *groupe compact* connexe, $H(\mathfrak{a}')$ s'identifie à l'algèbre de cohomologie de l'espace (topologique) du groupe, d'après le théorème de de Rham. Ceci prouve que deux groupes compacts et connexes, localement isomorphes, ont même nombre de Betti. Dans tous les cas, la dimension commune de $H^p(\mathfrak{a})$ et $H^p(\mathfrak{a}')$ s'appellera le <u>p-ième nombre de Betti</u> de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$.

<u>Sommaire du développement</u>. - Expressions de δ et ∂ à l'aide d'une base (x_k) de $\mathfrak{a}$ et de la base duale (x'_k) de $\mathfrak{a}'$ (K de caractéristique $\neq 2$) :

$$2\delta = \sum_k e(x'_k)\ \theta(x_k) \qquad \text{toujours ;}$$

$$2\,\partial = \sum_k i(x'_k)\ \theta(x_k) \qquad \text{si } \mathfrak{a} \text{ est "unimodulaire" .}$$

$\mathfrak{a}$ <u>unimodulaire</u> : $\theta(x)$, considéré comme endomorphisme de $\mathfrak{a}$ (représentation "adjointe"), a une <u>trace</u> nulle, quel que soit $x \in \mathfrak{a}$; condition équivalente : la chaîne ω de degré n est un <u>cycle</u> ; condition équivalente : ω est <u>invariante</u>.

Si $\mathfrak{a}$ est unimodulaire : $\alpha \longrightarrow \omega \llcorner \alpha'$ définit un isomorphisme de $H^p(\mathfrak{a}')$ sur $H^{n-p}(\mathfrak{a})$; ceci correspond au "théorème de dualité" de Poincaré pour les nombres de Betti d'une variété.

<u>Notion d'algèbre de Lie semi-simple</u>. - Algèbre sans radical $\Longleftrightarrow$ algèbre dont toutes les représentations sont complètement réductibles (au moins si K de caractéristique 0). Si $\mathfrak{a}/\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}$: centre de $\mathfrak{a}$) est semi-simple, on a un isomorphisme canonique de $H(\mathfrak{a}')$ sur $\mathfrak{J}'$, de $H(\mathfrak{a})$ sur $\mathfrak{J}$ (d'où : structure multiplicative de $H(\mathfrak{a})$ dans ce cas).

Si $\mathfrak{a}$ est semi-simple, son centre est nul, les nombres de Betti pour les dimensions 1 et 2 sont nuls, le 3e nombre de Betti est égal à la dimension de l'espace vectoriel des <u>formes quadratiques invariantes</u> (une forme quadratique invariante est une $f(x , y)$ bilinéaire telle que

$$f(y, x) = f(x, y)\ ,\ f(\,\theta(z).x\,,y\,) + f(x, \theta(z).y\,) = 0\ )\ .$$

COROLLAIRE. - Si K est quasi-réel maximal, et $\mathfrak{a}$ <u>simple</u>, le 3e nombre de Betti est égal à 1 .