CLAUDE CHEVALLEY

L'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions algébriques de caractéristique p, II

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 9, p. 53-56

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__53_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1949)

L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN
POUR LES CORPS DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE CARACTÉRISTIQUE p, II.

par Claude CHEVALLEY

Soit donnée une variété algébrique V dans un espace projectif sur un corps algébriquement fermé L ; nous supposerons la variété V dépourvue de singularités, et nous désignerons sa dimension par n. On appelle <u>cycle</u> de dimension p sur V toute combinaison linéaire formelle à coefficients entiers de sous-variétés de dimension p de V. Si les coefficients des variétés qui interviennent dans un cycle sons tous $\geqslant 0$, on dit que le cycle est positif. Les variétés qui interviennent avec des coefficients $\neq 0$ dans un cycle sont appelées les <u>composantes</u> de ce cycle.

Si V est une courbe, les points de V correspondent d'une manière biunivoque aux places du corps des fonctions rationnelles sur V. Les notions de cycle de dimension 0 sur V et de diviseur du corps des fonctions rationnelles sur V sont donc équivalentes.

D'une manière générale, si V est de dimension n, les cycles de dimension $n-1$ sur V sont appelés <u>diviseurs</u> de V. Les variétés de dimension $n-1$ sur V correspondent de manière biunivoque aux valuations du corps $L(V)$ des fonctions rationnelles sur V dont les centres sont de dimension $n-1$. On en déduit la possibilité d'attacher à tout $x \neq 0$ de $L(V)$ un diviseur $\partial(x)$. Les diviseurs $\partial(x)$ forment un sous-groupe du groupe de tous les diviseurs de V ; deux diviseurs dont la différence appartient à ce sous-groupe sont appelés <u>équivalents</u>.

Soient V et V' des variétés sans singularités dans des espaces projectifs. On peut alors former une variété $V \times V'$ sans singularité dans un espace projectif convenable dont les points correspondent biunivoquement aux couples (M, M') formés d'un point M de V et d'un point M' de V'. Le point de $V \times V'$ qui correspond à (M, M') se désigne par $M \times M'$. Soient W et W' des sous-variétés de V et de V', de dimensions respectives p et p' ; les points $M \times M'$ tels que $M \in W$ et $M' \in W'$ forment alors une sous-variété $W \times W'$ de dimension $p+p'$ de $V \times V'$. On en déduit par linéarité la définition du cycle $X \times X'$ si X est un cycle sur V et X' un cycle sur V'.

Soit R un corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini K à q éléments. Soit L une clôture algébrique de K, et soit R_L le corps déduit de R par extension à L du corps de base. On peut alors former une courbe Γ sans singularité dans un espace projectif dont R_L soit le corps des fonctions rationnelles. Tout cycle de dimension 1 sur la surface $\Gamma \times \Gamma$ est appelé une correspondance sur Γ ; les courbes sur $\Gamma \times \Gamma$ sont appelées correspondances irréductibles sur Γ. Si C est une correspondance irréductible, on dit qu'un point M' de Γ correspond à un point M par la correspondance C si $M \times M$ est sur C. Les points $M \times M'$ (pour $M \in \Gamma$) forment une courbe sur $\Gamma \times \Gamma$ que l'on appelle la diagonale de $\Gamma \times \Gamma$, ou la correspondance identique. Si C est une correspondance irréductible, les points $M' \times M$ tels que $M \times M' \in C$ forment une correspondance irréductible que l'on désigne par C' ; l'application $C \rightarrow C'$ s'étend par linéarité aux correspondances quelconques.

On peut supposer que Γ est définie par un système d'équations à coefficients dans K. Soit r un entier > 0, et soient $x_0, \ldots, x_N$ les coordonnées d'un point M de Γ. Alors le point M^{q^r} de coordonnées $x_0^{q^r}, \ldots, x_N^{q^r}$ est encore un point de Γ, et les points $M \times M^{q^r}$ (pour tous les $M \in \Gamma$) forment une correspondance irréductible J_r sur Γ. Les points d'intersection de J_r avec la diagonale Δ sont les points $M \times M$, où M est un point de Γ qui a un système de coordonnées formé d'éléments du corps K_r algébrique de degré r sur K. Le nombre de ces points est le nombre c_r des places de degré 1 du corps R_{K_r} (cf. l'exposé précédent) ; c'est ce nombre qu'il faut évaluer pour démontrer l'hypothèse de Riemann. Pour ce faire on a besoin des notions relatives à l'intersection des cycles d'une variété algébrique.

Utilisant les mêmes notations que plus haut, soient W_1 et W_2 des sous-variétés de V de dimensions respectives p_1 et p_2. Supposons que W_1 et W_2 n'aient en commun aucune variété de dimension $> p_1 + p_2 - n$. On peut alors associer à W_1 et à W_2 un cycle d'intersection $W_1 . W_2$ de dimension $p_1 + p_2 - n$. C'est un cycle positif dans lequel interviennent les variétés de dimension $p_1 + p_2 - n$ communes à W_1 et W_2 et celles-là seulement. On en déduit par linéarité la notion de cycle d'intersection $X_1 . X_2$ de deux cycles quelconques ; ce cycle n'est défini que si l'intersection de toute composante de X_1 avec toute composante de X_2 est définie. Si X_1 est de dimension 1 et X_2 de dimension $n-1$, le cycle $X_1 . X_2$ (s'il est défini) est de dimension 0 ; la somme des coefficients d'un cycle de degré 0 s'appelle le degré de ce cycle ; on pourra donc parler du degré de $X_1 . X_2$, qu'on désigne par $\deg (X_1 . X_2)$. Si de plus X_1 est une courbe sans singularité, $X_1 . X_2$ peut être considéré comme un diviseur du corps des fonctions rationnelles sur X_1 ; on l'appelle le <u>diviseur induit</u> par X_2 sur X_1.

Considérons le cas où $V = \Gamma \times \Gamma$. Soit X une correspondance sur Γ. Si X a des composantes de la forme $M \times \Gamma$, on en retire une correspondance de la forme $a \times \Gamma$ (où a est un diviseur sur Γ) tel que la différence $X_0 = (X - a) \times \Gamma$ n'ait plus de composante de la forme $M \times \Gamma$. Pour tout $M \in \Gamma$ l'intersection $(M \times \Gamma).X_0$ est alors définie et s'écrit $M \times X(M)$, où $X(M)$ est un diviseur sur Γ. On en déduit par linéarité la définition de $X(b)$ pour tout diviseur b sur Γ. Le degré de $X(M)$ ne dépend pas de M et se désigne par $d(X)$. On pose $d'(X) = d(X')$. Soient X et Y des correspondances ; si $X.Y$ est défini, $\deg(X.Y)$ se désigne par $I(X.Y)$. Ce nombre ne change pas si on remplace X et Y par des correspondances qui leur soient respectivement équivalentes. On en déduit la possibilité de définir $I(X.Y)$ pour des correspondances X et Y quelconques. Si $M \in \Gamma$, on voit facilement que $J_r(M) = M^{q^r}$, d'où $d(J_r) = 1$, $J'_r(M^{q^r}) = q^r M$, d'où $d'(J_r) = q^r$; de plus, les points d'intersection de J_r avec la diagonale Δ interviennent avec le coefficient 1 dans $J_r . \Delta$, d'où $I(J_r . \Delta) = c_r$. La quantité $1 + q^r - c_r$ est donc égale à $d(J_r) + d'(J_r) - I(J_r . \Delta)$.

Pour toute correspondance X nous poserons $\sigma(X) = d(X) + d'(X) - I(X . \Delta)$.

Soient X et Y des correspondances sur Γ. On démontre alors qu'il existe une correspondance $Z = X \circ Y$ univoquement déterminée qui possède les propriétés suivantes : si $P \in \Gamma$, on a $Z(P) = X(Y(P))$, $Z'(P) = Y'(X'(P))$. On obtient ainsi une loi de composition bilinéaire non commutative dans l'ensemble des correspondances. A. WEIL a montré que l'on a

$$\sigma(X \circ X') \geqslant 0$$

pour toute correspondance X. Montrons comment ce résultat entraîne l'hypothèse de Riemann.

Soient x et y des entiers ; posons $X = x J_r + y \Delta$, et écrivons que $\sigma(X \circ X') \geq 0$. Il est évident que $J_r \circ J'_r = q^r \Delta$; posons $k = \sigma(\Delta)$, d'où $\sigma(x^2 J_r \circ J'_r) = k\, q^r x^2$.

Si Y est une correspondance quelconque, on a évidemment $Y = \Delta = \Delta \circ Y = Y$; et la considération de l'application $M \times M' \longrightarrow M' \times M$ de $\Gamma \times \Gamma$ dans lui-même montre que l'on a $\sigma(Y') = \sigma(Y)$.

Les nombres $\sigma(J_r \circ \Delta')$ et $\sigma(\Delta \circ J'_r)$ sont donc égaux à $1 + q^r - c_r$. Il vient donc

$$k\, q^r x^2 + 2(1 + q^r - c_r)xy + k\, y^2 \geqslant 0$$

d'où $(1 + q^r - c_r)^2 \leqslant k^2 q^r$, ce qui entraîne déjà l'hypothèse de Riemann. De plus, on peut démontrer que $I(\Delta \cdot \Delta) = 2g - 2$, si g est le genre de Γ ; le nombre k est donc égal à $2g$.

BIBLIOGRAPHIE

WEIL (André). - Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. - Paris, Hermann, 1948.

On trouvera dans cet ouvrage, outre la démonstration complète de l'hypothèse de Riemann pour la fonction dzêta, la démonstration de l'hypothèse analogue pour les séries L attachées à une courbe. Une autre démonstration de l'hypothèse de Riemann pour la fonction dzêta a été donnée par

ROQUETTE (Peter). - Arithmetischer Beweis der Riemannschen Vermutung in Kongruenz funktionenkörpern beliebigen Geschlechts, J. für die reine und angew. Math., t. 191, 1953, p. 199-252.

[Avril 1957]