JACQUES DIXMIER

Facteurs : classification, dimension, trace

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 30, p. 233-243
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__233_0>

FACTEURS : CLASSIFICATION, DIMENSION, TRACE [1]

par Jacques DIXMIER.

1. Préliminaires.

Soit H un espace de Hilbert complexe, $\mathfrak{B}$ l'ensemble des endomorphismes continus de H .

a. Opérateurs partiellement isométriques. - $U \in \mathfrak{B}$ est dit partiellement isométrique (p. i.) s'il existe une variété linéaire fermée $\mathfrak{M}$ telle que $\|Ux\| = \|x\|$ pour $x \in \mathfrak{M}$, $Ux = 0$ pour $x \in H \ominus \mathfrak{M}$.

$\mathfrak{M}$, évidemment bien déterminée par U , s'appelle variété initiale de U , et $U(\mathfrak{M})$ variété finale de U .

U^* est aussi p.i., et admet $\mathfrak{N}$ pour variété initiale, $\mathfrak{M}$ pour variété finale, et les correspondances $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ réalisées par U et U^* sont inverses (facile). On a donc $U^* U = P_{\mathfrak{M}}$, $U U^* = P_{\mathfrak{N}}$, $U U^* U = U$, $U^* U U^* = U^*$, avec toutes les réciproques voulues. Si $U' \in \mathfrak{B}$ est isométrique sur $\mathfrak{M}$, $U'P_{\mathfrak{M}}$ est p.i. de variété initiale $\mathfrak{M}$.

b. Anneaux d'opérateurs. - Soient M un anneau d'opérateurs, M_U (resp. M_{PI}) l'ensemble des opérateurs unitaires (resp. p.i.) de M . Tout $A \in M$ est combinaison linéaire d'éléments de M_U : d'abord, $2A = (A + A^*) + (A - A^*)$, et, comme $A + A^*$, $i(A - A^*)$ sont self-adjoints, on peut se limiter au cas où A est self-adjoint, avec même $-1 \leqslant A \leqslant 1$. Alors, on vérifie aussitôt que $U_1 = A + i(1 - A^2)^{\frac{1}{2}}$, $U_2 = A - i(1 - A^2)^{\frac{1}{2}}$ sont dans M_U , et $2A = U_1 + U_2$. Conséquence : si un $A \in \mathfrak{B}$ est invariant partout $U' \in M'_U$, i.e. $U'^{-1} AU' = A$, A permute à M'_U donc à M' , donc $A \in M$. Ce critère sera souvent utilisé implicitement dans la suite.

Exemple d'application : On sait que tout $A \in \mathfrak{B}$ se met sous la forme UB , avec : B self-adjoint $\geqslant 0$; U p.i., de variété initiale $[B(H)] = H \ominus \mathfrak{N}_A$ ($\mathfrak{N}_A$: variété des zéros de A), de variété finale $[A(H)] = H \ominus \mathfrak{N}_{A^*}$.

B et U sont uniques avec ces propriétés, donc, si $A \in M$, on a $B \in M$ et $U \in M$.

---

[1] On trouvera la bibliographie dans : MURRAY (F.J.) and von NEUMANN (J.). - On rings of operators, IV, Annals of Math., t. 44, 1943, p. 716-808.

c. Facteurs. – Le centre $M^{\natural}$ de M contient toujours les opérateurs scalaires. S'il ne contient rien d'autre, M est appelé facteur. Exemple de facteur : $M = \mathfrak{B}$. Dans toute la suite, M est un facteur. La classification des facteurs et la dimension s'obtiennent en étudiant les projecteurs de M. Au lieu de projecteurs, on considérera le plus souvent les variétés (sous-entendu : linéaires fermées) correspondantes. Toutes les variétés considérées sont implicitement supposées correspondre à des projecteurs de M.

d. Le facteur $\mathfrak{B}$. – Pour toute variété $\mathfrak{M}$, on sait définir la dimension $D(\mathfrak{M})$ de $\mathfrak{M}$, qui prend les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n$ si H a n dimensions (n peut être infini). La relation $D(\mathfrak{M}) \leq D(\mathfrak{N})$ établit un préordre, $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$; la relation d'équivalence associée, notée $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$, est $D(\mathfrak{M}) = D(\mathfrak{N})$; l'ensemble quotient σ est totalement ordonné et d'ailleurs isomorphe à l'ensemble $0, 1, 2, \ldots, n$.

Ce préordre peut être défini algébriquement, sans utiliser la dimension: $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ signifie qu'il existe un U tel que $U^* U = P_{\mathfrak{M}}$, $U U^* \leq P_{\mathfrak{N}}$ (ou, si l'on veut, $U U^* P_{\mathfrak{N}} = U U^*$).

2. Classification et dimension.

a. La relation $\prec$. – Soit M un facteur. Pour deux variétés $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, on écrit $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ s'il existe $U \in M_{PI}$ tel que $U^*U = P_{\mathfrak{M}}$, $U U^* \leq P_{\mathfrak{N}}$. L'interprétation géométrique prouve aussitôt qu'on établit ainsi un préordre. Soit $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ la relation d'équivalence associée. ($\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$), et σ l'ensemble quotient, qui est ordonné. Ces notions sont liées algébriquement à M. (Observer, dans toute la suite, l'analogie avec la théorie des puissances, et aussi, parfois, avec la théorie de la mesure).

THÉORÈME 1. – σ est totalement ordonné.

Soient $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ deux variétés, $\mathfrak{M} \neq 0$, $\mathfrak{N} \neq 0$. Les $U(\mathfrak{M})$, où U parcourt M_U, sous-tendent une variété $\mathfrak{M}_1$ invariante par M_U et M'_U ; donc $P_{\mathfrak{M}_1} \in M' \cap M = M^{\natural}$, et, comme $0 \neq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_1 = H$ (car M est un facteur). Donc, remplaçant au besoin $\mathfrak{M}$ par une $U(\mathfrak{M})$ (évidemment, $\mathfrak{M} \sim U(\mathfrak{M})$), on peut supposer $\mathfrak{M}$ non orthogonale à $\mathfrak{N}$. Alors $A = P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} \neq 0$. Appliquant 1.b, il existe $U \in M_{PI}$ de variété initiale $H \ominus \mathfrak{N}_A \subset \mathfrak{N}$, de variété finale $[A(H)] \subset \mathfrak{M}$. On a donc trouvé $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}$, avec $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{N}_1 \neq 0$. On recommence en partant de $\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_1$, ..., et il suffit d'appliquer Zorn.

b. <u>Addition des classes de</u> $\mathfrak{S}$. – Soient x , y , deux éléments de $\mathfrak{S}$, et $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ des variétés représentantes orthogonales (s'il en existe). La classe de $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$ est, on le voit aussitôt, indépendante du choix de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$: notons-la $x + y$. On a une loi de composition, commutative et associative dans la mesure où elle est définie. La classe 0 (contenant la seule variété 0) est élément neutre et plus petit élément de $\mathfrak{S}$.

c. <u>Variétés finies</u>. – Une $\mathfrak{M}$ est dite finie si elle n'est équivalente à aucune variété strictement contenue dans $\mathfrak{M}$ (penser au cas $M = \mathcal{B}$). Si $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ et si $\mathfrak{N}$ est finie, $\mathfrak{M}$ est finie (facile). On peut donc parler des classes finies de $\mathfrak{S}$: soit $\mathfrak{S}'$ leur ensemble, totalement ordonné ($0 \in \mathfrak{S}'$) . On a une loi de composition dans $\mathfrak{S}'$ car :

THÉORÈME 2. – Si $x \in \mathfrak{S}'$ et $y \in \mathfrak{S}'$, $x + y \in \mathfrak{S}'$ (quand $x + y$ existe).

LEMME. – Si $\mathfrak{M}_0$ est infinie, $\mathfrak{M}_0$ contient deux variétés infinies orthogonales.

Car il existe un $U \in M_{PI}$ qui transforme isométriquement $\mathfrak{M}_0$ en $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_0$. Soit $\mathfrak{M}_i = U^i(\mathfrak{M}_0)$, $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{M}_i \ominus \mathfrak{M}_{i-1}$. On a : $\mathfrak{N}_i = U^{i-1}(\mathfrak{N}_1)$, donc $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, ... sont des variétés deux à deux orthogonales et équivalentes contenues dans $\mathfrak{M}_0$, et $\neq 0$. Alors $\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_3 \oplus \mathfrak{N}_5 \dots$ et $\mathfrak{N}_2 \oplus \mathfrak{N}_4 \oplus \mathfrak{N}_6 \dots$ sont les variétés cherchées (facile).

DÉMONSTRATION du théorème. – Soient $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, finies, orthogonales, et $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$. Supposons $\mathfrak{M}$ infinie, donc contenant $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, infinies, orthogonales (lemme). Comparons $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{N}_1$, et soit par exemple $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \prec \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{M}_1$. Alors, "en ajoutant $\mathfrak{N}_1 \ominus (\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M}_2)$" (qui est orthogonale à ces deux variétés), il vient $\mathfrak{N}_1 \prec \mathfrak{N}_1'$, où $\mathfrak{N}_1'$ ne contient aucun vecteur $\neq 0$ orthogonal à $\mathfrak{M}_1$. Le raisonnement fait dans le théorème 1 donne alors $\mathfrak{N}_1' \prec \mathfrak{M}_1$, d'où $\mathfrak{N}_1 \prec \mathfrak{M}_1$, ce qui est absurde ($\mathfrak{M}_1$ finie, $\mathfrak{N}_1$ infinie).

Ceci posé, l'ensemble $\mathfrak{S}'$ possède les propriétés suivantes :

1° Si $x \overset{\prec}{\sim} y$ et si $x + z$, $y + z$ sont définis, on a $x + z \overset{\prec}{\sim} y + z$.

Car soient $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, avec $\mathfrak{M}_3$ orthogonale à $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$, et $\mathfrak{M}_1 \overset{\prec}{\sim} \mathfrak{M}_2$. Soit $U \in M_{PI}$ tel que $U^* U = P_{\mathfrak{M}_1}$, $U U^* \prec P_{\mathfrak{M}_2}$.

U et l'application identique dans $\mathfrak{M}_3$ définissent un $U' \in M_{PI}$ avec

$$U'^* U' = P_{\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_3}, \quad U' U'^* = P_{\mathfrak{M}} < P_{\mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_3},$$

d'où $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_3 \prec \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_3$. $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_3 \sim \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_3$ entraînerait $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_3$, ce qui est absurde ($\mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_3$ est finie par le théorème 2).

2° Si $x \prec y$, il existe z tel que $x + z = y$.

Car soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ finies avec $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$. Il existe $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{N}$ avec $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{N}$ Il suffit de considérer $\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{M}'$ (qui est finie puisque contenue dans $\mathfrak{N}'$).

3° Toute suite croissante d'éléments de $\mathcal{O}'$, majorée par un élément de $\mathcal{O}'$, admet une borne supérieure dans $\mathcal{O}'$.

Car soient $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ avec $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_2 \prec \ldots \prec \mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M}$ est finie. Soient $\mathfrak{M}'_1, \mathfrak{M}'_2, \ldots$, avec $\mathfrak{M}'_1 \subset \mathfrak{M}'_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'_i \sim \mathfrak{M}_i$ (construction par récurrence : $\mathfrak{M}'_1, \mathfrak{M}'_2, \ldots, \mathfrak{M}'_{n-1}$ étant construites, on a $\mathfrak{M}'_{n-1} \prec \mathfrak{M}_n \prec \mathfrak{M}$; il existe $\mathfrak{M}''_{n-1} \subset \mathfrak{M}_n$ avec $\mathfrak{M}'_{n-1} \sim \mathfrak{M}''_{n-1}$; alors, $\mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}''_{n-1} \not\succ \mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}'_{n-1}$ entraînerait, d'après la propriété 1 , $\mathfrak{M}_n \not\succ \mathfrak{M}$; donc $\mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}''_{n-1} \prec \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}'_{n-1}$, de sorte qu'il existe $m_n \sim \mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}''_{n-1}$ avec $m_n \subset \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}'_{n-1}$; alors, on peut poser $\mathfrak{M}'_n = \mathfrak{M}'_{n-1} \oplus m_n$). Soit alors $\mathfrak{N}$ la borne supérieure $\mathfrak{M}'_i$. On a $\mathfrak{M}_i \prec \mathfrak{N}$ pour tout i . D'autre part, si $\mathfrak{M}_i \prec \overline{\mathfrak{M}}$ pour tout i , la construction précédente s'applique, et fournit $\overline{\mathfrak{M}}'_1, \overline{\mathfrak{M}}'_2, \ldots$ avec $\overline{\mathfrak{M}}'_1 \subset \overline{\mathfrak{M}}'_2 \subset \ldots \subset \overline{\mathfrak{M}}$, $\overline{\mathfrak{M}}'_i \sim \mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{M}'_i$. D'où aisément $\mathfrak{N} \prec \overline{\mathfrak{M}}$.

d. <u>Classification et dimension</u>. – Une fonction $\mathfrak{M} \to D(\mathfrak{M})$, définie pour les $\mathfrak{M}$ finies, est appelée dimension si :

1) $0 \leq D(\mathfrak{M}) < +\infty$; $D(\mathfrak{M}) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{M} = 0$.
2) $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N} \Leftrightarrow D(\mathfrak{M}) < D(\mathfrak{N})$.
3) $D(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) = D(\mathfrak{M}) + D(\mathfrak{N})$ si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont orthogonales.

Chercher une dimension revient à chercher une application D' de $\mathcal{O}'$ dans $[0, +\infty[$, strictement croissante, telle que $D'(x + y) = D'(x) + D'(y)$ quand $x + y$ est défini. Or, les conditions d'application de BOURBAKI ([1] , paragraphe 2 , proposition 2) sont remplies, mis à part les points suivants :

1°) Sur les conditions de définition de la loi $x + y$, on peut dire ceci : si $x + y$ est défini, si $x' \prec x$ et si $y' \prec y$, $x' + y'$ est défini. Ceci, avec de minimes modifications, permet de définir la dimension de <u>tout</u> élément de $\mathcal{O}'$.

2°) L'ensemble des éléments $\overset{>}{\not\sim} 0$ de $\mathcal{O}'$ peut être vide. C'est le cas où il n'y a pas de variétés finies $\neq 0$. On dit alors que M est dans le cas III ou purement infini (ou intraitable : pour prouver l'existence du cas III, il faut 60 pages). La question de dimension ne se pose pas (on peut d'ailleurs prouver que, si H est séparable, $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ dès que $\mathfrak{M} \neq 0$, $\mathfrak{N} \neq 0$). Ecartons désormais ce cas.

3°) L'ensemble des éléments $\overset{>}{\not\sim} 0$ de $\mathcal{O}'$ contient-il un plus petit élément ? Si oui, une variété correspondante est dite minimale, et M est dit dans le cas I ou discret. Sinon, on est dans le cas II, ou continu.

Si on est dans le cas II, BOURBAKI ([1] , paragraphe 2 , proposition 2) prouve le

THÉORÈME 3. - <u>Il existe une dimension</u> D <u>et une seule à un facteur constant près</u>.

De plus, $D(\mathfrak{M})$ parcourt un intervalle d'origine 0 . Si H est finie, la classe de H est le plus grand élément de $\mathcal{O}$, $D(\mathfrak{M})$ parcourt un intervalle $[0 , a]$, $a < +\infty$, qu'on peut normaliser à $[0 , 1]$, ce qui détermine D : c'est le cas dit II_1 . Si H est infinie, montrons que la loi $x + y$ dans $\mathcal{O}'$ est toujours définie : si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont finies, $H \ominus \mathfrak{M}$ est infinie (sinon $H = \mathfrak{M} \oplus (H \ominus \mathfrak{M})$ est finie : théorème 2), donc $\mathfrak{N} \prec H \ominus \mathfrak{M}$, donc il existe $\mathfrak{N}' \sim \mathfrak{N}$ avec $\mathfrak{N}' \subset H \ominus \mathfrak{M}$, c'est-à-dire $\mathfrak{N}'$ orthogonale à $\mathfrak{M}$. Ceci posé, soit $x \in \mathcal{O}'$, $x \neq 0$; nx est défini pour tout entier $n \geqslant 0$, donc $D(\mathfrak{M})$ parcourt $[0 , +\infty[$ (pas de normalisation possible) : c'est le cas dit II_∞ .

On a même ([1]) le sous-produit suivant : si $\mathfrak{M}$ finie est la borne supérieure d'une suite croissante $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... , on a $D(\mathfrak{M}_i) \to D(\mathfrak{M})$.

e. <u>Facteurs discrets</u>. - L'existence d'une dimension va résulter de faits précis sur la structure.

Soit $\mathfrak{M}_1$ une variété minimale : Si $H \ominus \mathfrak{M}_1 \overset{<}{\not\sim} \mathfrak{M}_1$, on a $H \ominus \mathfrak{M}_1 = 0$. Sinon, il existe une $\mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}_1$ (donc $\mathfrak{M}_2$ minimale) dans $H \ominus \mathfrak{M}_1$. On recommence dans $H \ominus (\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2)$. Par ZORN, on obtient un système $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$ de variétés minimales deux à deux orthogonales, sous-tendant H . La démonstration prouve même l'existence de $U_i \in M_{PI}$ admettant $\mathfrak{M}_1$ pour variété initiale et $\mathfrak{M}_i$ pour variété finale.

Si $A \in M$, self-adjoint, vérifie $A = AP_{\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}_1} A$, les projecteurs spectraux de A vérifient les mêmes relations, dont sont $\leq P_{\mathfrak{M}_1}$, donc sont égaux à 0

ou 1 puisque $\mathfrak{M}_1$ est minimale. Donc $A = \lambda P_{\mathfrak{M}_1}$. Ceci s'étend à $A \in M$ quelconque en prenant les parties hermitienne et anti-hermitienne de A.

Ceci posé, soit $A \in M$ quelconque. Pour $i \in I$, $j \in J$, $U_j^* A U_i$ s'annule dans $H \ominus \mathfrak{M}_1$ et applique $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_1$, donc $U_j^* A U_i = a_{ij} P_{\mathfrak{M}_1}$. On vérifie aisément que la correspondance $A \rightleftarrows \| a_{ij} \|$ est un $*$-isomorphisme (donc respectant la norme) de M sur l'ensemble des endomorphismes continus d'un espace de Hilbert convenable H'. La dimension de H' est alors bien déterminée (facile, au moins si H est séparable). Si cette dimension est n, on est dans le cas dit I_n. On retombe sur l'étude de $\mathcal{B}$ faite dans 1d, et l'existence, l'unicité et les propriétés de la dimension sont alors triviales. $D(\mathfrak{M})$, convenablement normalisée, prend les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n$ dans le cas I_n, n fini, et les valeurs $0, 1, 2, \ldots$ dans le cas I_∞. Enonçons le

THÉORÈME 4. - <u>Un facteur discret est isomorphe à l'anneau de tous les opérateurs continus d'un espace de Hilbert convenable.</u>

On groupe les cas I_n $(n < +\infty)$ et II_1 sous le nom de cas finis : ils se caractérisent par : H finie. Les cas I_∞, II_∞, III s'appellent cas infinis. Dans le cas I_n, $n < +\infty$, on peut normaliser la dimension de telle sorte qu'elle prenne les valeurs $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$; ceci facilite le rapprochement avec le cas II_1, qui, à de nombreux égards, apparaît comme une généralisation plus satisfaisante que le cas I_∞ de l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel à n dimensions.

Bien noter que toutes les classifications sont basées sur des caractères purement algébriques.

3. <u>Trace</u>.

H étant à n dimensions, $n < +\infty$, considérons le facteur $\mathcal{B}$. Si $A \in \mathcal{B}$, la trace $T(A)$ de A est $\sum_{i=1}^{n} (Ae_i, e_i)$, où (e_i) est un système orthonormal complet quelconque. Si A est un projecteur $P_{\mathfrak{M}}$, prenons $e_1, e_2, \ldots, e_p$ dans $\mathfrak{M}$, $e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n$ orthogonaux à $\mathfrak{M}$. On trouve alors : $T(A) = p = D(\mathfrak{M})$. La trace généralise donc la dimension. Posant $t(A) = \frac{1}{n} T(A)$, t a les propriétés suivantes (qu'on prouve facilement être caractéristiques) : $t(1) = 1$, t est linéaire, $t(AB) = t(BA)$. De plus, $t(A^*) = \overline{t(A)}$, $t(A) \geq 0$ si A est self-adjoint ≥ 0.

Quand H a ∞ dimensions, $\sum (Ae_i , e_i)$ ne converge pas toujours, de sorte qu'on ne sait définir la trace que pour certains opérateurs. Pour généraliser la notion de trace, on va donc, ici, se limiter aux facteurs de classe finie. Comme les cas I_n , $n < +\infty$, sont réglés par ce qui précède, on a seulement à étudier le cas II_1 .

Pour $A \in M$, soit K_A l'ensemble convexe engendré par les $U A U^{-1}$, où U parcourt M_U , c'est-à-dire l'ensemble des $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1}$ ($\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $U_i \in M_U$) ; soit K'_A l'adhérence de K_A pour la topologie uniforme. Alors, quel que soit M ,

THÉORÈME 5. – $K'_A \cap M^\natural$ <u>est non vide</u>.

Car soit $A \in M$, A self-adjoint, $0 \leqslant A \leq 1$. Soit $(\mathfrak{M}_\lambda)$ la famille des variétés spectrales de A : $\mathfrak{M}_0 = 0$, $\mathfrak{M}_1 = H$. Comparons $\mathfrak{M}_{1/2}$ et $H \ominus \mathfrak{M}_{1/2}$. Si par exemple $\mathfrak{M}_{1/2} \prec H \ominus \mathfrak{M}_{1/2}$, il existe deux variétés $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, orthogonales complémentaires dans $H \ominus \mathfrak{M}_{1/2}$, et un $V \in M$ qui applique isométriquement $\mathfrak{M}_{1/2}$ sur $\mathfrak{M}$. En posant $Ux = Vx \in \mathfrak{M}$ pour $x \in \mathfrak{M}_{1/2}$, $Ux = V^{-1} x \in \mathfrak{M}_{1/2}$ pour $x \in \mathfrak{M}$, $Ux = x$ pour $x \in \mathfrak{M}'$, et en prolongeant à H par linéarité, on a un $U \in M_U$ tel que $U(\mathfrak{M}_{1/2}) = \mathfrak{M}$, $U(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_{1/2}$, $U(\mathfrak{M}') = \mathfrak{M}'$. On a :

$$\frac{1}{2}(P_{\mathfrak{M}} + P_{\mathfrak{M}'}) \leqslant A \leqslant \frac{1}{2} P_{\mathfrak{M}_{1/2}} + P_{\mathfrak{M}} + P_{\mathfrak{M}'}$$

donc

$$\frac{1}{2}(P_{\mathfrak{M}_{1/2}} + P_{\mathfrak{M}'}) \leqslant U A U^{-1} \leqslant \frac{1}{2} P_{\mathfrak{M}} + P_{\mathfrak{M}_{1/2}} + P_{\mathfrak{M}'}$$

et, ajoutant membre à membre,

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}(P_{\mathfrak{M}} + P_{\mathfrak{M}_{1/2}}) + \frac{1}{2} P_{\mathfrak{M}'} \leqslant \frac{1}{2}(1 + U A U^{-1}) \leqslant \frac{3}{4}(P_{\mathfrak{M}} + P_{\mathfrak{M}_{1/2}}) + P_{\mathfrak{M}'} \leqslant 1 .$$

Donc, plus généralement, si $A \in M$ est self-adjoint, de maximum M_A , de minimum m_A , on peut trouver $A_1 \in K_A$ tel que $M_{A_1} - m_{A_1} \leqslant \frac{3}{4}(M_A - m_A)$. On recommence avec A_1 . Par récurrence, on trouve $A_n \in K_{A_{n-1}} \subset K_{A_{n-2}} \dots \subset K_A$ tel que $M_{A_n} - m_{A_n} \leqslant (\frac{3}{4})^n (M_A - m_A)$. Cet opérateur est distant de $M_{A_n} . 1$ de moins de $(\frac{3}{4})^n (M_A - m_A)$. Donc, pour tout entier p , existe un nombre λ_p tel que $\lambda_p . 1$

soit distant de K_A de moins de $\frac{1}{p}$, et tel que $|\lambda_p| \leqslant M_A$. Faisant converger λ_p par compacité, le théorème est démontré, pour A self-adjoint. Il est facile de passer au cas général, mais on n'en aura pas besoin.

THÉORÈME 6. - Si M est de classe finie, $K_A \cap M^{\natural}$ se réduit à un point.

DÉFINITION. - Soit $f \in H$, avec $\|f\| = 1$, fixé une fois pour toutes. Soit θ réel ; on écrit $\mathfrak{M} > \theta$ si $(P_{\mathfrak{M}} f, f) > \theta D(\mathfrak{M})$, et $\mathfrak{M} >_p \theta$ si $\mathfrak{N} > \theta$ pour toute $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. On définit de façon analogue les relations $<$, $<_p$, $\geqslant$, $\geqslant_p$, $\leqslant$, $\leqslant_p$.

LEMME a. - Si $\mathfrak{M} \geqslant \lambda$, il existe une $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ avec $\mathfrak{N} \geqslant_p \lambda$.

En effet, supposons le lemme inexact. Pour toute $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$ existe une $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$ avec $(P_{\mathfrak{M}_2} f, f) < \lambda D(\mathfrak{M}_2)$. On recommence dans $\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}_2$. Par ZORN, on a une famille $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$ de variétés deux à deux orthogonales, sous-tendant $\mathfrak{M}$, avec $(P_{\mathfrak{M}_i} f, f) < \lambda D(\mathfrak{M}_i)$ pour $i \in I$. Ajoutant membre à membre, $(P_{\mathfrak{M}} f, f) < \lambda D(\mathfrak{M})$: absurdité.

LEMME b. - Pour tout $\varepsilon > 0$ existe une $\mathfrak{M}_\varepsilon$ et un $\lambda (1 \leq \lambda < +\infty)$ tels que $\lambda \leqslant_p \mathfrak{M}_\varepsilon \leqslant_p \lambda + \varepsilon$.

Car on a $H \geqslant 1$, donc $\mathfrak{M} \geqslant_p 1$ pour une $\mathfrak{M}$ (lemme a). Soit λ la borne supérieure des θ tels que $\mathfrak{M} \geqslant_p \theta$. On a aussitôt $1 \leqslant \lambda < +\infty$ et $\mathfrak{M} \geqslant_p \lambda$. Pour tout $\varepsilon > 0$, existe une $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ avec $\mathfrak{M}' \leqslant \lambda + \varepsilon$ donc une $\mathfrak{M}_\varepsilon \subset \mathfrak{M}'$ avec $\mathfrak{M}_\varepsilon \leqslant_p \lambda + \varepsilon$ (lemme a). Comme $\mathfrak{M}_\varepsilon \subset \mathfrak{M}$, on a aussi $\mathfrak{M}_\varepsilon \geqslant_p \lambda$.

LEMME c. - Soit $A \in M$ tel que $A = AP_{\mathfrak{M}_\varepsilon} = P_{\mathfrak{M}_\varepsilon} A$. On a $\|Af\|^2 \leq (1 + \varepsilon) \|A^* f\|^2$.

En effet, on peut raisonner dans l'espace $\mathfrak{M}_\varepsilon$. On a $A = UB$, avec B self-adjoint $\geqslant 0$, et U de variété initiale $[B(H)]$, de variété finale $[A(H)]$. Alors

$$\|Af\|^2 = (Af, Af) = (A^* Af, f) = (BU^* UBf, f) = (B^2 f, f)$$

$$\|A^* f\|^2 = (A^* f, A^* f) = (AA^* f, f) = (UBBU^* f, f) = (UB^2 U^* f, f)$$

B^2 est limite uniforme d'opérateurs $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\mathfrak{M}_i}$, avec $\lambda_i \geqslant 0$,

$$\mathfrak{M}_{i_n} \subset [B(H)] \subset \mathfrak{M}_\varepsilon .$$

$UB^2 U^*$ est limite uniforme de $U(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\mathfrak{M}_i})U^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{U(\mathfrak{M}_i)}$. Or $\mathfrak{M}_i \sim U(\mathfrak{M}_i)$, donc

$$(P_{\mathfrak{M}_i} f , f) = (\lambda+\varepsilon)\, D(\mathfrak{M}_i) = (\lambda+\varepsilon)\, D(U(\mathfrak{M}_i))$$
$$\leqslant \frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda} (P_{U(\mathfrak{M}_i)} f , f) \leqslant (1+\varepsilon)(P_{U(\mathfrak{M}_i)} f , f) ,$$

donc

$$\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\mathfrak{M}_i}\Big) f , f\Big) \leqslant (1+\varepsilon)\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{U(\mathfrak{M}_i)}\Big) f , f\Big)$$

et à la limite $(B^2 f , f) \leqslant (1+\varepsilon)(UB^2 U^* f , f)$. D'où, le lemme.

LEMME d. – Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des vecteurs unitaires $f_1 , f_2 , \ldots , f_n$ tels que, pour tout A self-adjoint $\geqslant 0$ de M et tout $U \in M_U$, on ait

$$\sum_{i=1}^{n} (Af_i , f_i) \leqslant (1+\varepsilon) \sum_{i=1}^{n} (U AU^{-1} f_i , f_i) .$$

En effet, reprenons la variété $\mathfrak{M}_\varepsilon$. En la diminuant au besoin, on peut la supposer de dimension n^{-1}, n entier. Alors il existe des variétés $\mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_2 , \ldots , \mathfrak{M}_n$, deux à deux orthogonales, sous-tendant H, avec $\mathfrak{M}_\varepsilon = \mathfrak{M}_1$, et des $U_i \in M_{PI}$ de variété initiale $\mathfrak{M}_1$ et de variété finale $\mathfrak{M}_i$. Soit $f_i' = U_i f$. Soient $B = A^{1/2}$, $C = UB$, $C_{ij} = U_j^* CU_i$. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} (Af_i' , f_i') = \sum_{i=1}^{n} (B^2 f_i' , f_i') = \sum_{i=1}^{n} \|Bf_i'\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|Cf_i'\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|CU_i f\|^2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \|P_{\mathfrak{M}_j} CU_i f\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \|U_j^* CU_i f\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \|C_{ij} f\|^2 .$$

On trouve de même

$$\sum_{i=1}^{n} (U AU^{-1} f_i' , f_i') = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \|C_{ij}^* f\|^2 .$$

Or, $P_{\mathfrak{M}_\varepsilon} C_{ij} = C_{ij} P_{\mathfrak{M}_\varepsilon} = C_{ij}$. On peut appliquer le lemme c, puis remplacer les f_i' par les $f_i = \|f_i'\|^{-1} f_i'$, qui sont unitaires (noter que $\|f_i'\| = \|P_{\mathfrak{M}_\varepsilon} f\| \neq 0$, car $n^{-1} = D(\mathfrak{M}_\varepsilon) \leqslant \lambda^{-1} (P_{\mathfrak{M}_\varepsilon} f , f))$.

DÉMONSTRATION du théorème. – On le prouvera seulement pour A self-adjoint, et on peut supposer $0 \leqslant A \leqslant 1$. Soient $\lambda_1 . 1 \in K_A' \cap M^\natural$, $\lambda_2 . 1 \in K_A' \cap M^\natural$. Posons, avec les notations du lemme d, $\varphi(B) = \sum^{n} (Bf_i , f_i)$ pour $B \in M$. Le lemme d prouve que $(1+\varepsilon)^{-1} \varphi(A) \leqslant \varphi(B) \leqslant (1+\varepsilon)\, \varphi(A)$ pour tout B de la forme $U\,AU^{-1}$ $(U \in M_U)$, donc pour tout $B \in K_A$, donc pour tout $B \in K'_A$. Appliquant ceci à $\lambda_1.1$ et $\lambda_2.1$, on trouve :

$$(1+\varepsilon)^{-1}\,\varphi(A) \leq n\,\lambda_i \leq (1+\varepsilon)\,\varphi(A)$$

d'où $(\lambda_1 - \lambda_2) \leq \frac{2\varepsilon}{n}\,\varphi(A)$, et, comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Le théorème 6 fournit une application de l'ensemble des opérateurs self-adjoints de M dans $M^{\natural}$, donc une fonctionnelle $A \longrightarrow t(A)$. Il est immédiat que $t(1) = 1$, que $t(U\,AU^{-1}) = t(A)$ pour $U \in M_U$, que $t(A) \geqslant 0$ pour $A \geqslant 0$, que $t(\lambda A) = \lambda\, t(A)$. Enfin, soient $A \in M$, $A' \in M$, A et A' self-adjoints.

On peut trouver des $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, des $U_i \in M_U$, avec, en posant

$$A_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, U_i\, AU_i^{-1}, \quad \| A_1 - t(A).1 \| \leqslant \varepsilon .$$

Soit $A'_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, U_i\, A'U_i^{-1}$. On a $A'_1 \in K_{A'}$, donc $t(A'_1) = t(A')$, donc on peut trouver des $\mu_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{p} \mu_j = 1$, des $V_j \in M_U$, avec $\| \sum_{j=1}^{p} \mu_j\, V_j\, A'_1\, V_j^{-1} - t(A').1 \| \leqslant \varepsilon$

En même temps,

$$\| \sum_{j=1}^{p} \mu_j\, V_j\, A_1\, V_j^{-1} - t(A).1 \| \leqslant \varepsilon ,$$

donc

$$\| \sum_{j=1}^{p} \mu_j V_j (A_1 + A'_1) V_j^{-1} - (t(A) + t(A'))1 \| \leqslant 2\varepsilon ,$$

soit

$$\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, \lambda_i\, V_j\, U_i (A + A')(V_j\, U_i)^{-1} - (t(A) + t(A'))\, 1 \| \leqslant 2\varepsilon ,$$

d'où $t(A + A') = t(A) + t(A')$.

Posant alors, pour $A = A_1 + iA_2 \in M$ $(A_1$, A_2 self-adjoints), $t(A) = t(A_1) + it(A_2)$, la fonctionnelle $t(A)$, <u>ou trace de</u> A , possède les propriétés suivantes :

1) $t(1) = 1$
2) t est linéaire.
3) $t(A) \geqslant 0$ si A est self-adjoint $\geqslant 0$.
4) $t(AB) = t(BA)$. En effet, $t(U\,AU^{-1}) = t(A)$ pour $U \in M_U$, d'où, remplaçant A par AU , $t(UA) = t(AU)$. Se rappeler alors que tout $B \in M$ est combinaison linéaire d'éléments de M_U .

Ces propriétés sont caractéristiques. - Car soit t' une fonctionnelle les possédant, et $A \in M$, A self-adjoint. On a $t'(U A U^{-1}) = t'(A U^{-1} U) = t'(A)$ pour $U \in M_U$, donc $t'(B) = t'(A)$ pour $B \in K_A$, et par suite (à cause de la propriété 3, qui entraîne la continuité de t' pour la topologie uniforme), pour $B \in K'_A$. Donc $t'(A) = t'(t(A).1) = t(A)\, t'(1) = t(A)$. On passe au cas A quelconque par linéarité.

Trace et dimension. - Restreinte aux projecteurs de M, la trace fournit une fonction $D_1(\mathfrak{M})$ qui possède les propriétés suivantes :

$$0 = D_1(0) \leqslant D_1(\mathfrak{M}) \leqslant D_1(H) = 1 \quad ;$$

$$D_1(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) = t(P_{\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}}) = t(P_{\mathfrak{M}} + P_{\mathfrak{N}}) = D_1(\mathfrak{M}) + D_1(\mathfrak{N})$$

si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont orthogonales ; si $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$, on a $P_{\mathfrak{M}} = U^* U$, $P_{\mathfrak{N}} \geqslant U U^*$, donc $D_1(\mathfrak{M}) = t(P_{\mathfrak{M}}) = t(U^* U) = t(U U^*) \leqslant t(P_{\mathfrak{N}}) = D_1(\mathfrak{N})$. Pour prouver que D_1 est la dimension (donc que la trace prolonge la dimension), il suffit de prouver que $\mathfrak{M}_1 \neq 0$ entraîne $D_1(\mathfrak{M}_1) = t(P_{\mathfrak{M}_1}) \neq 0$; en restreignant au besoin $\mathfrak{M}_1$, on peut supposer $\mathfrak{M}_1$ de dimension n^{-1}, donc qu'il existe $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_n$, deux à deux orthogonales, sous-tendant H, avec $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2 \sim \dots \sim \mathfrak{M}_n$. Alors

$$1 = t(1) = t(P_{\mathfrak{M}_1} + P_{\mathfrak{M}_2} + \dots + P_{\mathfrak{M}_n}) = n\, t(P_{\mathfrak{M}_1}) \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Les structures fondamentales de l'analyse, Livre 3 : Topologie générale, Chapitres 5 à 8. - Paris, Hermann, 1947 (Act. scient. et ind. n° 1029, Eléments de mathématique 5).