LAURENT SCHWARTZ

Sur un mémoire de Kodaira : « Harmonic fields in riemannian manifolds (generalized potential theory) », I

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 26, p. 177-195

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__177_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1950)

SUR UN MÉMOIRE DE KODAIRA : "HARMONIC FIELDS IN RIEMANNIAN MANIFOLDS (GENERALIZED POTENTIAL THEORY)", I. ([1])

par Laurent SCHWARTZ

1. Préliminaires sur la théorie des noyaux.

1. Noyaux distributions.

Soient X^m, Y^n, 2 espaces vectoriels réels de dim m et n ; $x \in X^m$, $y \in Y^n$. Un noyau $K_{x,y}$ est une distribution sur $X^m \times Y^n$. Un tel noyau définit

a. une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})_{x,y}$;

$$\varphi(x , y) \to K(\varphi) \tag{1}$$

b. une forme bilinéaire séparément continue sur $(\mathcal{D})_x \times (\mathcal{D})_y$,

$$(u(x) , v(y)) \to K(u(x) v(y)) \tag{2}$$

c. une application linéaire continue, que nous appellerons $\mathcal{L}(K)$, de $(\mathcal{D})_y$ dans $(\mathcal{D}')_x$, notée

$$\begin{cases} v(y) \to \mathcal{L}(K) (v) \quad \text{avec} \\ [\mathcal{L}(K) (v)] (u(x)) = K(u(x) v(y)) \end{cases} \tag{3}$$

d. une application linéaire continue, que nous appelerons ${}^t\mathcal{L}(K)$, de $(\mathcal{D})_x$ dans $(\mathcal{D}')_y$, notée par

$$\begin{cases} u(x) \to {}^t\mathcal{L} (K) (u) \quad \text{avec} \\ [{}^t\mathcal{L} (K) (u)] (v(y)) = K(u(x) v(y)) \end{cases} \tag{4}$$

Les applications linéaires $\mathcal{L}(K)$ et ${}^t\mathcal{L}(K)$ sont alors visiblement transposées l'une de l'autre. Lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre, on pourra, pour $v \in (\mathcal{D})_y$, remplacer $\mathcal{L}(K) (v)$ par $K \cdot v \in (\mathcal{D}')_x$. Réciproquement :

([1]) Le présent exposé s'éloigne assez considérablement de KODAIRA. Aussi bien le mémoire de KODAIRA [1] que l'exposé présenté ici sont aujourd'hui devenus "archaïques" et n'ont plus intérêt à être consultés, sauf pour des points très particuliers. On consultera plutôt, pour des démonstrations récentes : [2], [4], [6] et [7].

[Juillet 1958]

THÉORÈME 1 (dit Théorème des noyaux). – Toute application bilinéaire séparément continue sur $(\mathcal{D})_x \times (\mathcal{D})_y$, et toute application linéaire continue de $(\mathcal{D})_y$ dans $(\mathcal{D}')_x$ faible, peuvent être définies par un noyau $K_{x,y}$, qui est alors unique [2].

Dans la suite, on supposera $m = n$ et $X^n = Y^n = R^n$. Lorsqu'une seule variable interviendra, elle sera notée x ; un noyau sera noté $K = K_{x,\xi}$. A ce noyau on peut alors associer son symétrique ${}^sK$, défini par

$$(5) \qquad {}^sK(\varphi(x, \xi)) = K(\varphi(\xi, x))$$

alors visiblement

$$(6) \qquad {}^t\mathcal{L}(K) = \mathcal{L}({}^sK)$$

Mais pour une distribution $T \in (\mathcal{E}')$, nous pouvons noter par $\int T = \int T_x\, dx$ le nombre $T(1)$.

Alors on pourra aussi écrire, comme $T\varphi \in (\mathcal{E}')$

$$T(\varphi(x)) = \int T\varphi$$

De même si $K_{x,y}$ est une distribution sur $X^m \times Y^n$, dont le support ait une projection relativement compacte sur Y^n, on peut représenter par $\int_y K_{x,y}\, dy$ la distribution $K\cdot 1$, alors on aura

$$K_{x,y}\cdot v(y) = \int K_{x,y}\, v(y)\, dy .$$

2. Exemples.

$$(7) \qquad \begin{cases} K_{x,\xi} = I_{x,\xi} \quad , \text{ avec } \quad I[\varphi(x, \xi)] = \int \varphi(x, x)\, dx \\ \qquad I\cdot\varphi = \varphi \quad \text{(identité)} \\ {}^sI = I \qquad \text{(} I \text{ est un noyau symétrique)} \end{cases}$$

Ce noyau est souvent noté $\delta_{x-\xi}$.

$$(8) \qquad \begin{cases} K_{x,\xi} = A_x\, I_{x,\xi} = A_\xi\, I_{x,\xi} \qquad \text{(avec } \quad A \in (\mathcal{O}')\text{) , ou} \\ K[\varphi(x, \xi)] = \int A_x\, \varphi(x, x)\, dx \\ K\cdot\varphi = \varphi A \quad \text{(multiplication par } A\text{)} \\ {}^sK = K \quad \text{(} K \text{ est un noyau symétrique)} \end{cases}$$

(2) Nous avons publié la démonstration de ce théorème dans [5], p. 143.

(9)
$$\begin{cases} K_{x,\xi} = A_{x-\xi} \;, & \text{(avec } A \in (\mathcal{D}')\text{) , ou} \\ K[\varphi(x\,,\,\xi\,)] = \int A_x \left(\int \varphi(x+\xi\,,\,\xi)\, d\xi \right) dx & \\ K^{\bullet} \varphi = A * \varphi \quad \text{(composition avec } A\text{)} & \\ {}^{s}K \text{ s'obtient en remplaçant } A \text{ par } \check{A}\,. & \end{cases}$$

(10)
Cas particulier de (9), si $A = D^p \delta$, polynôme de dérivation d'indice p. Alors

$$K^{\bullet} \varphi = D^p \varphi \quad \text{(dérivation) ; pour } p = 0\,,\ K = I$$

${}^{s}K = (-1)^{|p|} K$, K est symétrique ou antisymétrique.

En comprenant (8) et (10), on a les opérateurs différentiels généraux ; ${}^{s}K$ est alors l'opérateur différentiel "adjoint" de K.

(11)
$$\begin{cases} K_{x,\xi} = K(x\,,\,\xi\,)\,, \text{ fonction} \\ \iint K_{x,\xi}\ \varphi(x\,,\,\xi\,)\, dx\, d\xi = \int_x \int_\xi K(x\,,\,\xi\,)\, \varphi(x\,,\,\xi\,)\, dx\, d\xi\,, \ \text{intégrale usuelle.} \\ K^{\bullet}\varphi = \int K(x\,,\,\xi\,)\, \varphi(\xi)\, d\xi\,, \ \text{intégrale usuelle.} \\ {}^{s}K(x\,,\,\xi\,) = K(\xi\,,\,x) \end{cases}$$

3. <u>Prolongement de l'application</u> $\mathcal{L}(K)$

Soit $\mathfrak{F}$ une famille d'espaces vectoriels topologiques $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ..., ayant les propriétés suivantes :

a. $(\mathcal{D}) \subset \mathfrak{A} \subset (\mathcal{D}')$; les applications identiques de $(\mathcal{D})$ dans $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{A}$ dans $(\mathcal{D}')$ faible sont continues ;

b. les duals faibles $\mathfrak{A}'$ sont dans $\mathfrak{F}$;

c. dans l'intersection de 2 espaces de la famille $\mathfrak{F}$, avec la topologie borne supérieure, $(\mathcal{D})$ est dense. $\mathfrak{F}$ est la famille de tous les bons espaces de fonctions ou de distributions rencontrés dans la pratique (L^∞ et les analogues ayant la topologie faible).

Il se peut alors que l'application $\mathcal{L}(K)$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$. Le prolongement est alors unique.

Réciproquement toute application linéaire continue de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ est le prolongement d'une $\mathcal{L}(K)$, qui est unique. On dira dans ce cas que K est un noyau $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$. Alors ${}^sK$ est un noyau $(\mathcal{B}' \to \mathcal{A}')$ ($\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ ayant la topologie faible). Ainsi, dans (7), I est un noyau $(\mathcal{A} \to \mathcal{A})$ quel que soit $\mathcal{A}$, etc.

Exemple de la transformation de Fourier :

$$K(x, \xi) = \exp(-2i\pi x.\xi), \quad {}^sK = K .$$

K est un noyau $((\mathcal{S}) \to (\mathcal{S}))$ comme le montrent les résultats classiques ; alors K est aussi un noyau $((\mathcal{S}') \to (\mathcal{S}'))$, d'où la transformation de Fourier des distributions tempérées.

4. Produit de composition de Volterra.

$H_{x,\xi}$ et $K_{x,\xi}$ sont dits composables dans l'ordre indiqué, s'il existe 3 espaces $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, de la famille $\mathcal{F}$, tels que K soit $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, et que H soit $(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$.

On définit alors le composé $H \circ K$ par

$$\mathcal{L}(H \circ K) = \mathcal{L}(H) \circ \mathcal{L}(K) \tag{12}$$

et

$$H \circ K \text{ est } (\mathcal{A} \to \mathcal{C}) .$$

L'existence de $H \circ K$ suppose l'existence de la séquence $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, mais le composé $H \circ K$ est indépendant de cette séquence. On peut toujours prendre $\mathcal{A} = (\mathcal{D})$, $\mathcal{C} = (\mathcal{D}')$ faible.

Si $H \circ K$ existe, ${}^sK \circ {}^sH$ existe et

$$^s(H \circ K) = {}^sK \circ {}^sH \tag{13}$$

Si H et K sont deux fonctions assez régulières, $H \circ K$ est défini s'il existe par

$$(H \circ K)(x, \xi) = \int_\tau H(x, \tau) K(\tau, \xi)\, d\tau \tag{14}$$

Dans (8) on aura ainsi la multiplication des distributions, dans (9) leur composition (quand elles existent).

De même un produit $H \circ K \circ L$ se définit directement, avec une séquence d'espaces $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. S'il existe, $H \circ K$ et $K \circ L$ existent, et le produit est associatif.

5. Noyaux compacts, réguliers, etc.

On a les équivalences suivantes :

1° $K = ((\mathcal{D}) \to (\mathcal{E}')) \Leftrightarrow$ l'intersection du support de K avec toute bande $\xi \in \Lambda$ (Λ compact) est un compact dans $R^n \times R^n$.

DÉFINITION. - K = noyau compact, si $K = \begin{cases} (\mathcal{D}) \to (\mathcal{E}') \\ (\mathcal{E}) \to (\mathcal{D}') \end{cases}$

Alors ${}^sK$ est compact.

2° $K = ((\mathcal{E}) \to (\mathcal{E}')) \Leftrightarrow$ support de K est compact dans $R^n \times R^n$.

DÉFINITION. - K = noyau compactifiant, s'il est $((\mathcal{E}) \to (\mathcal{E}'))$.

Alors ${}^sK$ est compactifiant.

3° $K = ((\mathcal{D}) \to (\mathcal{E})) \Leftrightarrow$ il existe une distribution $[K(x)]_\xi$ de la variable ξ, dépendant de manière indéfiniment différentiable du paramètre x, telle que

$$(15)\quad \begin{cases} \displaystyle\iint K_{x,\xi}\,\varphi(x,\xi)\,dx\,d\xi = \int \Big[\int (K(x))_\xi\,\varphi(x,\xi)\,d\xi\Big]\,dx \\ \displaystyle\int K_{x,\xi}\,\varphi(\xi)\,d\xi = \int (K(x))_\xi\,\varphi(\xi)\,d\xi \end{cases}$$

DÉFINITION. - K = noyau régulier $\Leftrightarrow K = \begin{cases} (\mathcal{D}) \to (\mathcal{E}) \\ (\mathcal{E}') \to (\mathcal{D}') \end{cases}$

Alors ${}^sK$ est régulier. Si K est régulier compact, alors

$$K = ((\mathcal{D}) \to (\mathcal{D}))\,,\quad ((\mathcal{E}) \to (\mathcal{E}))\,,\quad ((\mathcal{E}') \to (\mathcal{E}'))\,,\quad ((\mathcal{D}') \to (\mathcal{D}'))\,.$$

REMARQUE. - Si K est régulier,

(16) $\begin{cases} \displaystyle\int [K(x)]_\xi\, v(\xi)\,d\xi = \text{fonction de } x \text{ et } v\text{, indéfinement dérivable en } x\text{, linéaire continue en } v. \\ \displaystyle\int K_x(\xi)\,u(x)\,dx = \text{fonction de } u \text{ et } \xi\text{, linéaire continue en } u\text{, indéfiniment dérivable en } \xi\,; \end{cases}$

mais en général il n'y a pas de fonction $K(x, \xi)$.

Ce "principe d'incertitude" s'étend à d'autres propriétés des noyaux (3).

---

(3) Toutes ces propriétés de régularité et de compacité, ainsi que la composition de Volterra, sont abondamment développées dans [8].

EXEMPLES. - $I_{x,\xi}$ (7) est régulier compact, ainsi que tout opérateur différentiel (10) à coefficients dans $(\mathcal{E})$. Alors $(I(x))_\xi$ est la masse + 1 , un point x ,considérée comme distribution en ξ . $A_{x-\xi}$ (9) est régulier (compact si le support de A_x est compact).

4° On appelle ensemble des singularités d'une distribution T l'ensemble fermé complémentaire du plus grand ouvert où T est une fonction indéfiniment dérivable. Le produit multiplicatif ST a toujours un sens si l'ensemble des singularités de S et l'ensemble des singularités de T sont sans point commun.

DÉFINITION. - K = noyau très régulier $\Leftrightarrow$ K est régulier et pour $T \in (\mathcal{E}')$, K•T a son ensemble de singularités contenu dans celui de T .

Condition nécessaire et suffisante :

a. K est régulier ;

b. K est, dans l'ouvert $x \neq \xi$, une fonction indéfiniment dérivable en x et ξ .

EXEMPLE. - I et les opérateurs différentiels réguliers sont très réguliers.

5° $K = ((\mathcal{E}') \rightarrow (\mathcal{E})) \Leftrightarrow$ K est une fonction indéfiniment dérivable en x et ξ .

DÉFINITION. K = noyau régularisant, s'il est $((\mathcal{E}') \rightarrow (\mathcal{E}))$. Alors ${}^sK$ est **régularisant**.

6° $K = ((\mathcal{D}') \rightarrow (\mathcal{D})) \Leftrightarrow$ K est une fonction $K(x , \xi)$ indéfiniment dérivable à support compact sur $R^n \times R^n$.

DÉFINITION. - K = parfait, si régularisant compactifiant.

Alors ${}^sK$ est parfait.

THÉORÈME 2. - Un produit de composition H o K o L ... a toujours un sens, si tous les noyaux sauf un au plus sont compacts et tous sauf un au plus réguliers.

Si en outre tous sont compacts, (resp. réguliers ou très réguliers) il en est de même du produit. Si, encore en outre, l'un au moins est compactifiant (resp. régularisant), il en est de même du produit.

Si tous les facteurs sont réguliers compacts, l'un au moins compactifiant et l'un au moins régularisant, le produit est parfait.

Si H et L sont parfaits, K quelconque, $H \circ K \circ L$ est parfait. (Voir [8] proposition 35, p. 120).

2. Les distributions sur un espace de Riemann.

Les paragraphes 6, 7, 8, sont donnés pour mémoire, mais inutiles dans la suite.

6. Définition des distributions sur une variété.

V^n est une variété indéfiniment différentiable à m dimensions, orientée. Une forme différentielle usuelle de degré p, ω est une fonction $\omega(x)$, sa valeur en x est une forme extérieure tangente ; c'est donc aussi une fonction $\omega(\chi)$ d'un p-vecteur χ tangent.

L'espace $(\mathcal{D}')$ des distributions-forme différentielles (de degré p ou courants de degré p) est le dual de l'espace $(\mathcal{D})$ des formes différentielles (de degré $n - p$) indéfiniment différentiables à support compact. De même il y a dualité entre $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{E}')$ (4).

EXEMPLES.

1° Une forme différentielle ordinaire ω, de degré p, localement sommable, est dans $(\mathcal{D}')$, avec

$$\omega(\varphi) = \int_{V^n} \omega \wedge \varphi \tag{17}$$

2° Une chaîne singulière (finie ou infinie), Γ, de dimension $n - p$, une fois différentiable, est dans $(\mathcal{D}')$, avec

$$\Gamma(\varphi) = \int_{\Gamma} \varphi \tag{18}$$

3° Un $n - p$ vecteur X, en un point a, est dans $(\mathcal{D}')$, avec

$$X(\varphi) = \langle X , \varphi(a) \rangle \tag{19}$$

(1°) est une forme-fonction, (2°) et (3°) sont des formes-mesures (3°) est une sorte de mesure de Dirac.

7. Multiplication, différentiation extérieure.

1° Pour $\alpha \in (\mathcal{E})$, on posera

(4) On trouvera sur les courants comme sur toute la théorie des formes harmoniques, développées dans la suite, des exposés modernes et complets dans les ouvrages signalés plus haut [2],[4],[6],[7].

(20) $$(T\wedge\alpha)(\varphi) = T(\alpha\wedge\varphi)$$

Alors si $T \in (\mathcal{E}')$ est de degré n , on peut noter $\int T$ la valeur de $T(1)$, de sorte que, dans tous les cas

(21) $$T(\varphi) = \int (T\wedge\varphi)$$

Pour $T = \omega$, on retrouve par (20) le produit extérieur usuel.

2° Nous définirons la différentiation extérieure par

(22) $$dT(\varphi) = (-1)^{p+1}\, T(d\varphi)$$

Alors pour $T = \omega$ (17), on trouve $dT = d\omega$, pour $T = \Gamma$ (18), on trouve (STOKES) $dT = (-1)^{p+1}\, b\,\Gamma$ (bord). On a

(23) $$d(T\wedge\alpha) = dT\wedge\alpha + (-1)^p\, T\wedge d\alpha$$

3° Si θ est une transformation infinitésimale, on posera

(24) $$(\theta\, T)(\varphi) = -\,T(\theta\,\varphi)$$

ce qui, pour $T = \omega$, donne $\theta\, T = \theta\,\omega$ au sens usuel.

On a

(25) $$\begin{cases} d(\theta\, T) = \theta\, dT \\ \theta(T\wedge\alpha) = (\theta\, T)\wedge\alpha + T\wedge(\theta\alpha) \end{cases}$$

8. Homologie, théorèmes de de Rham.

Une forme T est fermée si $dT = 0$, ~ 0 si $T = dS$.

THÉORÈME 3 (de RHAM). - L'homologie définie par l'opération d est isomorphe à l'homologie usuelle de la variété (à support quelconque pour $(\mathcal{D}')$, compact pour $(\mathcal{E}')$) [5].

Le produit $T\wedge\varphi$ donne d'ailleurs l'anneau d'homologie, et $\int T\wedge\varphi$ donne la dualité entre homologies de degrés complémentaires.

CONSÉQUENCE. - Dans toute classse d'homologie existe au moins une forme fermée ordinaire, indéfiniment différentiable, et aussi un cycle singulier, indéfiniment différentiable.

---

[5] Ce théorème est un cas particulier du théorème général de de RHAM en théorie des faisceaux. L'homologie mentionnée ici doit en réalité s'appeler cohomologie.

9. Distributions sur un espace de Riemann.

V^n sera désormais un "espace de Riemann", variété indéfiniment différentiable munie d'un ds^2 indéfiniment différentiable.

Nous remplacerons alors les notions des paragraphes 6, 7, 8, par des notions toutes différentes, utilisant des isomorphismes canoniques définis par le ds^2.

Nous supposerons toutes les quantités réelles. V^n n'est plus nécessairement orientable.

Il existe sur V^n une mesure $\geqslant 0$, le volume, défini par le ds^2. Tous les signes $\int$ seront des intégrales relatives à cette mesure.

En chaque point existe un produit scalaire $\langle X , \alpha \rangle$ entre un p-vecteur et une p-forme, mais aussi un produit scalaire euclidien (X , Y) entre 2 p-vecteurs ou (α , β) entre 2 p-formes, défini par le ds^2 ; $(X , X) \geqslant 0$, $(\alpha , \alpha) \geqslant 0$
Si α et β sont deux formes différentielles de degré p, (α , β) est une fonction numérique, et $\int (\alpha , \beta)$, s'il est défini, sera noté $((\alpha , \beta))$.
On appellera $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert (réel) des formes différentielles de degré p, ω, pour lesquelles $((\omega , \omega)) < +\infty$, avec le produit scalaire $((\alpha , \beta))$; $\mathcal{H}$ a les propriétés des espaces de la famille $\mathcal{F}$ (paragraphe 3).

Une distribution-forme différentielle de degré p sera une forme linéaire continue $T(\varphi)$ sur les formes différentielles de degré p appartenant à $(\mathcal{D})$. $T(\varphi)$ sera aussi noté $\int (T , \varphi)$ ou $((T , \varphi))$.

EXEMPLES :

1° Une forme différentielle de degré p, ω, localement sommable, avec

(26) $$\int (\omega , \varphi) = \text{intégrale usuelle.}$$

Toutes les fois que nous définirons une opération sur les distributions, nous ferons en sorte que pour $T = \omega$, on retrouve les opérations usuelles correspondantes.

2° Une chaîne différentiable Γ de dimension p, avec

(27) $$\int (\Gamma , \varphi) = \int_\Gamma \varphi$$

3° Un p-vecteur tangent X en un point a, avec

(28) $$\int (X , \varphi) = (X , \varphi) \text{, produit scalaire au point } a \text{,}$$

et une quantité d'autres obtenues par des isomorphismes canoniques.

10. L'opération $*$ locale [6].

Si en un point a on oriente la variété , on peut alors à chaque p-forme tangente α faire correspondre une $(n-p)$-forme $*\alpha$ ou $\overset{*}{\alpha}$; α et $*\alpha$ ont le même volume et $\alpha \wedge \overset{*}{\alpha} \geqslant 0$.

$$(29)\qquad * * = (-1)^{p(n-p)} \quad \text{ou} \quad \overset{-1}{*} = (-1)^{p(n-p)} *$$

Cette opération possible sur un ouvert orienté fait correspondre à toute forme différentielle α de degré p , une forme différentielle $*\alpha$ de degré $n-p$. En changeant l'orientation locale, on change $*\alpha$ en son opposé.

Dans une carte locale orientée, on définira $\overset{*}{T}$ ou $*T$ par

$$(30)\qquad ((*T , \varphi)) = ((T , \overset{-1}{*} \varphi))$$

Si maintenant α et β sont deux formes différentielles usuelles, $\overset{-1}{*}(\alpha \wedge \overset{*}{\beta})$ est indépendant de toute orientation. Si α et β sont de même degré, cette quantité vaut (α , β) , de sorte que, si V^n est orientée,

$$(31)\qquad ((\alpha , \beta)) = \int \alpha \wedge \overset{*}{\beta} ,$$

intégrale d'une forme différentielle de degré n sur une variété orientée ; mais le résultat est indépendant de l'orientation.

Cette formule permet, pour une variété orientée, de relier les définitions du paragraphe 9 à celles du paragraphe 6. De même, la multiplication sera définie par

$$(32)\qquad ((T \wedge \alpha , \varphi)) = ((T , \overset{-1}{*} (\alpha \wedge \overset{*}{\varphi})))$$

formule indépendante de toute orientation.

11. Différentiations, laplacien.

La différentiation adjointe ∂ , qui transforme une forme différentielle usuelle de degré p différentiable en forme de degré $p-1$, est définie par

$$(33)\qquad \begin{cases} \partial\omega = (-1)^p \overset{-1}{*} d * \omega \quad \text{ou} & \Big| \text{ formules indépendantes} \\ * \partial \omega = (-1)^p d * \omega \text{ ; on a} & \Big| \text{ de toute orientation} \\ d d = 0 , \quad \partial\partial = 0 \quad . \text{ On a aussi} & \\ d\omega = (-1)^{n-p} * \partial \overset{-1}{*} \omega & \\ \overset{-1}{*} d\omega = (-1)^{n-p} \partial \overset{-1}{*} \omega & \end{cases}$$

---

[6] Voir les ouvrages de KODAIRA et de RHAM [2] et [4] .

Les opérations d et ∂ sont alors adjointes dans $\mathcal{H}$, et si α et β sont une fois différentiables :

$$(34)\qquad \begin{cases} ((d\alpha\,,\,\beta)) = ((\alpha\,,\,\partial\beta)) \\ ((\partial\alpha\,,\,\beta)) = ((\alpha\,,\,d\beta)) \end{cases}$$

Nous définirons alors, pour des distributions T, les opérations d et ∂ par

$$(35)\qquad \begin{cases} ((dT\,,\,\varphi)) = ((T\,,\,\partial\varphi)) \\ ((\partial T\,,\,\varphi)) = ((T\,,\,d\varphi)) \end{cases}$$

On voit que si T est une chaîne Γ (27), ∂T est son bord $b\Gamma$ (STOKES).

On a évidement pour T quelconque les mêmes relations (33) que pour $T = \omega$.

Le laplacien est un opérateur différentiel du 2e ordre conservant les degrés des formes, défini par

$$(36)\qquad \Delta = d\,\partial + \partial\,d \quad (^7)$$

Il est formellement self-adjoint et commute avec d et ∂, et

$$(37)\qquad \begin{cases} ((\Delta T\,,\,\varphi)) = ((T\,,\,\Delta\varphi)) \\ \Delta d = d\Delta = d\,\partial\,d \\ \Delta\partial = \partial\Delta = \partial\,d\,\partial \end{cases}$$

12. Homologie et $*$-homologie.

$$(38)\qquad \begin{cases} T \text{ est formée} \Leftrightarrow dT = 0 \\ T \text{ est } \sim 0 \Leftrightarrow T = dS \\ T \text{ est } *\text{-fermée} \Leftrightarrow \partial T = 0 \\ T \text{ est } \overset{*}{\sim} 0 \Leftrightarrow T = \partial S \end{cases}$$

THÉORÈME 3 bis (de RHAM). - L' $*$-homologie de degré p, définie par l'opérateur ∂ est canoniquement isomorphe à l'homologie singulière pour la dimension $n - p$. L'homologie de degré p et et l' $*$-homologie de degré p sont mises en dualité par le produit scalaire $((T\,,\,\varphi))$.

---

(7) Pour une fonction sur R^n, on trouve ainsi l'opposé du laplacien usuel. C'est pourquoi nous avons pris depuis l'habitude de poser plutôt $-\Delta = d\partial + \partial d$.

13. Noyaux sur un espace de Riemann.

La théorie des noyaux est analogue à celle de la 1re partie, mais les noyaux sont ici des distributions formes différentielles. Le produit $V^n \times V^n$ est un espace de Riemann (ds^2 = somme des ds^2) donc on peut y définir des distributions.

Si $K_{x,\xi}$ est un noyau de degré q en x, de degré p en ξ, nous noterons par

(39) $$v \to K^{\cdot}v = \int_{\xi} (K_{x,\xi} , v(\xi))$$

la transformation linéaire qui à $v \in (\mathcal{D})$, de degré p, fait correspondre la ditribution $K^{\cdot}v$, $\in (\mathcal{D}')$, de degré q, définie par

(40) $$((K^{\cdot}v , u)) = ((K , u(x) \wedge v(\xi)))$$

Le noyau adjoint (au sens hilbertien) de K est alors son symétrique ${}^sK$ défini par

(41) $$(({}^sK , \varphi(x , \xi))) = ((K , \varphi(\xi , x)))$$

On a en effet

(42) $$\begin{cases} ((K^{\cdot} v , u)) = (({}^sK^{\cdot} u , v)) \\ \quad = ((K , u(x) \wedge v(\xi))) \end{cases}$$

Nous noterons par I, d, ∂, Δ, les noyaux définis par les transformations correspondantes. Ils sont très réguliers, compacts. d et ∂ sont symétriques l'un de l'autre, Δ est symétrique.

On peut alors compléter le théorème de de Rham 3 bis, et montrer l'existence d'un noyau J régulier $((\mathcal{E}) \to (\mathcal{E})$ et $(\mathcal{D}') \to (\mathcal{D}'))$ tel que, si $\varphi \in (\mathcal{E})$ ou $T \in (\mathcal{D}')$ est ~ 0, $J^{\cdot}\varphi$ ou $J^{\cdot}T$ en soit primitive extérieure :

(43) $$\begin{cases} d(J^{\cdot}\varphi) = \varphi \text{ si } \varphi \sim 0 \text{ dans } (\mathcal{E}) \\ d(J^{\cdot}T) = T \text{ si } T \sim 0 \text{ dans } (\mathcal{D}') \end{cases}$$

ce que l'on peut écrire

(43 bis) $$d \circ J \circ d = d$$

Il existe un autre noyau régulier J^{∞} $((\mathcal{D}) \to (\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E}') \to (\mathcal{E}'))$ qui vérifie les mêmes relations pour l'homologie à support compact. Leurs adjoints $J'^{\infty} = {}^sJ$, $J' = {}^s(J^{\infty})$, sont alors attachés à la différentiation adjointe.

(43 ter) $$\partial \circ {}^sJ \circ \partial = \partial$$

3. Les formes différentielles harmoniques sur un espace de Riemann compact.

14. La décomposition fondamentale de $\mathcal{H}$.

T est harmonique si $\Delta T = 0$. Toute distribution fermée et $*$-fermée est harmonique.

Soient, dans $\mathcal{H}$, les 3 sous-espaces suivants :

a. $\mathcal{H}_1$ = espace des formes ω à la fois fermées et $*$-fermées : $d\omega = \partial\omega = 0$ (au sens distributions ; nous ne le répèterons plus).

b. $\mathcal{H}_2$ = adhérence de l'image de $(\mathcal{D})$ par d,

= orthogonal de l'espace des formes $*$-fermées.

c. $\mathcal{H}_3$ = adhérence de l'image de $(\mathcal{D})$ par ∂

= orthogonal de l'espace des formes fermées.

$\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ sont fermés. Par définitions $\mathcal{H}_1$ est orthogonal à $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$; ceux-ci sont aussi orthogonaux, comme adhérences de sous-espaces orthogonaux, en vertu de

$$((d\alpha\ ,\ \partial\beta)) = ((dd\alpha\ ,\ \beta)) = 0 \tag{44}$$

On a la décomposition de l'espace

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \tag{45}$$

car si une forme est orthogonale à $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$, elle est fermée et $*$-fermée donc dans $\mathcal{H}_1$.

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \text{espace des formes fermées} \\ \mathcal{H}_{13} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_3 = \text{espace des formes } *\text{-fermées.} \end{cases} \tag{46}$$

Soient H_1, H_2, H_3 les noyaux définissant les projections orthogonales sur $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$; ils sont $(\mathcal{H} \to \mathcal{H})$ et ont en outre les propriétés suivantes :

a. ils sont symétriques, puisque les projecteurs sont auto-adjoints.

b. ils sont deux à deux composables et

$$\begin{cases} H_1 + H_2 + H_3 = I \\ H_i \circ H_i = H_i \quad ; \quad H_i \circ H_j = 0 \quad (i \neq j) \end{cases} \tag{47}$$

c. On a les formules de composition

(48) $$\begin{cases} d \circ H_1 = H_1 \circ d = \partial \circ H_1 = H_1 \circ \partial = \Delta \circ H_1 \\ \qquad = H_1 \circ \Delta = 0 \end{cases}$$

(49) $$\begin{cases} d \circ H_2 = H_2 \circ \partial = 0 \ ; \ H_2 \circ d = d \ ; \\ \partial \circ H_2 = \partial \ ; \ \Delta \circ H_2 = H_2 \circ \Delta = d \circ \partial \end{cases}$$

(50) $$\begin{cases} \partial \circ H_3 = H_3 \circ d = 0 \ ; \ H_3 \circ \partial = \partial \ ; \\ d \circ H_3 = d \ ; \ \Delta \circ H_3 = H_3 \circ \Delta = \partial \circ d \end{cases}$$

On voit que les H_i permutent entre eux et avec Δ. On a aussi

$$\begin{cases} H_1 \circ * = * \circ H_1 \\ H_2 \circ * = * \circ H_3 \\ H_3 \circ * = * \circ H_2 \end{cases}$$

15. Noyau élémentaire du laplacien Δ.

Un noyau élémentaire $E_{x,\xi}$ est un inverse à droite de Δ :

(51) $$\Delta \circ E = I$$

Ce noyau n'est a priori supposé défini que localement, dans un voisinage d'un point de la diagonale $x = \xi$. KODAIRA le détermine explicitement par la méthode des majorantes de Hadamard, lorsque la variété V^n et le ds^2 sont analytiques. Par une modification de la méthode [8] on peut montrer son existence dans le cas indéfiniment (ou suffisamment) différentiable. On peut aussi obtenir tous les résultats sans le noyau élémentaire; c'est ce qu'on fait dans les exposés modernes déjà signalés.

THÉORÈME 4. - Le noyau élémentaire est une forme différentielle usuelle $E(x, \xi)$ de la forme

---

[8] Le principe de la méthode est dû à Eugenio Elia LEVI. On le trouve exposé dans de RHAM [4], page 152, paragraphe 30.

$$(52)\quad \begin{cases} E(x,\xi) = \dfrac{1}{r^{n-2}(x,\xi)}\, U(x,\xi) & \text{pour } n \text{ impair ;} \\ E(x,\xi) = \dfrac{1}{r^{n-2}(x,\xi)}\, U(x,\xi) + \log \dfrac{1}{r(x,\xi)}\, V(x,\xi) & \text{pour } n \text{ pair;} \end{cases}$$

$U(x,\xi)$ et $V(x,\xi)$ sont des formes différentielles indéfiniment différentiables (analytiques dans le cas où V^n et le ds^2 sont analytiques) ; r est la distance géodésique.

Il y a une infinité de noyaux élémentaires possibles. Il y en a un privilégié pour n impair, et par là même il peut être défini dans tout un voisinage de la diagonale $x = \xi$ de $V^n \times V^n$. Il ne semble pas y en avoir pour n pair. Je ne sais pas s'il y en a de symétrique ([9]) mais de toute façon ${}^sE$ est un inverse à gauche :

$$(53)\qquad {}^sE \circ \Delta = I \ .$$

16. Paramétrix.

Comme le noyau élémentaire n'est pas partout défini, on introduit des paramétrix. Soit $\alpha(x,\xi)$ une fonction numérique indéfiniment dérivable, de support contenu dans le voisinage de la diagonale où E est défini, et égale à 1 au voisinage de la diagonale. Alors

$$\varpi(x,\xi) = \alpha(x,\xi)\, E(x,\xi)$$

est une paramétrix : elle est partout définie ([10]). D'après la formule de dérivation d'un produit, on a

---

([9]) Cette question est, depuis, résolue par l'affirmative, dans le cas analytique grâce à un théorème de Malgrange ([3] voir les énoncés des pages 349-351) qui affirme que si V^n est connexe, non compacte, analytique à ds^2 analytique, il existe un noyau élémentaire bilatère E. On a donc $\Delta \circ E = E \circ \Delta = I$, et par suite aussi $\Delta \circ {}^sE = {}^sE \circ \Delta = I$, donc $\Delta \circ \dfrac{E + {}^sE}{2} = \dfrac{E + {}^sE}{2} \circ \Delta = I$, et $\dfrac{E + {}^sE}{2}$ est symétrique. Si V est compact, ce n'est vrai que localement, dans un voisinage d'un point de la diagonale.

([10]) Ce raisonnement n'est valable que si le noyau élémentaire $E_{x,\xi}$ est défini dans tout un voisinage de la diagonale ; c'est ce qu'on peut supposer pour n impair. Pour n pair, on a seulement trouvé un noyau élémentaire dans un voisinage d'un point de la diagonale. Autrement on raisonnera seulement dans des ouverts Ω de V^n assez petits pour que le noyau élémentaire existe dans $\Omega \times \Omega$.

(54) $$\Delta \circ \varpi = \alpha(\Delta \circ E) + L = I + L$$

où L est un opérateur qui dépend linéairement des dérivées premières et secondes de α, donc qui est nul au voisinage de la diagonale $x = \xi$; par suite les singularités de E ont disparu dans L, qui est une forme indéfiniment dérivable ϖ x et ξ : L est un noyau régularisant compact.

On a aussi

(55) $$^s\varpi \circ \Delta = I + {}^sL$$

THÉORÈME 5. - Une paramétrix est un noyau très régulier compact.

En vertu de sa forme et des critères du paragraphe 5, il suffit pour le voir de montrer que la fonction $\dfrac{1}{r^{n-2}(x, \xi)}$, en tant que distribution de degré 0 en x, est une fonction indéfiniment différentiable de ξ. Or on peut la ramener, par une transformation qui dépend indéfiniment différentiablement de ξ (celle qui amène ξ sur 0, les géodésiques issues de ξ sur les droites issues de 0 avec conservation de leurs angles, et conservation des distances sur ces géodésiques) sur une fonction fixe $\dfrac{1}{r^{n-2}}$ dans l'espace euclidien.

CONSÉQUENCE.

THÉORÈME 6. - Toute distribution harmonique dans un ouvert est une forme différentielle indéfiniment différentiable, et si des formes harmoniques convergent dans $(\mathcal{D}')$ elles convergent dans $(\mathcal{E})$; toute distribution T, solution de $\Delta T = S$ est une forme indéfiniment différentiable là où S l'est elle-même.

Ce théorème est purement local, on peut utiliser une paramétrix.

Cela revient à dire que l'ensemble des singularités de T est identique à celui de ΔT : il le contient évidemment, et est contenu dans lui en vertu de (55) puisque ϖ est très régulier :

(56) $$T = {}^s\varpi \cdot S - {}^sL \cdot T$$

Les méthodes précédentes, modifiées convenablement (en utilisant E de préférence à ϖ) montrent que, dans le cas analytique, T est analytique là où S est analytique.

Cas trivial : si $\Delta T = 0$, $T = - {}^sL \cdot T$ est une forme indéfiniment différentiable (au sens usuel).

17 . Prolongement de la décomposition fondamentale.

Désormais V^n sera compacte. Alors $(\mathcal{D}) = (\mathcal{E})$, $(\mathcal{D}') = (\mathcal{E}')$ et tous les noyaux sont compactifiants.

THÉORÈME 7. - H_1 est parfait, H_2 et H_3 sont très réguliers. Ces trois noyaux sont des projecteurs sur 3 sous-espaces fermés indépendants, $\mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}'_2$, $\mathcal{E}'_3$ de $(\mathcal{E}')$, dont la somme directe est $(\mathcal{E}')$.

Le fait que H_1 est parfait résulte trivialement du théorème 6. Le fait que H_2 et H_3 sont très réguliers en résulte aussi, mais de manière plus compliquée. La fin du théorème résulte alors immédiatement des formules (47).

Toute distribution T admet donc une décomposition unique en somme

(56) $$T = T_1 + T_2 + T_3 , \quad T_i \in \mathcal{E}'_i$$

De même dans $(\mathcal{E})$, les mêmes noyaux H_i définissent $\mathcal{E}$ comme somme directe de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ et toute forme φ indéfiniment différentiable admet une décomposition unique en somme

(57) $$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 , \quad \varphi_i \in \mathcal{E}_i$$

Le système des $\mathcal{E}'_i$ et celui de $\mathcal{E}_i$ sont orthogonaux :

(58) $$((T , \varphi)) = ((T_1 , \varphi_1)) + ((T_2 , \varphi_2)) + ((T_3 , \varphi_3))$$

$$\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 = \mathcal{H}_1 ; \quad \mathcal{E}'_2 \supset \mathcal{H}_2 \supset \mathcal{E}_2 , \quad \mathcal{E}'_2 = \bar{\mathcal{E}}_2 ;$$
$$\mathcal{E}'_3 \supset \mathcal{H}_3 \supset \mathcal{E}_3 , \quad \mathcal{E}'_3 = \bar{\mathcal{E}}_3 .$$

D'après les théorèmes de de Rham, $\mathcal{E}'_2$, espace des distributions orthogonales à toutes les formes $*$-fermées de $(\mathcal{D})$, est l'espace des courants ~ 0 . De même $\mathcal{E}'_3$ est l'espace des distributions $\overset{*}{\sim} 0$. Enfin $\mathcal{E}'_1$ est l'espace des formes harmoniques, car toute distribution de $\mathcal{E}'_1$ est harmonique et réciproquement toute distribution harmonique est une forme indéfiniment différentiable φ , alors

(59) $$((\Delta\varphi , \varphi)) = \underbrace{((d\varphi , d\varphi))}_{\geqslant 0} + \underbrace{((\partial\varphi , \partial\varphi))}_{\geqslant 0}$$

donc $d\varphi = \partial\varphi = 0$ et $\varphi \in \mathcal{E}_1$.

18. Les théorèmes de Hodge, etc. (V^n compact).

1° Dans toute classe d'homologie (resp. d' $*$-homologie) il y a une forme harmonique et une seule.

Car si T est fermée, $T = H_1 \cdot T + H_2 \cdot T$, $H_2 \cdot T \sim 0$, donc $H_1 \cdot T \sim T$.

Unicité, car $T \sim 0$, $T \in \mathcal{E}'_1 \Rightarrow T \in \mathcal{E}'_1 \cap \mathcal{E}'_2$ donc $= 0$.

2° Toute distribution ~ 0 (resp. $\overset{*}{\sim} 0$) peut s'écrire dT (resp. ∂T avec $T \overset{*}{\sim} 0$ (resp. ~ 0) ; T est unique.

Car si $S = dU$, on a $S = d(H_3 U)$, et $T = H_3 U$ est $\overset{*}{\sim} 0$.

Unicité car $dT = 0$, $T \overset{*}{\sim} 0 \Rightarrow T \in \mathcal{E}'_{12} \cap \mathcal{E}'_3$, donc $= 0$.

D'ailleurs si J est le noyau de (43), on a

$$
(60) \qquad \begin{cases} d \circ J \circ H_2 = H_2 = (d \circ H_3) \circ J \circ H_2 \quad \text{et aussi} \\ H_3 \circ J \circ d = H_3 \end{cases}
$$

donc le noyau $H_3 \circ J$ donne le passage de S à T, si $S \sim 0$.

3° Pour qu'il existe une distribution T telle que $\Delta T = S$, il faut et il suffit que $S \in \mathcal{E}'_{23}$ (S orthogonale aux formes harmoniques). T est unique si elle est elle-même dans $\mathcal{E}'_{23}$.

Si $S = \Delta T = d(\partial T) + \partial(dT)$, on a bien $S \in \mathcal{E}'_{23}$.

Réciproquement, soit $S \in \mathcal{E}'_2$. Alors $S = dU$, $U \in \mathcal{E}'_3$; d'où $U = \partial T$, $T \in \mathcal{E}'_2$, et

$$
S = d\,\partial\, T = \Delta T, \quad T \in \mathcal{E}'_2 .
$$

De même si $S \in \mathcal{E}'_3$, $S = \Delta T$, $T \in \mathcal{E}'_3$.

Unicité dans $\mathcal{E}'_{23}$, car $T \in \mathcal{E}'_{23}$, $\Delta T = 0 \Rightarrow T \in \mathcal{E}'_1 \cap \mathcal{E}'_{23}$ donc $= 0$.

Le noyau qui conduit de S à T, si $S \in \mathcal{E}'_{23}$ et qui amène $(\mathcal{E}'_1)$ sur 0, est

$$
(61) \qquad \begin{cases} G = H_2 \circ {}^sJ \circ H_3 \circ J \circ H_2 \\ \quad + H_3 \circ J \circ H_2 \circ {}^sJ \circ H_3 \end{cases}
$$

19. Le noyau de Green.

G est donc un noyau symétrique, qui bien entendu vérifie

$$
(62) \qquad I - H_1 = \Delta \circ G = G \circ \Delta
$$

G, noyau de Green, est une paramétrix symétrique, qui permute avec les H_i, d, ∂, Δ.

Le rôle de paramétrix résulte de (62) et de ce que H_1 est parfait.

On voit sans peine que G est très régulier.

G remplacera avantageusement la paramétrix initiale ϖ à cause de sa propriété de symétrie et de permutation avec tous les opérateurs, et son caractère intrinsèque et global. Et l'on a, d'après (62)

$$H_1 = I - \Delta \circ G \ , \quad H_2 = d \circ \partial \circ G \ , \quad H_3 = \partial \circ d \circ G \tag{63}$$

J et ${}^sJ$ seront alors avantageusement remplacés par

$$J_0 = \partial \circ G \quad \text{et} \quad {}^sJ_0 = d \circ G \tag{64}$$

qui sont très réguliers, et satisfont aux conditions du paragraphe 18, (2°).

Si maintenant K est un noyau quelconque nul au voisinage de la diagonale $x = \xi$ et coïncidant avec l'identité dans $\mathcal{E}'_1$, alors $I - K$ amène $\mathcal{E}'$ sur $\mathcal{E}'_{23}$ d'où

$$\begin{aligned} I - K &= (H_2 + H_3) \circ (I - K) \\ &= \Delta \circ (G \circ (I - K)) \end{aligned} \tag{65}$$

de sorte que le noyau $E = G \circ (I - K)$ vérifie

$$\Delta \circ E = I - K = \dot{I} \tag{66}$$

au voisinage de la diagonale de $x = \xi$ et c'est un noyau élémentaire. La connaissance de G redonne donc des noyaux élémentaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KODAIRA (K.). - Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory), Ann. of Math., t. 50, 1949, p. 587-665.

[2] KODAIRA (K.) and de RHAM (G.). - Harmonic integrals. - Princeton, Institute for advanced Study, 1950 (multigraphié).

[3] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-56, p. 271-355 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).

[4] de RHAM (Georges). - Variétés différentiables, Formes, courants, formes harmoniques. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., n° 1222).

[5] SCHWARTZ (Laurent). - Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, J. Analyse math. Jérusalem, t. 4, 1954/55, p. 88-148.

[6] SCHWARTZ (Laurent). - Complex analytic manifolds. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1955 (Lectures on Mathematics and Physics, Mathematics, n° 4).

[7] SCHWARTZ (Laurent). - Variedades analiticas complejas. - Bogota, Universidad nacional de Colombia, 1956 (Cours professé de Juillet à Octobre 1956, multigraphié).

[8] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 7, 1957, p. 1-141.

[Juillet 1958]