EMILIA CABALLERO

Propriétés de connexité en topologie fine

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 15 (1971-1972), exp. nº 28, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1971-1972__15__A8_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
14e-15e années, 1970-1972, n° 28, 5 p.

8 juin 1972

PROPRIÉTÉS DE CONNEXITÉ EN TOPOLOGIE FINE, D'APRÈS M. FUGLEDE

par Emilia CABALLERO

On expose ici les résultats de M. FUGLEDE [3] concernant les propriétés de connexité en topologie fine, dans le cadre axiomatique de M. BRELOT [1].

L'idée directrice de cet exposé est d'arriver aux résultats de connexité le plus directement possible.

Notations et hypothèses. - Soit Ω un espace localement compact, non compact, connexe et localement connexe. On suppose que le faisceau des fonctions harmoniques dans Ω satisfait les axiomes 1, 2, 3 et D de M. BRELOT, et qu'il existe un potentiel positif sur Ω .

$S^+(\Omega)$ dénote le cône des fonctions surharmoniques positives dans Ω , et $\mathcal{P}_0^+(\Omega)$ le cône des potentiels finis continus et positifs sur Ω .

$\tilde{A}$ désigne l'adhérence fine d'un ensemble $A \subset \Omega$ et $\partial_f A$ sa frontière fine.

Préliminaires. - Soit $A \subset \Omega$. La base de A dans Ω , notée $b(A)$, est l'ensemble des points de Ω dans lesquels A est non effilé.

On sait (voir par exemple [4]) qu'il existe $p \in \mathcal{P}_0$ tel que, pour tout $A \subset \Omega$,

$$b(A) = \{x \in \Omega : \hat{R}_p^A(x) = p(x)\} ,$$

où $\hat{R}_p^A$ est la balayée de p sur A .

1. Propriétés des bases.

Soient $A \subset \Omega$, et $b(A)$ sa base. On a les résultats suivants ([2], [4]) :

1° $A \setminus b(A)$ est polaire,

2° $b(A) = \emptyset$ si, et seulement si, A est polaire,

3° Pour toute $v \in S^+(\Omega)$, $\hat{R}_v^{b(A)} = \hat{R}_v^A$ dans Ω , et $\hat{R}_v^A = v$ dans $b(A)$,

4° $b(b(A)) = b(A)$,

5° $b(A \cup B) = b(A) \cup b(B)$,

6° $A \subset B \Rightarrow b(A) \subset b(B)$, 7° Si A est finement ouvert, on a $A \subset b(A)$,

8° A est finement fermé si, et seulement si, $A \supset b(A)$.

2. Propriétés des mesures balayées.

Soit μ une mesure de Radon positive à support compact dans Ω ; $A \subset \Omega$ et μ^A la mesure balayée de μ sur A . μ^A a les propriétés suivantes :

1° μ^A est portée par $b(A)$;

2° $\mu^A = \mu$ si, et seulement si, μ est portée par $b(A)$;

3° Si e est polaire et $\mu(e) = 0$, alors $\mu^A(e) = 0$;

4° Soit $I_A = \{x \in \Omega : \complement A$ est effilé en $x\}$. Pour tout $E \subset I_A$, tel que $\mu(E) = 0$, on a $\mu^A(E) = 0$;

5° Si μ est portée par $b(\complement A)$, alors μ^A est portée par $\partial_f A$.

Pour la démonstration des énoncés 1°, 2°, 3° et 4°, voir [4] ; pour montrer le 5°, soit $B = b(\complement A)$; on a $\complement B = I_A$ et $\mu(I_A) = 0$, donc, d'après le 4°, $\mu^A(I_A) = 0$, c'est-à-dire μ^A est portée par $B = b(\complement A)$. D'autre part, μ^A est portée par $b(A)$, d'où μ^A est portée par $b(A) \cap b(\complement A) \subset (\partial_f A)$.

Dans tout ce qui suit, μ désignera une mesure de Radon positive à support compact dans Ω .

3. Connexité fine de l'espace Ω .

LEMME 1. - Soit $E \subset \Omega$ un ensemble tel que sa frontière fine $\partial_f E$ soit polaire. Alors E est polaire ou bien $\complement E$ est polaire.

Démonstration. - Supposons que $\complement E$ est non polaire. Comme $\partial_f E$ est polaire, on obtient que $\complement \tilde{E}$ est aussi non polaire. Soit $x \in \complement \tilde{E}$. La mesure ε_x est portée par $\complement \tilde{E} \subset b(\complement E)$. Donc, grâce à la propriété 2.5, la mesure balayée ε_x^E est portée par $\partial_f E$.

D'autre part, $x \notin \partial_f E$, d'où $\varepsilon_x(\partial_f E) = 0$. Comme $\partial_f E$ est polaire, on obtient $\varepsilon_x^E(\partial_f E) = 0$, d'après 2.3.

Mais alors $\varepsilon_x^E = 0$, c'est-à-dire E est polaire.

THÉORÈME 2. - L'espace Ω est finement connexe, ainsi que toute partie $\omega \subset \Omega$ ouverte, et connexe pour la topologie initiale.

Démonstration. - Supposons qu'il existe $A \subset \Omega$ tel que A et $\complement A$ soient ouverts pour la topologie fine. Alors $\partial_f A = \emptyset$, donc $\partial_f A$ est polaire. Il s'ensuit, d'après le lemme 1, que A ou $\complement A$ est polaire, ce qui implique que A ou $\complement A$ est polaire, puisque un ensemble finement ouvert et polaire est nécessairement vide.

Pour $\omega \subset \Omega$, une partie ouverte et connexe pour la topologie initiale, on a que les fonctions harmoniques sur ω satisfont aux axiomes 1, 2, 3 et D, qu'il existe un potentiel > 0 sur ω, et que la topologie fine sur ω est la topologie induite par celle de Ω.

LEMME 3. - Soient A et B deux ensembles tels que $b(A) \subset b(B)$. Alors

1° pour toute $u \in S^+(\Omega)$, $\hat{R}^A_{\hat{R}^B_u} = \hat{R}^A_u = \hat{R}^B_{\hat{R}^A_u}$;

2° $(\mu^A)^B = \mu^A = (\mu^B)^A$;

3° $\mu^A = \mu^B$ si, et seulement si, μ^B est portée par $b(A)$.

Démonstration.

1° Soit $u \in S^+(\Omega)$; $\hat{R}^B_u = u$ sur $b(B) \supset b(A)$, d'où $\hat{R}^A_{\hat{R}^B_u} = \hat{R}^A_u$ sur Ω. D'autre part, $\hat{R}^B_{\hat{R}^A_u} = \hat{R}^A_u$ sur $b(B)$, donc $\hat{R}^B_{\hat{R}^A_u} = u$ sur $b(A) \subset b(B)$, d'où $\hat{R}^B_{\hat{R}^A_u} \geqslant \hat{R}^A_u$, et on obtient ainsi l'égalité cherchée.

2° C'est une conséquence immédiate du 1°.

3° D'après le § 2, 2°, μ^B est portée par $b(A) \Longleftrightarrow \mu^B = (\mu^B)^A = \mu^A$.

LEMME 4. - Soient U une partie finement ouverte, et F finement fermée telles que $U \subset F$. Si μ ne charge ni A, ni l'ensemble polaire $e = (F \setminus U) \setminus b(F \setminus U)$, on a $\mu^F = \mu^{(F \setminus U)}$.

Démonstration. - μ^F est portée par $b(F)$, d'après 2, 1°. Comme $\mu(U \cup e) = 0$, on a, grâce à 2, 3° et 2, 4°, que $\mu^F(U \cup e) = 0$, puisque U est contenu dans l'intérieur fin de F, et e est polaire.

μ^F est donc portée par $\complement(U \cup e) \cap b(F) \subset b(F \setminus U)$.

En appliquant le lemme3, 3°, on obtient le résultat cherché.

4. Locale connexité de la topologie fine.

THEOREME 5. - L'espace Ω est localement connexe pour la topologie fine.

Démonstration. - Soient $x \in \Omega$, et U un voisinage fin de x. On sait que la topologie fine est régulière [2], donc il existe un voisinage V de x, $V \subset U$, et V finement fermé. Soit $B = b(\complement V)$, $B \supset \complement V$, puisque $\complement V$ est finement ouvert et, en outre, $x \notin B$, parce que $x \notin \widetilde{\complement V} \supset B$.

Considérons la famille :

$$\mathcal{E} = \{E \subset \Omega : \ E = b(E) \ , \ E \supset B \ \text{et} \ \varepsilon_x^E = \varepsilon_x^B\} \ .$$

L'ensemble $B_x = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ vérifie les conditions suivantes :

1° $B_x \in \mathcal{E}$,

2° $x \notin B_x$,

3° $\complement B_x$ est finement connexe;

Lorsqu'on aura montré cet énoncé, on aura aussi montré le théorème, car $\complement B_x$ est un voisinage fin de x, contenu dans U, et finement connexe.

Démonstration du 1°. - Soient E_1, $E_2 \in \mathcal{E}$; alors $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}$. En effet,

$$b(E_1 \cup E_2) = b(E_1) \cup b(E_2) = E_1 \cup E_2$$

et, pour tout $v \in \mathcal{P}_0$, on a

$$\hat{R}_v^{E_1 \cup E_2}(x) = \hat{R}_v^B(x) \ .$$

Ainsi la famille $\{\hat{R}_v^E\}_{E \in \mathcal{E}}$ est filtrante croissante, et la fonction $w = \sup_{E \in \mathcal{E}} \hat{R}_v^E$ est surharmonique $(\leqslant \hat{R}_v^{B_x})$.

Ensuite $w \geqslant \hat{R}_v^E = v$ sur E pour tout $E \in \mathcal{E}$, d'où $w \geqslant v$ sur B_x. On en conclut $\hat{R}_v^{B_x} = \sup_{E \in \mathcal{E}} \hat{R}_v^E$.

Au point x, on a (pour tout $v \in \mathcal{P}_0$)

$$\hat{R}_v^{B_x}(x) = \sup_{E \in \mathcal{E}} \hat{R}_v^E(x) = \hat{R}_v^B(x) \ , \ \text{c'est-à-dire} \ \varepsilon_x^{B_x} = \varepsilon_x^B \ .$$

Ceci implique que $b(B_x) \in \mathcal{E}$. Finalement, $b(B_x) \supset b(E) = E$ pour tout $E \in \mathcal{E}$, donc $b(B_x) \supset B_x$, d'où $b(B_x) = B_x$, et $B_x \in \mathcal{E}$.

Démonstration du 2°. - Elle est évidente.

Démonstration du 3°. - Soient V_1 et V_2 deux ouverts fins tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, et $V_1 \cup V_2 = \complement B_x$. Supposons que $x \in V_1$, alors $\varepsilon_x(V_2) = 0$. L'ensemble

$$F = V_2 \cup B_x$$

est finement fermé, $F \supset V_2$, et $\varepsilon_x[(F \setminus V_2) \setminus b(F \setminus V_2)] = 0$. On peut donc appliquer le lemme 4 aux ensembles F , V , et à la mesure ε_x . On obtient

$$\varepsilon_x^F = \varepsilon_x^{F\setminus V_2} = \varepsilon_x^{B_x} = \varepsilon_x^B \quad \text{et} \quad b(F) \in \mathcal{E} \ .$$

Mais $B_x \subset b(F)$, d'où

$$B_x = b(F) = b(V_2) \cup b(B_x) = b(V_2) \cup B_x$$

c'est-à-dire $B_x \supset b(V_2) \supset V_2$ (V_2 ouvert fin). Comme on avait supposé que

$$V_2 \subset \complement B_x \ ,$$

on conclut que $V_2 = \emptyset$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRELOT (M.). - Axiomatique des fonctions harmoniques. - Montréal, Les Presses de l'Université, 1966 (Séminaire de Mathématiques supérieures, 14. Eté 1965).

[2] BRELOT (M.). - On topologies and boundaries in potential theory. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 175).

[3] FUGLEDE (M.). - Connexion en topologie fine et balayage des mesures, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 21, 1971, fasc. 3, p. 227-244.

[4] HERVÉ (Rose-Marie). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-571 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

(Texte reçu le 8 juin 1972)

Emilia CABALLERO
44 rue Beaubourg
75003 PARIS