Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Danièle Dehen

Propriété des processus de Hunt en rapport avec la théorie du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 15 (1971-1972), exp. n° 18, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1971-1972__15__A2_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
14e-15e années, 1970-1972, n° 18, 12 p.
27 janvier et 3 février 1972

PROPRIÉTÉ DES PROCESSUS DE HUNT EN RAPPORT AVEC LA THÉORIE DU POTENTIEL

par Danièle DEHEN

Cet exposé développe, dans le cours de H. BAUER [1], la partie probabiliste, et démontre l'égalité, pour une fonction u hyperharmonique positive, de sa balayée et de $P_A u$, P_A étant la mesure harmonique.

1. Définitions et propriétés générales.

On considère deux espaces mesurables $(\Omega , \mathfrak{F})$ et $(E , \mathcal{B})$.

Définition 1.1. - On dira que $(\Omega , \mathfrak{F}(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0} (X_t)_{t\geq 0} , (P^x)_{x\in E})$ est un processus de Markov faible si :

(a) Pour tout x de E , P^x est une probabilité sur $\mathfrak{F}$ vérifiant $P^x\{X_0=x\}=1$;

(b) L'application $x \longmapsto P^x(A)$ est $\mathcal{B}$-mesurable pour tout A de $\mathfrak{F}$;

(c) $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathfrak{F}$ telle que, pour tout t , X_t soit $\mathfrak{F}_t$-$\mathcal{B}$-mesurable, et telle que, si $x \in E$, $B \in \mathcal{B}$:

$$P^x(X_{t+s} \in B \mid \mathfrak{F}_t) = P^{X_t}(X_s \in B) .$$

[Ce qui signifie, en notant $\varphi_s(x) = P^x(X_s \in B)$, que pour tout $A \in \mathfrak{F}_t$:

$$\int_A \varphi_s \circ X_t(\omega)\, dP^x = P^x(\{X_{s+t} \in B\} \cap A) .]$$

Le processus de Markov est dit homogène par rapport au temps si, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, il existe une application θ_t de Ω dans Ω telle que $X_t \circ \theta_h = X_{t+h}$.

On notera $\sigma(u)$ la tribu engendrée par les ensembles $X_t^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{B}$, $t \leq u$.

Processus de Markov avec adjonction d'un point δ . - On adjoint à E un point δ , on note $E_\delta = E \cup \{\delta\}$, $\mathcal{B}_\delta$ la tribu engendrée par $\mathcal{B}$ et $\{\delta\}$, et on impose les conditions suivantes :

(α) $(X_t(\omega) = \delta) \Rightarrow (\forall\, s \geq t , X_1(\omega) = \delta)$;

(β) $\forall\, \omega \in \Omega , X_\infty(\omega) = \delta$;

(γ) $\exists\, \omega_\delta \in \Omega , X_0(\omega_\delta) = \delta$;

(a') Propriété (a) pour tout x de E_δ ;

(b') L'application $x \longmapsto P^x(X_t \in B)$ de E dans $[0\,,\,1]$ est $\mathcal{B}$-mesurable pour tout B dans $\mathcal{B}$, elle sera notée $N_t(\cdot\,,\,B)$;

(c') Propriété (c) pour tout x de E_δ et B de $\mathcal{B}_\delta$.

Définitioh 1.2. - Une application T de Ω dans $\underset{\sim}{R}^+$ est un temps d'arrêt par rapport à la famille de tribus $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$, si, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\{\omega : T(\omega) \leqslant t\} \text{ appartient à } \mathfrak{F}_t .$$

Propriétés. - Si la famille de tribus $(\mathfrak{F}_t)$ est continue à droite, T est un temps d'arrêt si, et seulement si, $\{\omega : T(\omega) < t\}$ appartient à $\mathfrak{F}_t$ pour tout t de $\underset{\sim}{R}^+$.

Si $(T_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ est une suite de temps d'arrêt par rapport à la famille $(\mathfrak{F}_t)$, alors $\sup T_n$ est un temps d'arrêt, et si la famille $(\mathfrak{F}_t)$ est continue à droite, alors $\inf T_n$, $\limsup T_n$, $\liminf T_n$ sont des temps d'arrêt.

Définition 1.3. - Si T est un temps d'arrêt par rapport à la famille $(\mathfrak{F}_t)$, la tribu $\mathfrak{F}_T$ est la tribu engendrée par les ensembles Λ de $\mathfrak{F}$ tels que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\Lambda \cap \{T \leqslant t\} \text{ appartient à } \mathfrak{F}_t .$$

PROPOSITION 1.4. - Si le processus de Markov est progressivement mesurable (c'est-à-dire, en notant $\mathcal{R}_t$ l'ensemble des boréliens de $[0\,,\,t]$, et Φ_t l'application de $0\,,\,t \times \Omega$ dans E, $(s\,,\,\omega) \longmapsto X_s(\omega)$, l'application Φ_t est $(\mathcal{R}_t \times \mathfrak{F}_t)$-$\mathcal{B}$-mesurable), si T est un temps d'arrêt relatif aux tribus $\mathfrak{F}_t$, alors X_T est $\mathfrak{F}_T$-$\mathcal{B}$-mesurable (X_T désignant l'application $\omega \longmapsto X_{T(\omega)}(\omega)$).

Démonstration. - Soit B appartenant à $\mathcal{B}$. $\{X_t(\omega) \in B\} \cap \{T \leqslant t\}$ appartient à $\mathfrak{F}_t$ pour tout t. En notant Ψ_t l'application de $\{T \leqslant t\}$ dans $[0\,,\,t] \times \Omega$, $\omega \longmapsto (T(\omega)\,,\,\omega)$, alors la restriction de X_T à l'ensemble $\{T \leqslant t\}$ est la composée $\Phi_t \circ \Psi_t$. Or Ψ_t est $\mathfrak{F}_t$-$(\mathcal{R}_t \times \mathfrak{F}_t)$-mesurable, et la restriction de X_T à $\{T \leqslant t\}$ est $\mathfrak{F}_t$-$\mathcal{B}$-mesurable.

Définition 1.5. - Un processus de Markov est appelé processus de Markov fort, si, pour tout temps d'arrêt T, pour toute fonction f bornée et $\mathcal{B}_\delta$-mesurable, et en notant $\mathcal{B}_\delta^*$ la tribu des ensembles universellement mesurables de E_δ, on a les propriétés :

X_T est $\mathfrak{F}_T$-$\mathcal{B}_\delta^*$-mesurable,

$$E^x\{f \circ X_{t+T} \mid \mathfrak{F}_T\} = E^{X_T}\{f(X_t)\} .$$

Définition 1.6. - Un processus de Markov fort est appelé un processus de Hunt (resp. un processus standard) si :

1° E est localement compact, dénombrable à l'infini, δ étant un point isolé si E est compact, et E_δ étant le compactifié si E non compact.

$\mathcal{B}_\delta$ est la tribu des boréliens de E_δ .

2° En désignant par $\tilde{\mathfrak{F}}_t$ la tribu complétée de $\mathfrak{F}_t$ dans la tribu $\mathfrak{F}$, elle-même complétée de $\mathfrak{F}$ par rapport à la famille de mesures $\{P^x , x \in E_\delta\}$:

$$\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t^+} = \tilde{\mathfrak{F}}_t \text{ , pour tout } t .$$

3° Les fonctions $t \longmapsto X_t(\omega)$ sont continues à droite sur $[0 , \infty[$, et presque sûrement continues à gauche sur $[0 , \infty[$ (resp. ont des limites à gauche presque sûrement sur $[0 , \zeta[$, ζ désignant le temps de vie du processus).

4° Le processus est quasi continu à gauche, c'est-à-dire pour toute suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de temps d'arrêt pour la tribu $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$, ayant comme limite T , alors

$$X_{T_n} \longrightarrow X_T \quad \text{sur} \quad \{T < \infty\} \quad \text{p. s.}$$

Définition 1.7. - Si A est un sous-ensemble de E_δ , on définit ;

le temps d'entrée dans A : $T_A(\omega) = \inf\{t > 0 ; X_t(\omega) \in A\}$,

le pseudo-temps d'entrée dans A : $D_A(\omega) = \inf\{t \geq 0 ; X_t(\omega) \in A\}$.

2. Topologie fine.

Loi du tout ou rien 2.1. - On considère un processus de Markov homogène, Λ un ensemble de la tribu $\sigma(0)$, alors $P^x(\Lambda) = 0$ ou $P^x(\Lambda) = 1$.

Démonstration. - $\theta_0^{-1} \Lambda = \Lambda$, et par suite :

$$P^x(\Lambda) = P^x(\Lambda \cap \theta^{-1} \Lambda) = E^x[P^{X_0}(\Lambda) \mid \Lambda] = [P^x(\Lambda)]^2 .$$

COROLLAIRE 2.2. - Pour un processus de Hunt ou un processus standard, pour tout x de E , et tout A borélien ou presque borélien de E , on a

$$P^x(T_A = 0) = 0 \quad \text{ou} \quad P^x(T_A = 0) = 1 .$$

Définitions 2.3. - Un point x de E est dit régulier pour un ensemble presque borélien A si $P^x(T_A = 0) = 1$. Il est dit irrégulier pour A si $P^x(T_A = 0) = 0$; dans ce cas, on dit aussi que A est effilé en x . On notera :

$$A^r = \{x \in E , \ x \text{ régulier pour } A\} ,$$

$$A^i = \{x \in E , \ x \text{ irrégulier pour } A\} .$$

D'après 2.2, $A^r \cup A^i = E$. Les ensembles A^r et A^i sont universellement mesurables, lorsqu'on considère un espace de Hunt ou un espace standard.

Définitions 2.4. - Un point x est dit régulier (resp. irrégulier) pour un ensemble A , si A contient un ensemble C presque borélien (resp. si A est contenu dans une partie presque borélienne B) tel que

$$P^x(T_C = 0) = 1 \quad (\text{resp. } P^x(T_B = 0) = 0) .$$

Une partie A de E est finement ouverte si $X \setminus A$ est effilée en tout point de A .

La topologie fine est plus fine que la topologie de E puisqu'un ensemble est effilé en tout point qui ne lui est pas adhérent, ceci résultant de la continuité à droite des trajectoires.

On introduit ici des classes d'ensembles qui jouent le rôle d'ensembles exceptionnels.

Définitions 2.5. - Un ensemble A de $\mathcal{B}^*$ est de potentiel nul si

$$\mathcal{U}(x , A) = \int_0^\infty N_t(x , A)\, dt = 0 \quad \text{pour tout } x \text{ dans } E .$$

Un ensemble $A \subset E$ est dit polaire s'il existe un ensemble D presque borélien contenant A tel que $P^x(T_D < \infty) = 0$, $\forall x \in E$.

Un ensemble A est dit effilé s'il est contenu dans un ensemble D presque borélien tel que $D^r = \emptyset$ $(\Leftrightarrow P^x(T_D = 0) = 0 , \forall x)$.

$A \subset E$ est dit semi-polaire s'il est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles effilés.

Un ensemble polaire est effilé. Un ensemble effilé est semi-polaire. Une réunion dénombrable d'ensembles polaires (resp. semi-polaires) est polaire (resp. semi-polaire). Sauf cas particulier (mouvement brownien), un ensemble semi-polaire n'est pas polaire.

3. Propriété de temps d'arrêt et approximation des temps d'entrée.

Dans la suite, on se place sur un processus de Hunt à valeur dans $(E , \mathcal{B}^*)$, où $\mathcal{B}^*$ désigne la tribu des ensembles boréliens.

On montrera que si A est un ensemble analytique de E_δ , alors D_A et T_A sont des temps d'arrêt.

LEMME 3.1. - Si G est ouvert dans E_δ , alors $D_G = T_G$, et ce sont des temps d'arrêt pour la famille $\sigma(t^+)$.

Démonstration. - Les trajectoires sont continues à droite, d'où :

$$\{D_G < t\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap]0,t[} \{X_r \in G\} \in \sigma_t .$$

Notation. - Si $A \subset E$ et $t > 0$:

$$R_t(A) = \{\omega : X_s(\omega) \in A \text{ pour un } s \text{ vérifiant } 0 < s < t\} .$$

Si G est ouvert, $R_t(G) \in \sigma_t$.

LEMME 3.2. - Soit K compact de E , alors :

(a) $R_t(K) \in \zeta_t$, où ζ_t est la tribu complétée dans ζ , elle-même complétée de $\sigma(\infty)$ pour l'ensemble des mesures $\{P^x\}_{x \in E}$

(b) Si G_n est une suite décroissante d'ouverts de E telle que $G_n \supset \overline{G}_{n+1} \supset K$, et telle que $K = \bigcap G_n = \bigcap \overline{G}_n$, alors presque sûrement

$$D_{G_n} \nearrow D_K \text{ et } P^\mu(R_t(G_n)) \searrow P^\mu(R_t(K)) .$$

Démonstration. - Soit G_n une telle suite d'ouverts. D_{G_n} est une suite croissante de temps d'arrêt pour $\sigma(t^+)$. Par suite, $\lim_{n\to\infty} D_{G_n} = T$ est un temps d'arrêt pour $\sigma(t^+)$. Or d'après la quasi continuité à gauche

$$X(D_{G_n}) \to X(T) \quad \text{p. s.}$$

De plus, $X(D_{G_n}) \in \overline{G}_n$ sur $\{D_{G_n} < \infty\}$. Par suite,

$$X(T) \in \bigcap \overline{G}_n = K \quad \text{p. s. sur } \{T < \infty\} .$$

Par suite, $D_K < T$ p. s. sur $\{T < \infty\}$ et $D_{G_n} \nearrow D_K$.

Il en résulte que D_K est un (ζ_t) temps d'arrêt.

Il est immédiat, K étant fermé, que $\{D_K < t\} = R_t(K)$. Par suite, $R_t(K) \in \zeta_t$. De plus,

$$\{D_{G_n} \leqslant t\} \supset R_t(G_n) \supset R_t(K) = \{D_K \leqslant t\} ,$$

et par suite

$$P^\mu(R_t(G_n)) \searrow P^\mu(R_t(K)) .$$

LEMME 3.3. - Soit μ et t fixés , $\varphi(K) = P^\mu(R_t(K))$ est une capacité de G. CHOQUET sur les compacts de E .

(On rappelle que, par défintion, une capacité de G. CHOQUET est une application $\varphi : \mathcal{K} \to \underset{\sim}{R}^+$, où $\mathcal{K}$ est l'ensemble des compacts :

(i) Si A et $B \in \mathcal{K}$, $(A \subset B) \Rightarrow (\varphi(A) \leqslant \varphi(B))$;

(ii) Si $A \in \mathcal{K}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $G \supset A$ tel que, $\forall B \in \mathcal{K}$, $A \subset B \subset G$, $\varphi(B) - \varphi(A) < \varepsilon$.)

Démonstration.

$$R_t(A \cup B) - R_t(B) = \left\{\omega : \begin{array}{l} X_s(\omega) \in A \cup B \quad \text{pour un} \quad s \leq t \\ X_s(\omega) \notin B \quad \text{pour tout} \quad s \leq t \end{array}\right\}$$

$$R_t(A \cup B) - R_t(B) \subset \left\{\omega : \begin{array}{l} X_s(\omega) \in A \quad \text{pour un} \quad s \leq t \\ X_s(\omega) \notin A \cap B \quad \text{pour tout} \quad s \leq t \end{array}\right\} = R_t(A) - R_t(A \cap B)$$

Par suite :

$$\varphi(A \cap B) + \varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B) .$$

LEMME 3.4. - Pour tout borélien B , $\mathcal{R}_t(B) \in \zeta_t$.

Démonstration (valable également pour B analytique). - Si G est ouvert

$$\varphi_*(G) = \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset G} \varphi(K) \leq P^\mu(R_t(G)) .$$

Soit (K_n) une suite croissante de compacts de réunion G , alors

$$R_t(K_n) \nearrow R_t(G) \quad \text{et} \quad \varphi(K_n) \nearrow P^\mu(R_t(G)) ,$$

par suite, pour tout ouvert, $\varphi_*(G) = P^\mu(R_t(G))$.

Si B est un borélien ou un analytique, on sait, d'après un théorème de Gustave CHOQUET, que $\varphi_*(B) = \varphi^*(B)$; donc, pour tout n , il existe un compact K_n et un ouvert G_n , $K_n \subset B \subset G_n$, tels que

$$\varphi_*(G_n) - \varphi(K_n) = P^\mu[R_t(G_n)] - P^\mu[R_t(K_n)] < \frac{1}{n} .$$

On note $H_1 = \bigcup_n R_t(K_n)$, $H_2 = \bigcap_n R_t(G_n)$, ce sont deux ensembles de la tribu ζ_t qui vérifient $H_1 \subset R_t(B) \subset H_2$ et

$$P^\mu(H_2 \setminus H_1) \leq P^\mu[R_t(G_n) \setminus R_t(K_n)] < \frac{1}{n} , \quad \forall\, n \in \underset{\sim}{N}^* .$$

Par suite $P^\mu(H_2 \setminus H_1) = 0$. Comme la tribu ζ_t est complète, il en résulte que $R_t(B)$ appartient à ζ_t .

THÉORÈME 3.5. - Pour tout ensemble A , borélien ou analytique, de E_δ , les applications D_A et T_A sont des ζ_t-temps d'arrêt.

Démonstration. - Il suffit de montrer que, pour tout t , $\{\omega : D_A(\omega) < t\}$ appartient à ζ_t , or :

$$\{\omega : D_A(\omega) < t\} = \bigcup_{n \in \underset{\sim}{N}^*} R_{t-(1/n)}(A)$$

appartient à ζ_t .

THÉORÈME 3.6. - Si B est un borélien de E, alors, pour toute mesure μ, il existe une suite croissante de compacts (K_n) contenus dans B et une suite décroissante $\{G_n\}$ d'ouverts contenant B, telles que $D_{K_n} \searrow D_B$ P^μ-presque-sûrement sur Ω, et $D_{G_n} \nearrow D_B$ P^μ-presque-sûrement sur l'ensemble $\{D_B < \infty\}$.

De même, il existe une suite croissante de compacts de B, $\{K_n\}$ telle que $T_{K_n} \searrow T_B$ P^μ-presque-sûrement. La démonstration n'est pas donnée ici ([3], p. 130 et 132).

Dans le cas général, l'approximation par des ouverts G_n contenant B n'est pas possible pour le temps d'arrêt T. Par exemple, soit $\Omega = \underset{\sim}{R}^+ \cup \{\infty\}$; on prend $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_t$ égale à la tribu des boréliens de Ω, P^x la masse de Dirac au point x et, pour $t < \infty$, $\omega \in \underset{\sim}{R}$: $X_t(\omega) = \omega + t$. Si $B = \{0\}$, alors $P^0(T_B < \infty) = 0$, et si G est un ouvert contenant $\{0\}$, alors $P^0(T_G = 0) = 1$.

THÉORÈME 3.7. - On peut obtenir un résultat analogue pour les temps d'entrée T_A par une approximation à l'aide de presque-boréliens contenant A, à condition que les mesures μ ne chargent pas le sous-ensemble des points réguliers de A.

Ce résultat sera admis dans la suite ([3], p. 141).

4. Lien avec les balayées.

Définitions et notations. - Si A est un ensemble presque-borélien, on désigne par P_A le noyau défini ; et si f est une fonction universellement mesurable positive par

$$P_A f(x) = E^x\{f \circ X_{T_A} \underset{\sim}{1}_{T_A<\infty}\} .$$

La mesure $P_A(x\,dy)$ est la mesure harmonique de A en x. Une fonction f est excessive par rapport aux noyaux $(N_t)_{t\geq 0}$ si $N_t f \leq f$, $\forall\, t > 0$, et si

$$\lim_{t\to 0} N_t f = f .$$

LEMME 4.1. - Soit X un processus de Hunt tel que

$$U(x , K) = \int_0^\infty N_t(x , K)\, dt$$

soit borné en x pour tout compact K de E. Si f est une fonction excessive, alors il existe une suite (g_n) de fonctions bornées positives et universellement mesurables telles que (Ug_n) croisse vers f et telle que Ug_n soit bornée pour tout n.

Démonstration. - Soit K_n une suite croissante de compacts de réunion égale à E. On pose $h_n = n\, 1_{K_n}$, alors $Uh_n \to +\infty$ quand $n \to \infty$, et Uh_n est bornée pour tout n.

Si f est excessive, $f_n = \inf(f\,,\,Uh_n)$ est une fonction excessive bornée telle que $\lim_{t\to+\infty} N_t\, f_n = 0$. On note alors

$$g_{n,t} = \frac{1}{t}(f_n - N_t\, f_n) .$$

Pour tout n, $Ug_{n,t}$ croît vers f_n quand $t \to 0$.

THÉORÈME 4.2. - Soit f une fonction excessive ; si T est un temps d'arrêt, alors $N_T\, f \leq f$, et si A est un ensemble presque borélien, $P_A\, f$ est excessive.

En utilisant le lemme 4.1, on peut ne faire la démonstration que pour une fonction f de la forme Ug, où g est universellement mesurable bornée et positive.

On montre alors que

$$N_t\, N_T\, Ug(x) = E^x \int_{t+T\circ\theta_t}^{\infty} g(X_s)\, ds .$$

Si A est un ensemble presque borélien,

$$t + T_A \circ \theta_t \searrow T_A \quad \text{quand} \quad t \to 0$$

et donc

$$P_t\, P_A\, Ug \to P_A\, Ug .$$

LEMME 4.3. - Si f est une fonction excessive et presque borélienne, partout finie, si T est un temps d'arrêt (on l'admettra), défini par

$$T(\omega) = \inf\{t \mid \ f(X(\omega) - f(X_t(\omega)| > \varepsilon\} ,$$

alors, sur $T < \infty$,

$$|f(X_0) - f(X_T)| \geq \varepsilon \quad \text{p. s.}$$

On va montrer d'abord que si A est un ensemble presque borélien, et si $x \in A^r$, alors

$$\inf\{f(y)\ ,\ y \in A\} \leq f(x) \leq \sup\{f(y)\ ,\ y \in A\} .$$

Si K est un compact de A,

$$f(x) \geq P_K\, f(x) \geq \inf\{f(y)\ ,\ y \in A\} \times E^x\{1_{T_K} < \infty\} ,$$

et on peut choisir K tel que $E^x\{T_K < \infty\} = 1$.

Pour l'autre inégalité, on se place à nouveau dans le cas $f = Ug$, où g est universellement mesurable positive et bornée.

$$Ug(x) \leqslant E^x \int_0^{T_K} g(X_t)\,dt + \sup\{Ug(y)\ ,\ \ y \in A\}\ .$$

Or il existe une suite de compacts K_n de A tels que $P^x(T_{K_n} \to 0) = 1$, et comme $E^x \int_0^\infty g(X_t)\,dt < \infty$, il en résulte l'inégalité.

Soit alors x un point de B

$$B = \{y\ :\ \ f(y) > f(x) + \varepsilon\} \cup \{y\ :\ \ f(y) < f(x) - \varepsilon\}\ .$$

On a :

$$P^x(T = T_B) = 1\ ,$$

mais x n'appartient pas à B^r .

De plus, $X(T_B)$ appartient à $B \cup B^r$ p. s. sur $\{T_B < \infty\}$, ce qui implique que $B \cup B^r$ est contenu dans

$$\{y\ :\ \ f(y) \geqslant f(x) + \varepsilon\} \cup \{y\ :\ \ f(y) \leqslant f(x) - \varepsilon\}\ .$$

THÉORÈME 4.4. - Si f est une fonction excessive et presque borélienne, alors p. s., $t \longmapsto f(X_t)$ est continue à droite et a une limite à gauche sur $[0\ ,\infty[$.

La démonstration est faite pour une fonction f excessive presque borélienne et bornée (sinon, on multiplie par $q(x) = 1 - e^{-x}$, $q(\infty) = 1$). On se donne $\varepsilon > 0$, et on définit

$$T_0 = 0\ ,\quad T_n = T_{n-1} + T \circ \theta_{T_n}\ .$$

Si x appartient à E , et Λ à $\mathcal{G}_{T_n}$,

$$\begin{aligned} E^x(f(X_{T_{n+1}}) : \Lambda) &= E^x\{P_T\, f(X_{T_n}) : \Lambda) \\ &\leqslant E^x\{f(X_{T_n}) : \Lambda) \end{aligned}$$

Ceci signifie que $f(X_{T_n})$ est une surmartingale qui, de plus, vérifie

$$\sup_n E^x(f(X_{T_n})) < \infty\ ,$$

il en résulte que $f(X_{T_n})$ admet une limite quand $n \to \infty$ qui est presque-sûrement finie. D'après le lemme,

$$|f(X_{T_n}) - f(X_{T_{n+1}})| \geqslant \varepsilon \quad \text{p. s. sur} \quad \{T_{n+1} < \infty\}$$

$$P^x(\lim T_n = \infty) = 1 \quad \text{et} \quad \lim T_n = \infty \quad \text{p. s.}$$

Il en résulte que $t \longmapsto f(X_t(\omega))$ est continue à droite, et admet une limite à gauche.

THÉORÈME 4.5. - *Toute fonction excessive est presque borélienne.*

La démonstration est faite dans [2], p. 76, pour les fonctions α-presque-excessives.

THÉORÈME 4.6. - *Soient f et g deux fonctions excessives, A un ensemble presque borélien. Si g majore f sur A, g majore $P_A f$ partout.*

Démonstration. - On a $g \circ X_{T_A}(\omega) \geq f \circ X_{T_A}(\omega)$ pour ω $\{T_A < \infty\}$, puisque les fonctions excessives f et g sont continues à droite sur les trajectoires. Le processus $e^{-pt} g \circ X_t$ est une surmartingale, et on peut lui appliquer le théorème d'arrêt de Doob :

$$g(x) = E^x[g \circ X_0] \geq E^x[e^{-pT_A} g \circ X_{T_A} 1_{T_A<\infty}] \geq E^x[e^{-pT_A} f \circ X_{T_A} 1_{T_A<\infty}]$$
$$= P_A^p f(x)$$

et

$$\lim_{p\to 0} P_A^p f = P_A f .$$

THÉORÈME 4.7. - *Soient f une fonction excessive, et A un ensemble presque borélien. La réduite $P_A f$ est excessive, et majorée par f. De plus, $f(x)=P_A f(x)$ en tout point régulier de A.*

Démonstration. - En notant $P_A^p f(x) = E^x\{f \circ X_{T_A} 1_{T_A<\infty}\}$,

$$N_t(P_A^p f(x)) = N_t[E^x[e^{-pT_A} f \circ X_{T_A} 1_{T_A<\infty}]] .$$

Or,

$$N_t(P_A^p f(x)) = E^x[e^{-pT_A} f \circ X_{T_A} \circ \theta_t 1_{T_A\circ\theta_t<\infty}] .$$

On pose $S_t = T_A \circ \theta_t + t$, on montre que

$$f \circ X_{T_A} \circ \theta_t(\omega) = f \circ X_{S_t}(\omega) .$$

De plus, S_t est un temps d'arrêt qui décroît vers T_A quand $t \to 0$. En utilisant à nouveau le théorème d'arrêt de Doob,

$$N_t(P_A f(x)) \leq E^x[f \circ X_{T_A} 1_{T_A<\infty}] = P_A f(x) .$$

D'autre part, quand t tend vers 0, d'après le lemme de Fatou et la continuité à droite sur les trajectoires,

$$P_A f(x) \leq \lim_{t\to 0} \inf N_t(P_A f(x)) .$$

Par suite,

$$P_A f(x) = \lim_{t\to 0} N_t(P_A f(x)) .$$

Donc $P_A f$ est N_t-excessive. L'inégalité $f(x) \geqslant P_A f$ est un cas particulier du théorème précédent. Si x est régulier pour A, alors $P^x[T_A = 0] = 1$, donc

$$E^x[f \circ X_{T_A} 1_{T_A<\infty}] = f(x) .$$

THÉORÈME 4.8 (**HUNT**). - Soient A un ensemble presque borélien et f une fonction excessive. L'enveloppe inférieure de l'ensemble des fonctions excessives qui majore f sur A est égale à $P_A f$, sauf éventuellement sur $A \cap A^i$, à condition que E soit réunion d'une suite croissante d'ensembles E_n mesurables, dont les potentiels sont bornés.

Démonstration. - On va montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g excessive, majorant f sur A, et

$$g(x) \leqslant P_A f(x) + \varepsilon .$$

La démonstration sera faite dans le cas où $A \subset E$, et où f est majoré sur A par un potentiel de fonction $\varphi = Uh$ borné sur E'.

LEMME 4.9 (voir MEYER [3], p. 141). - Si A est un ensemble presque borélien, μ une loi qui ne charge pas $A \setminus (A^r)$, il existe une suite H_n de presque boréliens contenant A tels que :

1° Tout point de H_n est régulier pour H_n ;

2° $T_{H_n}(\omega) = T_A(\omega)$, sauf pour un nombre fini de n, cette égalité étant vraie P^μ-p.-s. sur $\{T_A < \infty\}$.

On considère ces ensembles H_n relatifs à la mesure ε_x. On pose

$$G_n = H_n \quad \{f < \varphi + \varepsilon\} .$$

$A \subset G_n$, et tout point de A est régulier pour G_n. De plus, $T_{G_n} = T_A$ pour $n \notin (0 , k)$. Par suite,

$$f \circ X_{T_{G_n}} \leqslant \varphi \circ X_{T_{G_n}} + \varepsilon \quad \text{sur} \quad \{T_{G_n} < +\infty\} .$$

On a donc, puisque f est continue à droite sur les trajectoires,

$$\lim_n E^x[f \circ X_{T_{G_n}} 1_{T_A<\infty}] = E^x[f \circ X_{T_A} 1_{T_A<\infty}] .$$

D'autre part, φ étant bornée,

$$\lim_{t\to\infty} E^x(\varphi \circ X_t) = 0 ,$$

donc $\varphi \circ X_t \to 0$ p. s. quand $t \to \infty$ (c'est une propriété d'un potentiel de fonction). Par suite,

$$\limsup E^x(f \circ X_{T_{G_n}} 1_{T_{G_n}<\infty}] \leqslant E^x(f \circ X_{T_A} 1_{T_A<\infty}] + \varepsilon$$

ce qui s'écrit encore

$$\limsup P_{G_n} f(x) \leqslant P_A f(x) + \varepsilon .$$

THÉORÈME 4.10. - <u>Pour tout ensemble presque borélien</u> $A \subset X$, <u>et toute fonction hyperharmonique</u> $u \geqslant 0$ <u>sur</u> X ,

$$P_A u = \hat{R}_u^A .$$

<u>Démonstration</u>. - On a démontré, en théorie du potentiel, que les fonctions excessives et les hyperharmoniques positives coïncident. On a montré que $P_A u$ est excessive si u est excessive, et vérifie :

$$P_A u \leqslant R_u^A , \text{ donc } P_A u \leqslant \hat{R}_u^A \leqslant R_u^A .$$

De plus, si $x \in A^r$, $P_A u(x) = u(x) = \hat{R}_u^A(x)$, et on utilise le théorème de théorie du potentiel qui donne l'égalité

$$\hat{R}_u^A(x) = R_u^A(x) \quad \text{si} \quad x \in \complement A .$$

Par suite, $P_A u = \hat{R}_u^A$ sur $A^r \cup \complement A = \complement(A \cap A^i)$, et cet ensemble est finement dense dans E .

Ces deux fonctions (excessives ou hyperharmoniques) sont donc finement continues sur E , et sont donc égales.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (Heinz). - Harmonic spaces and associated Markov processes, Centro internazionale matematico estivo, 1° ciclo : Potential theory [1969. Stresa], p. 23-67. - Roma, Cremonese, 1970.

[2] BLUMENTHAL (R. M.) and GETOOR (R. K.). - Markov processes and potential theory. - London, Academic Press, 1968 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 29).

[3] MEYER (Paul-André). - Processus de Markov. - Berlin, Springer-Verlag, 1967 (Lecture Notes in Mathematics, 26).

(Texte reçu le 3 juillet 1973)

Danièle DEHEN
70 rue Monge
75005 PARIS