SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

JEAN GUILLERME

# Espaces harmoniques et processus de Markov

*Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel*, tome 14 (1970-1971), exp. nº 15, p. 1-31

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1970-1971__14__A7_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
14e année, 1970-1972, n° 15, 31 p.



16 décembre 1971 et 6 janvier 1972

# ESPACES HARMONIQUES ET PROCESSUS DE MARKOV

par Jean GUILLERME

(d'après Heinz BAUER [2])

## Introduction.

On expose ici les quatre premiers paragraphes d'un cours de H. BAUER [2], faisant la liaison entre fonctions surharmoniques et fonctions excessives d'un semi-groupe.

Les paragraphes 1 à 4 sont une introduction à la théorie locale du potentiel ; l'ouvrage de base est le livre de H. BAUER [1].

Le paragraphe 5, rédigé en collaboration avec Mmes E. CABALLERO et A. MACHADO, associe une mesure à un potentiel fini ; on pourra consulter les articles de Mme R.-M. HERVÉ ([8], chap. II), de P.-A. MEYER [9] et aussi de D. SIBONY [11], en particulier pour la démonstration de la proposition 5.5.

Pour les paragraphes 6 et 7, on s'est basé sur l'article de W. HANSEN [7], et sur le livre de P.-A. MEYER [10].

## 1. Définition d'un espace harmonique. Premières propriétés.

On considère un espace localement compact $\Omega$, à base dénombrable. On notera $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}_c$) la famille de tous les ouverts (resp. ouverts relativement compacts) de $\Omega$.

On se donne un faisceau d'espaces vectoriels $\mathcal{H}$, défini sur $\mathcal{U}$, qui à tout ouvert $\omega \in \mathcal{U}$ associe un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_\omega$ de l'espace $\mathcal{C}(\omega ; \underset{\sim}{R})$ des fonctions continues sur $\omega$, à valeurs réelles. Les espaces $\mathcal{H}_\omega$ $(\omega \in \mathcal{U})$ sont supposés satisfaire aux deux conditions :

(a) $\omega_1 \subset \omega_2$ implique $\mathcal{H}_{\omega_2}|_{\omega_1} \subset \mathcal{H}_{\omega_1}$ ;

(b) Toute fonction numérique $h$ sur $\omega$ ( $\omega$ fixé dans $\mathcal{U}$ ) telle que, pour tout $x \in \omega$, il existe un voisinage $\omega_x \in \mathcal{U}$ $(\omega_x \subset \omega)$ tel que $h|_{\omega_x} \in \mathcal{H}_{\omega_x}$, appartient à $\mathcal{H}_\omega$.

Les fonctions $h \in \mathcal{H}_\omega$ sont dites <u>harmoniques</u> dans $\omega$.

<u>Définition</u> 1.1. - Un ouvert $\delta \in \mathcal{U}_c$, de frontière $\delta^*$ non vide, est dit <u>régulier</u> si :

(a) Pour toute $f \in \mathcal{C}(\delta^* ; \underset{\sim}{R})$, il existe une unique fonction $H_f^\delta \in \mathcal{H}_\delta$, telle que, pour tout $x_0 \in \delta^*$, $\lim_{x \in \delta, x \to x_0} H_f^\delta(x)$ existe, et vaut $f(x_0)$ ;

(b) $H_f^\delta$ est positive lorsque $f \in \mathcal{C}(\delta^* ; \underset{\sim}{R})$ l'est.

Un ouvert régulier $\delta$, tel que $\overline{\delta}$ soit contenu dans un certain $\omega \in \mathcal{U}$, est dit <u>régulier dans</u> $\omega$.

Si $\delta$ est un ouvert régulier, et $x$ un point de $\delta$, l'application $f \to H_f^\delta(x)$ de $\mathcal{C}(\delta^*)$ dans $R$ est une forme linéaire positive, donc une mesure de Radon $\mu_x^\delta \geq 0$ sur $\delta^*$, dite <u>mesure harmonique de</u> $\delta$ <u>au point</u> $x$.

<u>Définition</u> 1.2. - Soit $\omega \in \mathcal{U}$ ; une fonction $u : \omega \to ]-\infty, +\infty]$ est dite <u>hyperharmonique</u> dans $\omega$, si :

(a) $u$ est semi-continue inférieurement dans $\omega$ ;

(b) Pour tout ouvert régulier $\delta$ dans $\omega$, et pour tout $x \in \delta$, on a

$$\int u \, d\mu_x^\delta \leq u(x) .$$

L'ensemble des fonctions hyperharmoniques dans $\omega$ est noté $\mathcal{H}_\omega^*$.

<u>Définition</u> 1.3. - On dit que le couple $(\Omega, \mathcal{H})$ est un <u>espace harmonique</u> si les trois axiomes suivants sont satisfaits :

<u>axiome</u> 1 (de base) : Les ouverts réguliers forment une base de la topologie de $\Omega$.

<u>axiome</u> 2 (de convergence) : Soient $\omega \in \mathcal{U}$, et $(h_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de fonctions de $\mathcal{H}_\omega$ ; $h = \sup_n h_n$ appartient à $\mathcal{H}_\omega$ dès que $h$ est finie sur une partie dense de $\omega$.

<u>axiome</u> 3 (de séparation) :

(a) $\mathcal{H}_\Omega^*$ sépare linéairement $\Omega$, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in \Omega, \quad x \neq y, \quad \exists u, v \in \mathcal{H}_\Omega^* : \quad u(x)\, v(y) \neq u(y)\, v(x) ;$$

(b) $\forall \omega \in \mathcal{U}_c$, $\exists h \in \mathcal{H}_\omega$, $h > 0$.

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{H})$ sera un espace harmonique.

On pose encore une définition.

<u>Définition</u> 1.4. - Soit $\omega \in \mathcal{U}$.

(a) On dit que $u \in \mathcal{H}_\omega^*$ est surharmonique dans $\omega$, si $u$ est finie sur une partie dense de $\omega$ ; l'ensemble des fonctions surharmoniques dans $\omega$ est noté $\mathcal{S}_\omega$ (on note aussi $\mathcal{S}_\Omega = \mathcal{S}$);

(b) On dit qu'une fonction $p \in \mathcal{S}_\omega$ est un potentiel dans $\omega$, si $p$ est positive, et si

$(h \in {}_+\mathcal{H}_\omega\ ,\ h \leqslant p)$ implique $(h = 0)$ ; $(h \in {}_+\mathcal{H}_\omega \Longleftrightarrow h \in \mathcal{H}_\omega$ et $h \geqslant 0)$ ;
l'ensemble des potentiels dans $\omega$ est noté $\mathcal{P}_\omega$ $(\mathcal{P} = \mathcal{P}_\Omega)$ .

Remarques.

1° Si $\omega \in \mathcal{U}$ , et si $(h_i)_{i\in I}$ est une famille filtrante croissante de fonctions de $\mathcal{H}_\omega$ , telles que $h = \sup_{i\in\omega} h_i$ soit finie sur une partie dense de $\omega$ , alors $h$ appartient à $\mathcal{H}_\omega$ .

2° Si $\omega \in \mathcal{U}$ , on a $\mathcal{H}_\omega = \mathcal{S}_\omega \cap (-\mathcal{S}_\omega) = \mathcal{H}^*_\omega \cap (-\mathcal{H}^*_\omega)$ .

3° Si $v$ appartient à $\mathcal{H}^*_\omega$ $(\omega \in \mathcal{U})$ , $v$ appartient à $\mathcal{S}_\omega$ si, et seulement si, pour tout ouvert régulier $\delta$ dans $\omega$ , et tout $x \in \delta$ , on a $\mu_x^\delta(v^{-1}(+\infty)) = 0$ .

4° $\mathcal{H}^*_\omega$ et $\mathcal{S}_\omega$ sont des cônes convexes stables par enveloppes inférieures (finies). Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille filtrante croissante de fonctions de $\mathcal{H}^*_\omega$ $(\omega \in \mathcal{U})$ , $u = \sup_{i\in I} u_i$ appartient aussi à $\mathcal{H}^*_\omega$ .

5° Pour tout $\omega \in \mathcal{U}$ , le couple $(\omega\ ,\ \mathcal{H}|_\omega)$ est aussi un espace harmonique $[\mathcal{H}|_\omega$ est la restriction aux ouverts contenus dans $\omega$ de l'application $\mathcal{H}]$ .

6° Soit $f_0$ une fonction de $\mathcal{C}(\Omega\ ;\ \underset{\sim}{R})$ , strictement positive. Notons ${}^{f_0}\mathcal{H}$ l'application qui, à tout ouvert $\omega \in \mathcal{U}$ , fait correspondre le sous-espace vectoriel $(1/f_0)\mathcal{H}_\omega$ de $\mathcal{C}(\omega\ ;\ \underset{\sim}{R})$ . Alors le couple $(\Omega\ ,\ {}^{f_0}\mathcal{H})$ est un espace harmonique ; d'où des notions de fonctions harmoniques (resp. hyperharmoniques), de mesure harmonique, d'ouverts réguliers dans cet espace, notions qui seront dites de fonctions $f_0$-harmoniques (resp. $f_0$-hyperharmoniques), de mesure $f_0$-harmonique, d'ouverts $f_0$-réguliers respectivement. Alors :

(a) Les ouverts $f_0$-réguliers sont les ouverts réguliers,

(b) La mesure $f_0$-harmonique d'un ouvert régulier $\delta$ , au point $x \in \delta$ , est $(1/f_0(x)).f_0.\mu_x^\delta$ ,

(c) Pour tout ouvert $\omega \in \mathcal{U}$ , les fonctions $f_0$-hyperharmoniques dans $\omega$ sont les fonctions $(1/f_0)u$ , où $u$ décrit $\mathcal{H}^*_\omega$ .

Ceci montre en particulier que si $f_0$ est surharmonique (resp. harmonique), les constantes positives sont $f_0$-surharmoniques (resp. les constantes sont $f_0$-harmoniques).

Afin d'arriver plus rapidement à l'essentiel, nous admettrons les propositions suivantes.

PROPOSITION 1.5. - $\Omega$ est un espace localement connexe, non compact. Toute composante connexe d'un ouvert régulier est un ouvert régulier.

PROPOSITION 1.6. - L'hyperharmonicité est une propriété locale, c'est-à-dire qu'une fonction $u$ d'un ouvert $\omega$ (fixé) dans $]-\infty, +\infty]$ est hyperharmonique dans $\omega$ si, et seulement si, $u$ est s. c. i. dans $\omega$ et si tout point $x \in \omega$ admet un système fondamental de voisinages réguliers $\delta$ de $x$ dans $\omega$, tels que $\int u \, d\mu_x^\delta \leqslant u(x)$.

COROLLAIRE 1.7. - Soient $v \in \mathcal{H}_\Omega^*$, $u \in \mathcal{H}_\omega^*$ $(\omega \in \mathcal{U})$ telles que

$$\liminf_{y \in \omega, y \to x} u(y) \geqslant v(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \omega^* .$$

Alors la fonction

$$w(x) = \begin{cases} \inf(u(x), v(x)) & \text{dans } \omega \\ v(x) & \text{dans } \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

est hyperharmonique dans $\Omega$.

COROLLAIRE 1.8. - Soient $u \in \mathcal{H}_\Omega^*$, et $\delta$ un ouvert régulier. Alors la fonction $u_\delta$, égale à $\int u \, d\mu_x^\delta$ dans $\delta$ et à $u$ ailleurs, est hyperharmonique ; de plus, $u_\delta$ est harmonique dans $\delta$, dès que $u$ est surharmonique dans $\Omega$.

Le premier corollaire se déduit facilement de la proposition 1.6, quant au second, il est une conséquence simple du premier. Si $u$ est une fonction finie sur une partie dense de $\omega \in \mathcal{U}$, la proposition 1.6 donne un critère local de surharmonicité.

## 2. Des outils de la théorie du potentiel. Le théorème de Riesz. Les principes du minimum.

Définition 2.1. - Soit $\omega \in \mathcal{U}$. Une fonction $v : \omega \to ]-\infty, +\infty]$ est dite presque hyperharmonique dans $\omega$, si

(a) $v$ est localement bornée inférieurement,

(b) $\int^* v \, d\mu_x^\delta \leqslant v(x)$ pour tout ouvert régulier $\delta$ dans $\omega$, et pour tout $x \in \delta$.

Une fonction presque hyperharmonique dans $\omega$ est dite presque surharmonique si elle est finie sur une partie dense de $\omega$.

PROPOSITION 2.2. - Soit $v$ une fonction presque hyperharmonique dans $\omega \in \mathcal{U}$. Alors la régularisée s. c. i. $\hat{v}$ de $v$ est hyperharmonique dans $\omega$ et

$$\hat{v}(x) = \sup_{\delta \in \mathcal{B}_x} \int^* v \, d\mu_x^\delta \quad \underline{\text{pour tout}} \quad x \in \omega \, .$$

<u>où</u> $\mathcal{B}_x$ <u>est la famille des ouverts réguliers dans</u> $\omega$ <u>contenant</u> $x$ .

<u>Démonstration</u>. - Soit $\delta$ un ouvert régulier dans $\omega$ . Montrons que la fonction $x \to \int^* v \, d\mu_x^\delta$ est hyperharmonique dans $\delta$ .

Si $v_n = \inf(v \, , \, n)$ , on a

$$\int^* v \, d\mu_x^\delta = \sup_n \int^* v_n \, d\mu_x^\delta \quad \text{dans} \quad \delta \, .$$

Si $g$ est une fonction bornée dans $\omega^*$ , on a

$$\int^* g \, d\mu_x^\delta = \inf_{\ell \text{ sci} \geq g, \ell \text{ bornée}} \int \ell \, d\mu_x^\delta \quad \text{dans} \quad \delta \, .$$

Enfin, pour une telle fonction $\ell$ , on a

$$\int \ell \, d\mu_x^\delta = \sup_{h \leq \ell, h \text{ continue}} \int h \, d\mu_x^\delta \quad \text{dans} \quad \delta \, .$$

L'axiome de convergence montre successivement l'harmonicité (dans $\delta$ ) des fonctions $x \to \int \ell \, d\mu_x^\delta$ , puis de $x \to \int^* g \, d\mu_x^\delta$ , donc des fonctions $x \to \int^* v_n \, d\mu_x^\delta$ . La remarque 4° du § 1 permet alors de conclure à l'hyperharmonicité (dans $\delta$ ) de $x \to \int^* v \, d\mu_x^\delta$ ; en particulier, cette fonction est donc s. c. i. Or on a les inégalités :

$$v(x) \geq \int^* v \, d\mu_x^\delta \geq \int \hat{v} \, d\mu_x^\delta \quad \text{dans} \quad \delta \, .$$

On en déduit

$$\hat{v}(x) \geq \int \hat{v} \, d\mu_x^\delta \quad \text{dans} \quad \delta \, ,$$

et $\hat{v}$ est donc hyperharmonique dans $\omega$ ( $\delta$ étant un ouvert régulier, dans $\omega$ , arbitraire), et l'on a évidemment

$$\hat{v}(x) \geq \sup_{\delta \in \mathcal{B}_x} \int^* v \, d\mu_x^\delta \quad \text{pour tout} \quad x \in \omega \, .$$

(Toujours, puisque $x \to \int^* v \, d\mu_x^\delta$ est s. c. i. dans $\delta$).

Soit $x \in \omega$ fixé, montrons l'inégalité inverse. Pour cela, soit $\alpha < \hat{v}(x)$ ; il existe un voisinage $V$ de $x$ , $V \in \mathcal{U}_c$ , et une fonction $h \in \mathcal{H}_V$ telle que $h > 0$ et $h(x) = 1$ (d'après l'axiome de séparation). Ainsi $\alpha h(x) < \hat{v}(x)$ , donc $\hat{v}$ étant s. c. i., il existe un voisinage $\delta$ , régulier de $x$ , $\overline{\delta} \subset V$ , tel que l'on ait encore $\alpha h(y) < \hat{v}(y)$ pour tout $y \in \overline{\delta}$ . On a alors

$$\alpha = \alpha \int h \, d\mu_x^\delta \leq \int \hat{v} \, d\mu_x^\delta \leq \int v \, d\mu_x^\delta \, ,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

On déduit alors très simplement de cette proposition un corollaire.

COROLLAIRE 2.3.

1° Si $v$, $v_1$ et $v_2$ sont des fonctions presque hyperharmoniques et si

$$\lambda \in [0, +\infty[ ,$$

les fonctions $\lambda v$ et $v_1 + v_2$ sont presque hyperharmoniques, et $\widehat{\lambda v} = \lambda \hat{v}$, $\widehat{v_1 + v_2} = \hat{v}_1 + \hat{v}_2$.

2° Si $(v_n)_n$ est une suite croissante de fonctions presque hyperharmoniques, $v = \sup_n v_n$ est presque hyperharmonique, et $\hat{v} = \sup_n \hat{v}_n$.

3° Si $(v_i)_{i\in I}$ est une famille localement bornée inférieurement de fonctions presque hyperharmoniques, $v = \inf_i v_i$ est presque hyperharmonique, et $\hat{v}$ est la plus grande minorante hyperharmonique de la famille $(v_i)_{i\in I}$.

4° Si $v$ est une fonction presque hyperharmonique, et si $\delta$ est un ouvert régulier, la fonction $v_\delta$, égale à $\int^* v \, d\mu_x^\delta$ dans $\delta$ et à $v$ ailleurs, est presque hyperharmonique.

Définition 2.4. - Un ensemble $\mathfrak{F}$ de fonctions surharmoniques dans $\omega \in \mathfrak{U}$ est dit saturé dans $\omega$, si

(a) $\mathfrak{F}$ est filtrant décroissant,

(b) Pour tout ouvert régulier $\delta$ dans $\omega$, et pour tout $v \in \mathfrak{F}$, $v_\delta$ appartient encore à $\mathfrak{F}$ ( $v_\delta$ est défini au corollaire 1.8).

PROPOSITION 2.5. - Soit $\mathfrak{F}$ un ensemble saturé de fonctions de $\mathfrak{S}_\omega$. Alors, si $h = \inf_{v\in\mathfrak{F}} v$ est $> -\infty$ sur une partie dense de $\omega$, $h$ est harmonique dans $\omega$.

C'est une conséquence immédiate du corollaire 1.8 et de l'axiome de convergence.

THÉORÈME 2.6 [RIESZ]. - Soit $u \in {}_+S_\Omega$ une fonction surharmonique positive dans $\Omega$. $u$ s'écrit d'une seule manière sous la forme $u = p + h$, où $p$ est un potentiel dans $\Omega$, et $h$ une fonction harmonique dans $\Omega$. $h$ est la plus grande minorante sousharmonique de $u$.

Démonstration. - Une fonction $v$ est dite sousharmonique si $-v$ est surharmonique. Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des minorantes sousharmoniques de $u$ ; $-\mathfrak{F}$ est saturé, donc, d'après la proposition précédente, $h = \sup_{v\in\mathfrak{F}} v$ est harmonique (et $h \in \mathfrak{F}$ ). Soit $p = u - h$ ; $p$ est un potentiel car, si $t \in {}_+\mathcal{H}_\Omega$ est $\leqslant p$, $t + h$ est $\leqslant u$, donc $t + h \in \mathfrak{F}$, et $t = 0$ d'après la définition de $h$.

Supposons que l'on ait $p + h = u = p' + h'$ avec $p, p' \in \mathcal{P}_\Omega$ et $h, h' \in \mathcal{H}_\Omega$.

On a alors

$$p \geqslant h' - h \quad \text{et} \quad p \quad \text{est un potentiel, donc} \quad h' - h \leqslant 0$$

$$p' \geqslant h - h' \quad \text{et} \quad p' \quad \text{est un potentiel, donc} \quad h - h' \leqslant 0 \; .$$

Il en résulte $h = h'$ et $p = p'$ .

COROLLAIRE 2.7. - <u>Soit</u> $p \in {}_+\mathcal{S}_\Omega$ . <u>Alors</u> $p$ <u>est un potentiel si</u>, <u>et seulement si</u>, $u \in \mathcal{H}^*_\Omega$ , <u>et</u> $u + p \geqslant 0$ <u>implique</u> $u \geqslant 0$ .

<u>Démonstration</u>.

1° On suppose que $p$ est un potentiel, et $u \in \mathcal{H}^*_\Omega$ , $u + p \geqslant 0$ . Soit

$$u' = \inf(u \; , \; p) \; ;$$

alors $- u'$ est une minorante sousharmonique de $p$ , donc $- u'$ est $\leqslant 0$ ; par suite, $u$ est $\geqslant 0$ .

2° Soit $h$ la partie harmonique de $p$ , et supposons

$$\{u \in \mathcal{H}^*_\Omega \; , \quad u + p \geqslant 0 \Rightarrow u \geqslant 0\} \; ;$$

en prenant pour $u$ la fonction $- h$ , on obtient $- h \geqslant 0$ , donc $h = 0$ et $p$ est un potentiel.

PROPOSITION 2.8.

(a) $\mathcal{P}$ <u>est un cône convexe stable par enveloppes inférieures</u> (<u>finies</u>).

(b) <u>Si</u> $(p_n)_n$ <u>est une suite de potentiels</u>, <u>et si</u> $p = \sum_{n \geqslant 0} p_n$ <u>est fini sur une partie dense de</u> $\Omega$ , $p$ <u>est un potentiel</u>.

<u>Démonstration</u>. - On a évidemment $\lambda\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ $(\lambda \geqslant 0)$ et $\inf(\mathcal{P} \; , \; \mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ .

Plaçons-nous sous les hypothèses (b). $p$ est alors **surharmonique** ; soient $h$ la partie harmonique de $p$ et $D = \{x \in \Omega \mid p(x) < + \infty\}$ . On a :

$$- h + p = - h + \sum_{n \geqslant 1} p_n + p_0 \geqslant 0 \; ,$$

et $p_0$ est un potentiel. D'après le corollaire précédent, il s'en suit que

$$- h + \sum_{n \geqslant 1} p_n \geqslant 0 \; .$$

On voit de même que, pour tout $n_0 \geqslant 0$ , $- h + \sum_{n \geqslant n_0} p_n \geqslant 0$ . Or, pour tout $x \in D$ et pour tout $\varepsilon > 0$ , il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que $\sum_{n \geqslant n_0} p_n(x) \leqslant \varepsilon$ ; donc $h(x)$ est $\leqslant \varepsilon$ sur $D$ , pour tout $\varepsilon > 0$ . Ainsi $h = 0$ sur $D$ qui est dense dans $\Omega$ ; comme $h$ est continue (car harmonique), $h \equiv 0$ , et $p$ est un potentiel ; (b) est démontré.

On en déduit $\mathcal{P} + \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ , ce qui achève la démonstration de la proposition.

THÉORÈME 2.9 : Les principes du minimum. - Soit $u \in \mathcal{H}^*_\omega$ $(\omega \in \mathcal{U})$ tel que $\liminf_{x \in \omega, x \to y} u(x) \geq 0$ pour tout $y \in \omega^*$ .

(a) Si $\omega \in \mathcal{U}_c$ , alors $u$ est $\geq 0$ (dans $\omega$ ),

(b) S'il existe un potentiel $p$ tel que $u + p$ soit $\geq 0$ sur $\omega$ , alors $u$ est $\geq 0$ (dans $\omega$ ).

Nous ne démontrerons pas le critère (a). Quant au critère (b), il se déduit des corollaires 1.7 et 2.7 en considérant la fonction égale à $\inf(u , 0)$ dans $\omega$ , et à 0 ailleurs.

Si $u$ est hyperharmonique, nous désignerons par $C(u)$ le "support harmonique" de $u$ , c'est-à-dire le complémentaire du plus grand ouvert dans lequel $u$ est harmonique.

COROLLAIRE 2.10 : Principe de domination.

(a) Soit $u \in {}_+\mathcal{H}^*_\Omega$ , et soit $p$ un potentiel continu sur $\Omega$ . Alors ($u \geq p$ sur $C(p)$ ) implique ( $u \geq p$ dans $\Omega$ ).

(b) Si 1 est surharmonique, et si $p$ est un potentiel continu sur $\Omega$ , on a l'égalité

$$\sup p(C(p)) = \sup p(\Omega) .$$

Ce corollaire est une conséquence facile du principe du minimum (b).

## 3. Notion de réduite. Théorème d'approximation.

Définition 3.1. - Soit $f$ une fonction numérique définie sur $\Omega$ . On appelle réduite de $f$ sur $\Omega$ , et l'on note $R_f$ , l'enveloppe inférieure des majorantes hyperharmoniques de $f$ . Si $A$ est une partie de $\Omega$ , on appelle réduite de $f$ sur $A$ , la fonction, notée $R^A_f$ , égale à $R_{f.1_A}$ .

Le corollaire 2.3 montre donc que, pour toute fonction $f$ , localement bornée inférieurement, la réduite $R_f$ est une fonction presque hyperharmonique.

Notons $S(f)$ le support de la fonction numérique $f$ .

PROPOSITION 3.2. - Soit $f$ une fonction s. c. i. $\geq 0$ sur $\Omega$ , admettant une majorante surharmonique. Alors la réduite $R_f$ est surharmonique $\geq 0$ , harmonique dans le complémentaire du support de $f$ (c'est-à-dire $C(R_f) \subset S(f)$ ) et continue

<u>aux points où</u> $f$ <u>est continue</u>.

Nous nous bornerons à remarquer que la surharmonicité de $R_f$ résulte du fait que $f$ est s. c. i. et de la proposition 2.2, et que l'inclusion $C(R_f) \subset S(f)$ résulte de ce que l'ensemble des $u \in S_\Omega$ , $u \geq f$ sur $\Omega$ , est saturé dans $\Omega \setminus S(f)$ et de la proposition 2.5.

<u>Définition</u> 3.3. - On dit que l'espace $(\Omega , \mathcal{H})$ est <u>fortement harmonique</u> si, pour tout $x \in \Omega$ , il existe un potentiel $p$ tel que $0 < p(x)$ .

Si $(\Omega , \mathcal{H})$ est un espace fortement harmonique, pour tout $x \in \Omega$ , il existe un potentiel $p$ tel que $0 < p(x) < +\infty$ ; cela résulte de ce que, si $p$ est un potentiel tel que $0 < p(x)$ , on a $p(x) = \sup_{\delta \in \mathcal{B}_x} p_\delta$ (proposition 2.2) et de ce que chaque $p_\delta$ est lui-même un potentiel.

On peut montrer que pour tout $\omega \in \mathcal{U}_c$ , l'espace $(\omega , \mathcal{H}|_\omega)$ est fortement harmonique.

Notons $\mathcal{C}_c(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact, et $\mathcal{C}_0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues tendant vers $0$ à l'infini.

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposerons toujours que $(\Omega , \mathcal{H})$ est <u>fortement harmonique</u>.

Comme conséquences de la proposition précédente, nous avons, par exemple, les résultats suivants.

COROLLAIRE 3.4. - <u>Soit</u> $f \in \mathcal{C}_c^+(\Omega)$ . <u>Alors</u>

$$R_f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{C}(\Omega) \quad \underline{\text{et}} \quad C(R_f) \subset S(f) .$$

<u>Démonstration</u>. - $S(f)$ étant compact, et $(\Omega , \mathcal{H})$ fortement harmonique, on peut trouver un nombre fini de potentiels $p_1 , \ldots , p_n$ tels que $p = p_1 + \ldots + p_n$ soit $> 0$ sur $S(f)$ ; il existe alors $\lambda > 0$ tel que $\lambda p \geq f$ ; donc $R_f \in \mathcal{P}$ . La proposition 3.2 termine la démonstration.

COROLLAIRE 3.5. - <u>Il existe un potentiel continu strictement positif</u>. <u>De plus, si</u> 1 <u>est surharmonique, il existe un potentiel continu strictement positif et borné</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit $(\omega_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ouverts de réunion $\Omega$ , et tels que $\overline{\omega}_n \subset \omega_{n+1}$ . Pour tout $n \geq 1$ , soit $f_n \in \mathcal{C}_c^+(\Omega)$ avec $f_n = 1$ sur $\omega_n$ , et $S(f) \subset \omega_{n+1}$ , et soit $p'_n = R_{f_n}$ . En outre, choisissons $\lambda_n > 0$ de telle manière que $p_n = \lambda_n p'_n$ satisfasse à $\sup p_n(\omega_{n+1}) = 1$ . Alors $p = \sum_{n\geq 1} 1/n^2 \, p_n$ répond à la question comme on le vérifie facilement grâce au corollaire 3.4, à la proposition

2.8, et au principe de domination (corollaire 2.10) lorsque $1$ est surharmonique.

LEMME 3.6 (*). - <u>Soit</u> $p \in \mathcal{P} \cap \mathcal{C}(\Omega)$ <u>un potentiel continu. Il existe une suite décroissante</u> $(p_n)_{n\geq 1}$ <u>de potentiels continus tels que</u>

$$\forall\, n \geq 1 \ , \quad p - p_n \in \mathcal{C}_c^+(\Omega) \quad \underline{\text{et}} \quad \inf p_n = 0 \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $(\omega_n)_n$ une suite croissante d'ouverts de réunion $\Omega$, et soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions de $\mathcal{C}_c^+(\Omega)$ telles que $0 \leq f_n \leq 1$ et $f_n = 1$ sur $\omega_n$. Posons $p_n = R_{(1-f_n)p}$. Les $p_n$ ont les propriétés désirées :

$$((1 - f_n)p \leq p) \Rightarrow ((1 - f_n)p \leq p_n \leq p) \quad \text{et} \quad p_n \in \mathcal{P} \cap \mathcal{C}(\Omega) \ .$$

On déduit de ces inégalités que $p = p_n$ sur $\Omega \setminus S(f_n)$, donc que $p - p_n$ appartient à $\mathcal{C}_c^+(\Omega)$. D'autre part, $C(p_n)$ est inclus dans $S((1 - f_n)p) \subset \Omega \setminus \omega_n$, c'est-à-dire que $p_n$ est harmonique dans $\omega_n$ ; comme $p_{n+1} \leq p_n$ et $\bigcup_n \omega_n = \Omega$, $\inf_n p_n$ est harmonique dans $\Omega$, donc $\inf_n p_n = 0$.

THÉORÈME 3.7 : <u>Théorème d'approximation</u>. - <u>Soit</u> $\mathcal{P}_c$ <u>l'ensemble des potentiels continus sur</u> $\Omega$, <u>à support harmonique compact. Alors</u>

$$(\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_c) \cap \mathcal{C}_c(\Omega)$$

<u>est dense dans</u> $\mathcal{C}_0(\Omega)$ <u>pour la topologie de la convergence uniforme sur</u> $\Omega$.

<u>Démonstration</u>. - Pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$, soit

$$\mathcal{D}_\omega = \{d \in (\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_c) \cap \mathcal{C}_c(\Omega) \mid S(d) \subset \omega\} \ .$$

$\mathcal{D}_\omega$ possède les deux propriétés suivantes :

(a) Si $d_1 , d_2 \in \mathcal{D}_\omega$, alors $\sup(d_1 , d_2)$ et $\inf(d_1 , d_2)$ appartiennent aussi à $\mathcal{D}_\omega$,

(b) $\forall\, x , y \in \omega\ (x \neq y)$ , $\forall\, \alpha , \beta \in \underset{\sim}{R}$ , $\exists\, d \in \mathcal{D}_\omega$ : $d(x) = \alpha$ et $d(y) = \beta$.

La propriété (a) résulte des égalités

$$\sup(d_1 , d_2) = \tfrac{1}{2}(d_1 + d_2 + |d_1 - d_2|)$$
$$\inf(d_1 , d_2) = \tfrac{1}{2}(d_1 + d_2 - |d_1 - d_2|)$$

et si $d \in \mathcal{D}_\omega$, $d = p_1 - p_2$, $|d| = p_1 + p_2 - 2\inf(p_1 , p_2)$.

Pour montrer la propriété (b), on utilise l'existence d'un potentiel strict continu ([1], p. 75), d'où l'on déduit (grâce au corollaire 4.6 ci-après) que, pour

(*) Il n'est pas nécessaire de supposer $(\Omega , \mathcal{H})$ fortement harmonique.

$x \neq y$ $(x , y \in \omega)$ , il existe $d \in \mathcal{D}_\omega$ tel que $d(x) > 0$ et $d(y) = 0$ . On obtient alors immédiatement la propriété (b).

Le théorème découle alors de la proposition 2 de N. BOURBAKI ([3], p. 54).

4. L'ordre spécifique. Le théorème de partition.

On définit sur $\mathcal{S}^+$ , la relation $\prec$ en posant :

$$(u_1 , u_2 \in \mathcal{S}^+ , \quad u_1 \prec u_2) \Longleftrightarrow (\exists\, v \in \mathcal{S}^+ : \quad u_2 = u_1 + v) .$$

Cette relation est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}^+$ , ordre appelé ordre spécifique sur $\mathcal{S}^+$ .

THÉORÈME 4.1. - $\mathcal{S}^+$ est complètement réticulé pour l'ordre spécifique.

Nous renvoyons à [4], p. 89, pour la démonstration de ce théorème.

Des propriétés de l'ordre spécifique ou du théorème précédent, on déduit facilement les énoncés suivants ;

1° Soient $v , v_1 , v_2 \in \mathcal{S}^+$ (resp. $\mathcal{P}$) ,

$$(v \prec v_1 + v_2) \Longrightarrow (\exists\, u_1 , u_2 \in \mathcal{S}_+ \text{ (resp. } \mathcal{P}) \text{ tels que } v = u_1 + u_2 , \quad u_1 \prec v_1 , \quad u_2 \prec v_2) .$$

2° Soient $v , u \in \mathcal{S}^+$ et $\omega$ un ouvert de $\Omega$ .

$$(v \prec u \text{ et } u \text{ harmonique dans } \omega) \Longrightarrow (v \text{ harmonique dans } \omega) .$$

3° Soient $u_1 , u_2 \in \mathcal{S}^+$ , $u_1 = p_1 + h_1$ , $u_2 = p_2 + h_2$ les décompositions de $u_1$ et $u_2$ en somme d'un potentiel et d'une fonction harmonique (théorème 2.6). Alors

$$(u_1 \prec u_2) \Longleftrightarrow (\{p_1 \prec p_2 \text{ et } h_1 \prec h_2\}) .$$

Pour une famille $(u_i)_{i\in I}$ de fonctions de $\mathcal{S}^+$ , désignons par $\sup_s u_i$ $(i \in I)$ lorsqu'elle existe (resp. $\inf_s u_i$ $(i \in I)$ ) la borne supérieure (resp. inférieure), pour l'ordre spécifique, de la famille $(u_i)_{i\in I}$ .

On a alors les énoncés suivants.

PROPOSITION 4.2. - Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions de $\mathcal{S}^+$ . Si $u = \sup_s u_i$ existe (ce qui est le cas, d'après le théorème 4.1, lorsque la famille $(u_i)_{i\in I}$ est majorée pour l'ordre spécifique), et si chacune des fonctions $u_i$ est harmonique dans un même ouvert $\omega \in \mathcal{U}$ , alors $u$ est harmonique dans $\omega$ .

PROPOSITION 4.3. - Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions de $\mathcal{S}^+$ .

(a) <u>Si la famille</u> $(u_i)_{i\in I}$ <u>est filtrante croissante pour l'ordre spécifique, et majorée pour l'ordre naturel par une fonction de</u> $\mathcal{S}^+$ , <u>on a</u>

$$\sup_{s,\, i\in I} u_i = \widehat{\sup_{i\in I} u_i} \quad (\in \mathcal{S}^+) \; ;$$

(b) <u>Si la famille</u> $(u_i)_{i\in I}$ <u>est filtrante décroissante pour l'ordre spécifique, on a</u>

$$\inf_{s,\, i\in I} u_i = \widehat{\inf_{i\in I} u_i} \quad (\in \mathcal{S}^+) \; ;$$

<u>en outre, en tout point</u> $x$ <u>tel que</u> $\inf_{i\in I} u_i(x)$ <u>soit fini, on a</u>

$$\inf_{s,\, i\in I} u_i(x) = \inf_{i\in I} u_i(x) \; .$$

La proposition 4.2 se démontre en écrivant $u = u_i + v_i$ $(v_i \in \mathcal{S}^+)$ pour tout $i \in I$ ; d'où, pour un ouvert régulier $\delta$ dans $\omega$ :

$$u_\delta = u_i + (v_i)_\delta \text{ , ce qui implique } u_\delta \succ u \; ;$$

donc $u = u_\delta$ , $u$ est harmonique dans $\delta$ , puis dans $\omega$ .

Montrons par exemple la propriété (a) de la proposition 4.3.

Soient $i_0$ choisi quelconque dans $I$ , et $I_0$ l'ensemble des $i \in I$ , pour lesquels $u_i \succ u_{i_0}$ . Pour tout $i \in I_0$ , soit $v_i \in \mathcal{S}^+$ tel que $u_i = u_{i_0} + v_i$ ; il s'ensuit l'égalité :

$$\sup_{i\in I_0} u_i = u_{i_0} + \sup_{i\in I_0} v_i \; .$$

Mais d'après les hypothèses, $\sup_{i\in I_0} u_i = \sup_{i\in I} u_i$ appartient à $\mathcal{S}^+$ ainsi que $\sup_{i\in I_0} v_i$ . Cela montre donc l'inégalité

$$\widehat{\sup_{i\in I} u_i} \succ u_{i_0} \quad (\text{pour tout } i_0 \in I\,) \; .$$

Le théorème 4.1 permet de conclure $\widehat{\sup_{i\in I} u_i} \succ \sup_s u_i$ $(i \in I)$ . L'inégalité inverse est triviale (ou plus exactement l'inégalité $\sup_{s,\, i\in I} u_i \geqslant \sup_{i\in I} u_i$ ).

Nous allons maintenant énoncer un théorème, dû à R.-M. HERVÉ, sous une forme légèrement affaiblie.

THÉORÈME 4.4 ([1], p. 155). - <u>Soit</u> $u \in \mathcal{S}^+$ , <u>et soit</u> $\omega$ <u>un ouvert de</u> $\Omega$ . <u>Il existe deux fonctions</u> $PH_u^\omega$ <u>et</u> $RS_u^\omega$ <u>appartenant à</u> $\mathcal{S}^+$ <u>telles que</u>

$u = PH_u^\omega + RS_u^\omega$ <u>dans</u> $\Omega$ ,

$PH_u^\omega = \sup_s\{v \mid v \in \mathcal{S}^+ , v < u , v \text{ harmonique dans } \omega\}$ , donc $PH_u^\omega$ est harmonique dans $\omega$ , c'est-à-dire $C(PH_u^\omega) \subset \Omega \setminus \omega$ .

$RS_u^\omega$ est harmonique dans $\Omega \setminus \overline{\omega}$ , c'est-à-dire $C(RS_u^\omega) \subset \overline{\omega}$ .

On dit que $RS_u^\omega$ est la restriction spécifique de $u$ à $\omega$ . D'après les propositions 4.2 et 4.3, on a aussi :

$$PH_u^\omega = \sup\{v \mid v \in \mathcal{S}^+ , \ v \prec u , \ C(v) \subset \Omega \setminus \omega\} .$$

COROLLAIRE 4.5 : <u>Propriété de décomposition</u>. - <u>Soit</u> $(\omega_i)_{1\leq i\leq n}$ <u>un recouvrement ouvert fini de</u> $\Omega$ , <u>et soit</u> $u \in \mathcal{S}^+$ . <u>Il existe des fonctions</u> $u_1 , \dots , u_n$ <u>appartenant à</u> $\mathcal{S}^+$ <u>telles que</u>

$$u = u_1 + \dots + u_n \ \underline{\text{et}} \ C(u_i) \subset \omega_i \qquad (i = 1 , \dots , n) .$$

<u>Démonstration</u>. - L'espace $\Omega$ étant normal, il existe un recouvrement ouvert $(\omega_i')_{1\leq i\leq n}$ tel que $\overline{\omega_i'} \subset \omega_i$ $(i = 1 , \dots , n)$ .

Appliquons le théorème de partition à $u$ et $\omega_1'$ :

$$u = v_1 + v_1' , \quad C(v_1) \subset \overline{\omega_1'} , \quad C(v_1') \subset \Omega \setminus \omega_1' \qquad (v_1 = RS_u^{\omega_1'} , \ v_1' = PH_u^{\omega_1'}) ,$$

puis à $v_1'$ :

$$v_1' = v_2 + v_2' , \quad C(v_2) \subset \overline{\omega_2'} , \quad C(v_2') \subset \Omega \setminus \omega_2' ;$$

mais $v_2' \prec v_1'$ implique que $v_2'$ soit aussi harmonique dans $\omega_1'$ ; donc

$$C(v_2') \subset \Omega \setminus (\omega_1' \cup \omega_2') .$$

Après $n$ applications du théorème de partition, on obtient donc des fonctions $v_1 , \dots , v_n , v_n'$ telles que

$$u = v_1 + \dots + v_n + v_n' \ \text{ et } \ C(v_i) \subset \overline{\omega_i'} \qquad (i = 1 , 2 , \dots , n)$$

$$C(v_n') \subset \Omega \setminus (\omega_1' \cup \dots \cup \omega'_n) = \emptyset ,$$

donc $v_n'$ est harmonique dans $\Omega$ . Alors les fonctions $u_1 = v_1 , \dots , u_{n-1} = v_{n-1}$ , $u_n = v_n + v_n'$ remplissent les conditions souhaitées.

COROLLAIRE 4.6. - <u>Tout potentiel</u> $p$ <u>est l'enveloppe supérieure</u> (<u>pour les ordres naturels et spécifiques</u>) <u>d'une suite croissante</u> (<u>pour</u> $\prec$ ) <u>de potentiels</u> $p_n \prec p$ <u>à supports harmoniques compacts</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit $(\omega_n)_n$ une suite croissante d'ouverts relativement compacts de réunion $\Omega$ . Posons $p_n = RS_p^{\omega_n}$ ; les $p_n$ répondent à la question ; en effet, $p_n$ est un potentiel à support harmonique $C(p_n) \subset \overline{\omega}_n$ compact ; $p_{n+1} \succ p_n$ (puisque $\omega_n \subset \omega_{n+1}$ implique $PH_p^{\omega_n} \succ PH_p^{\omega_{n+1}}$ , donc $RS_p^{\omega_n} \prec RS_p^{\omega_{n+1}}$ ); de plus, si

$q = \inf_{n\ s} PH_p^{\omega_n}$ , $q$ est harmonique dans $\Omega$ et $< p$ (qui est un potentiel), donc $q = 0$ ; or, $p = \sup_{n\ s} RS_p^{\omega_n} + \inf_{n\ s} PH_p^{\omega_n}$ ; d'où le résultat grâce à la proposition 4.3.

## 5. Mesure associée à un potentiel.

Nous supposerons, pour plus de généralités, que $(\Omega , \mathcal{H})$ est un espace harmonique n'ayant pas nécessairement une base dénombrable ; on remplace alors l'axiome 2, par l'axiome 2' :

axiome 2' : Soient $\omega \in \mathcal{U}$ , et $(h_i)_{i\in I}$ une famille filtrante croissante de fonctions harmoniques dans $\omega$ ; $h = \sup_{i\ I} h_i$ est harmonique dans $\omega$ dès que $h$ est finie sur une partie dense de $\omega$ .

Les propriétés du paragraphe 4 précédent restent vraies, mis à part les corollaires 4.5 et 4.6 (qui font intervenir une base dénombrable).

Pour tout potentiel $p$ et pour toute partie $e$ de $\Omega$ , on pose :

$$PH_p^e = \sup_s \{PH_p^\omega \mid \omega \text{ ouvert } \supset e\} ;$$

$$RS_p^e = \inf_s \{RS_p^\omega \mid \omega \text{ ouvert } \supset e\} .$$

Alors

$p = PH_p^e + RS_p^e$ ,

$PH_p^e$ est harmonique dans $e^\circ$ (intérieur de $e$ ), c'est-à-dire $C(PH_p^e) \subset \complement e^\circ$ ,

$RS_p^e$ est harmonique dans $\complement \bar{e}$ , c'est-à-dire $C(RS_p^e) \subset \bar{e}$ .

[Il est évident que $e_1 \subset e_2$ implique $PH_p^{e_1} > PH_p^{e_2}$ et $RS_p^{e_1} < RS_p^{e_2}$ .]

L'harmonicité de $PH_p^e$ dans $e^\circ$ résulte de la remarque 2° suivant le théorème 4.1. D'autre part, si $x \notin \bar{e}$ , il existe des voisinages ouverts $\delta$ et $\omega_0$ , de $x$ et $e$ respectivement, tels que $\delta$ soit contenu dans $\complement \bar{\omega}_0$ ; alors $RS_u^e < RS_u^{\omega_0}$ , $RS_u^{\omega_0}$ est harmonique dans $\complement \bar{\omega}_0$ , donc dans $\delta$ ; par suite, $RS_u^e$ est harmonique dans $\delta$ ; il s'ensuit que $RS_u^e$ est harmonique dans $\complement \bar{e}$ .

LEMME 5.1. - Soient $p_1$ , $p_2$ deux potentiels, $e$ une partie de $\Omega$ . Alors

$$PH_{p_1+p_2}^e = PH_{p_1}^e + PH_{p_2}^e \ ; \quad RS_{p_1+p_2}^e = RS_{p_1}^e + RS_{p_2}^e .$$

Démonstration. - Faisons la démonstration dans le cas où $e$ est un ouvert $\omega$ de $\Omega$ .

$PH^{\omega}_{p_1} + PH^{\omega}_{p_2}$ est harmonique dans $\omega$ , et minore spécifiquement $p_1 + p_2$ ; donc

$$PH^{\omega}_{p_1} + PH^{\omega}_{p_2} \prec PH^{\omega}_{p_1+p_2} .$$

$PH^{\omega}_{p_1+p_2} \prec p_1 + p_2$ ; d'après la propriété de Riesz (remarque 1° suivant le théorème 4.1), il existe deux potentiels $q_1$ , $q_2$ tels que

$PH^{\omega}_{p_1+p_2} = q_1 + q_2$ ; donc $q_1$ et $q_2$ sont harmoniques dans $\omega$ ,

$q_1 \prec p_1$ ; $q_2 \prec p_2$ ;

par conséquent,

$$q_1 \prec PH^{\omega}_{p_1} , \quad q_2 \prec PH^{\omega}_{p_2} ,$$

d'où les égalités cherchées.

Des conséquences immédiates de ce lemme sont :

$p_1$ , $p_2 \in \mathcal{P}$ ; $e \subset \Omega$ ;

$$(p_1 \prec p_2) \Rightarrow (PH^{e}_{p_1} \prec PH^{e}_{p_2} \text{ et } RS^{e}_{p_1} \prec RS^{e}_{p_2}) ,$$

$p \in \mathcal{P}$ ; $(p_i)_{i\in I}$ une famille filtrante croissante (pour $\prec$ ) de potentiels d'enveloppe supérieure égale à $p$ .

Alors, pour tout $\omega$ ouvert, on a l'égalité :

$$PH^{\omega}_{p} = \sup_{i\in I}{}_{s} PH^{\omega}_{p_i} .$$

LEMME 5.2. - <u>Soient</u> $p$ <u>un potentiel, et</u> $\omega$ <u>un ouvert. Alors</u>

$$PH^{\omega}_{p} = RS^{\complement\omega}_{p} , \quad RS^{\omega}_{p} = PH^{\complement\omega}_{p} .$$

<u>Démonstration</u>. - Posons $K = \complement\omega$ ; on écrit $p = PH^{K}_{p} + RS^{K}_{p}$ . Alors

$$PH^{\omega}_{p} = PH^{\omega}_{PH^{K}_{p}} + PH^{\omega}_{RS^{K}_{p}} \quad \text{d'après le lemme précédent.}$$

$RS^{K}_{p}$ est harmonique dans $\omega$ ; donc $PH^{\omega}_{RS^{K}_{p}} = RS^{K}_{p}$ .

$PH^{\omega}_{PH^{K}_{p}} = \sup_{s}\{PH^{\omega'}_{PH^{\omega}_{p}} \mid \omega' \text{ ouvert } \supset K\}$ (remarque ci-dessus), or les $PH^{\omega'}_{PH^{\omega}_{p}}$ sont harmoniques dans $\omega \cup \omega' \supset \Omega$ , et sont en outre des potentiels ; par conséquent, $PH^{\omega}_{PH^{K}_{p}} = 0$ .

LEMME 5.3. - <u>Soient</u> $p$ , $q$ , $p_1$ , $p_2$ <u>des potentiels</u>.

(a) <u>Si</u> $p \prec q$ , <u>et si</u> $G$ <u>est un ensemble contenant</u> $C(p)$ , <u>alors</u> $p \prec RS^{G}_{q}$ .

(b) Si $p_1 \prec p$ et $p_2 \prec p$ sont tels que $C(p_1) \cap C(p_2) = \emptyset$, alors $p_1 + p_2 \prec p$ et même $p_1 + p_2 \prec RS^{C(p_1) \cup C(p_2)}$ .

Démonstration.

(a) $p$ est harmonique dans $\Omega \setminus C(p)$ ; donc $p \prec PH_q^{\Omega \setminus C(p)}$ . Or

$$PH_q^{\Omega \setminus C(p)} = RS_q^{C(q)} \prec RS_q^G ;$$

(b) D'après (a), on a $p_1 \prec RS_p^{C(p_1)}$ et $p_2 \prec RS_p^{C(p_2)}$ ; or

$$RS_p^{C(p_1)} \prec RS_p^{\Omega \setminus C(p_2)} = PH_p^{C(p_2)} ;$$

en additionnant, on obtient $p_1 + p_2 \prec p$ ; mais $p_1 + p_2$ est harmonique dans $\Omega \setminus C(p_1) \cup C(p_2)$ ; donc (a) : $p_1 + p_2 \prec RS_p^{C(p_1) \cup C(p_2)}$ .

LEMME 5.4. - Soient $p$ un potentiel, et $F_1$, $F_2$ deux fermés de $\Omega$. Alors

$$RS^{F_1}_{RS_p^{F_2}} = RS_p^{F_1 \cap F_2} = RS^{F_2}_{RS_p^{F_1}} .$$

La démonstration, très simple se fait en utilisant le lemme 5.3 (a).

PROPOSITION 5.5. - Soient $p$ un potentiel, $K_1$ et $K_2$ deux compacts de $\Omega$. Alors

$$RS_p^{K_1 \cup K_2} + RS_p^{K_1 \cap K_2} = RS_p^{K_1} + RS_p^{K_2} .$$

Démonstration.

(a)
$$RS_p^{K_1} + RS_p^{K_2} \prec RS_p^{K_1 \cup K_2} + RS_p^{K_1 \cap K_2} .$$

Soient $\omega_2$ un ouvert quelconque, $K_2 \subset \omega_2$, et soit $\omega_2'$ un ouvert tel que $K_2 \subset \omega_2' \subset \overline{\omega_2'} \subset \omega_2$.

On écrit

$$RS_p^{K_1} = PH^{\omega_2'}_{RS_p^{K_1}} + RS^{\omega_2'}_{RS_p^{K_1}} ;$$

alors

$$C(PH^{\omega_2'}_{RS_p^{K_1}}) \subset C(\omega_2' \cup CK_1) \subset (CK_2) \cap K_1$$

$$C(RS_p^{K_2}) \subset K_2 ,$$

donc, d'après le lemme 5.3,

$$PH^{\omega'_2}_{RS_p^{K_1}} + RS_p^{K_2} \prec RS_p^{K_1 \cup K_2} ;$$

d'autre part,

$$C(RS^{\omega'_2}_{RS_p^{K_1}}) \subset C(C\overline{\omega}'_2 \cup CK_1) \subset \overline{\omega}'_2 \cap K_1 ,$$

donc,

$$RS^{\omega'_2}_{RS_p^{K_1}} \prec RS_p^{\overline{\omega}'_2 \cap K_1} .$$

Ainsi

$$RS_p^{K_1} + RS_p^{K_2} \prec RS_p^{\overline{\omega}'_2 \cap K_1} + RS_p^{K_1 \cup K_2} ,$$

Or

$$RS_p^{\overline{\omega}'_2 \cap K_1} = RS^{\overline{\omega}'_2}_{RS_p^{K_1}} \qquad \text{(lemme 5.4)}$$

$$\prec RS^{\omega_2}_{RS_p^{K_1}} .$$

En faisant varier $\omega_2$ , on obtient donc

$$RS_p^{K_1} + RS_p^{K_2} \prec RS^{K_2}_{RS_p^{K_1}} + RS_p^{K_1 \cup K_2}$$

c'est-à-dire (lemme 5.4) l'inégalité cherchée.

(b) $$RS_p^{K_1 \cup K_2} + RS_p^{K_1 \cap K_2} \prec RS_p^{K_1} + RS_p^{K_2} .$$

Soient $\omega_1$ , $\omega_2$ des ouverts quelconques contenant $K_1$ , $K_2$ respectivement. Posons $K = K_1 \cup K_2$ , et $H = K_1 \cap K_2$ ; soient $\delta_1$ et $\delta'_2$ des ouverts, tels que

$$K_1 \subset \delta_1 \subset \overline{\delta}_1 \subset \omega_1 \quad \text{et} \quad H \subset \delta'_2 \subset \overline{\delta}'_2 \subset \omega_1 \cap \omega_2 .$$

Enfin, posons $\omega = \delta_1 \cap C\overline{\delta}'_2$ . On écrit

$$RS_p^K = PH^{\omega}_{RS_p^K} + RS^{\omega}_{RS_p^K} ;$$

alors

$$C(RS^{\omega}_{RS_p^K}) \subset C(C\overline{\omega} \cup CK) \subset \omega_1 \cap CH ,$$

$$C(RS_p^H) \subset H ,$$

donc, d'après le lemme 5.3,

$$RS^{\omega}_{RS^K_p} + RS^H_p < RS^{\omega_1}_p \ ;$$

d'autre part,

$$C(PH^{\omega}_{RS^K_p}) \subset C(\omega \cup CK) \subset \omega_2 \ , \text{ donc } \ PH^{\omega}_{RS^K_p} < RS^{\omega_2}_p \ .$$

Ainsi

$$RS^K_p + RS^H_p < RS^{\omega_1}_p + RS^{\omega_2}_p \ ,$$

et $\omega_1$ , $\omega_2$ étant quelconques, on obtient l'inégalité cherchée.

THÉORÈME 5.6. - Soient $p$ un potentiel, et $x$ un point de $\Omega$ , tels que

$$p(x) < +\infty \ .$$

Il existe alors une mesure de Radon $\mu_x \geqslant 0$ , sur $\Omega$ , caractérisée par

$$\mu_x(K) = RS^K_p(x) \quad \text{pour tout compact } K \text{ de } \Omega \ .$$

De plus, pour tout borélien $B$ de $\Omega$ :

$$\mu_x(B) = RS^B_p(x) \ .$$

Démonstration. - La fonction $K \longrightarrow RS^K_p(x)$ , définie sur les parties compactes de $\Omega$ , vérifie les propriétés suivantes :

1° $0 \leqslant RS^K_p(x) < +\infty$ pour tout $K$ ,

2° $RS^{\Phi}_p(x) = 0$ ,

3° $RS^K_p(x)$ est croissante, et continue à droite ; cette dernière propriété résulte de la définition même de $RS^K_p(x)$, et du fait que les inf naturels et spécifiques coïncident (proposition 4.3),

4° $RS^{K_1 \cup K_2}_p(x) + RS^{K_1 \cap K_2}_p(x) = RS^{K_1}_p(x) + RS^{K_2}_p(x)$ .

Ces propriétés montrent ([6], p. 207) que $K \longrightarrow RS^K_p(x)$ est une mesure de Radon $\mu_x \geqslant 0$ sur $\Omega$ .

Pour montrer le reste du théorème, nous nous appuierons sur le lemme suivant.

LEMME 5.7. - Soient $p$ un potentiel, et $\omega$ un ouvert. Alors

$$RS^{\omega}_p = \sup{}_s \{RS^K_p \mid K \text{ compact } \subset \omega\} \ .$$

Démonstration. - Soit $g = \inf{}_s \{PH^K_p \mid K \text{ compact } \subset \omega\}$ .

$(K \subset \omega) \Rightarrow (PH_p^K \succ PH_p^\omega)$ , donc $g \succ PH_p^\omega$ .

Soit $x \in \omega$ ; il existe $\omega' \in \mathcal{U}_c$ , $x \in \omega' \subset \overline{\omega'} \subset \omega$ , donc $g \prec PH_p^{\overline{\omega'}} \prec PH_p^{\omega'}$ , et $g$ est harmonique dans $\omega'$ ; par suite, $g$ est harmonique dans $\omega$ , et $g \prec PH_p^\omega$ .

Ainsi $g = PH_p^\omega$ ; comme on a les égalités :

$$p = PH_p^\omega + RS_p^\omega \quad \text{et} \quad p = g + \sup_s\{RS_p^K \mid K \text{ compact } \subset \omega\}$$

c'est que $RS_p^\omega = \sup_s\{RS_p^K \mid K \text{ compact } \subset \omega\}$ .

Terminons donc maintenant la démonstration du théorème [Soit donc à nouveau $p$ un potentiel fini au point $x$ ].

Soit $\omega$ un ouvert :

$$\begin{aligned}\mu_x(\omega) &= \sup\{\mu_x(K) \mid K \text{ compact } \subset \omega\}\\ &= \sup\{RS_p^K(x) \mid K \text{ compact } \subset \omega\}\\ &= \sup_s\{RS_p^K \mid K \text{ compact } \subset \omega\}\ (x) = RS_p^\omega(x)\end{aligned}$$

et si $B$ est un borélien, on a :

$$\begin{aligned}\mu_x(B) &= \inf\{\mu_x(\omega) \mid \omega \text{ ouvert } \supset B\}\\ &= \inf\{RS_p^\omega(x) \mid \omega \text{ ouvert } \supset B\}\\ &= \inf_s\{RS_p^\omega \mid \omega \text{ ouvert } \supset B\}\ (x) = RS_p^B(x)\ .\end{aligned}$$

COROLLAIRE 5.8. - <u>Soit</u> $p$ <u>un potentiel</u>. <u>Alors, pour tout borélien</u> $B$ <u>de</u> $\Omega$ :

$$RS_p^B = PH_p^{\Omega \setminus B} \ , \quad PH_p^B = RS_p^{\Omega \setminus B}\ .$$

<u>Démonstration</u>. - En tout point $x$ , où $p$ est fini, on a :

$$\mu_x(\Omega) = \mu_x(B) + \mu_x(\Omega \setminus B)$$

c'est-à-dire $p(x) = RS_p^B(x) + RS_p^{\Omega\setminus B}(x)$ , donc $RS_p^B(x) = PH_p^{\Omega\setminus B}(x)$ . Ainsi les deux fonctions surharmoniques $RS_p^B$ et $PH_p^{\Omega\setminus B}$ sont égales en dehors de l'ensemble négligeable $\{x \mid p(x) = +\infty\}$ ; elles sont donc égales partout.

<u>Remarque</u>. - Posons, pour une fonction surharmonique $u \geqslant 0$ et pour une partie $e$ de $\Omega$ ,

$$RS_u^e = \inf_s\{RS_u^\omega \mid \omega \text{ ouvert } \supset e\}\ .$$

Notons $\alpha$ le point à l'infini du compactifié d'Aleksandrov $\overline{\Omega}$ de $\Omega$ ; pour un ensemble $e \subset \overline{\Omega}$ , $\alpha \in e$ , on pose, si $u = p + h$ ( $p$ potentiel dans $\Omega$ , $h$ harmonique dans $\Omega$ ),

$$RS_u^e = RS_p^{e \setminus \{\alpha\}} + h\ .$$

Alors, la fonction $K \to RS^K(x)$ (où $x$ est choisi tel que $u(x) < +\infty$ ), définie sur les compacts de $\overline{\Omega}$ , vérifie les propriétés 1° à 4°, énoncées dans la démonstration du théorème 5.6.

Par conséquent, il existe une mesure de Radon $\mu'_x \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$ , caractérisée par la condition

$$\mu'_x(K) = RS_u^K(x) \quad \text{pour tout compact } K \text{ de } \overline{\Omega} .$$

En outre, on vérifie facilement que l'on a encore

$$RS_u^\omega = \sup{}_s \{RS_u^K \mid K \text{ compact } \subset \omega\}$$

(pour $\omega$ ouvert $\subset \overline{\Omega}$ , $K$ compact de $\overline{\Omega}$ ), d'où l'on déduit, comme précédemment, que

$$\mu'_x(B) = RS_u^B(x) \quad \text{pour tout borélien } B \text{ de } \overline{\Omega}$$

et que

$$RS_u^B = PH_u^{\overline{\Omega}\setminus B} \ ; \quad PH_u^B = RS_u^{\overline{\Omega}\setminus B}$$

pour tout borélien $B$ de $\overline{\Omega}$ .

## 6. Noyaux et fonctions dominantes.

Soit $\Omega$ un espace localement compact à base dénombrable. On désigne par $\mathfrak{F}$ la tribu des boréliens de $\Omega$ , et par $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}_b$) l'ensemble des fonctions numériques boréliennes (resp. boréliennes et bornées) sur $\Omega$ . $\mathcal{B}_b$ est un espace de Banach pour la norme uniforme :

$$\|f\| = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| \ , \quad f \in \mathcal{B}_b \ .$$

Définition 6.1. - Un noyau sur $(\Omega , \mathfrak{F})$ est une application $V$ de $\Omega \times \mathfrak{F}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que

(a) Pour tout $B \in \mathfrak{F}$ , l'application $x \to V(x , B)$ de $\Omega$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est borélienne,

(b) Pour tout $x \in \Omega$ , l'application $B \to V(x , B)$ de $\mathfrak{F}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est une mesure (positive) sur $\Omega$ , mesure notée $V(x , dy)$ .

Un noyau $V$ sur $\Omega$ est dit :

fini (resp. borné) si l'application $x \to V(x , \Omega)$ est finie (resp. bornée),

sous-markovien (resp. markovien) si

$$V(x , \Omega) \leq 1 \quad (\text{resp. } V(x , \Omega) = 1) \quad \text{pour tout } x \in \Omega \ .$$

strictement positif si

$$V(x\ ,\ \Omega) > 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega\ .$$

Soit $V$ un noyau sur $\Omega$ . Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}^+$ , on pose

$$Vf(x) = \int f(y)\, V(x\ ,\ dy) \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega\ .$$

En approchant $f$ par des fonctions boréliennes étagées, on voit que $Vf$ appartient encore à $\mathcal{B}^+$ .

Ainsi l'application $f \longrightarrow Vf$ de $\mathcal{B}^+$ dans lui-même est additive, positivement homogène et possède la propriété :

Si $(f_n)_n$ est une suite croissante de fonctions de $\mathcal{B}^+$ , on a

$$V(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} V(f_n)\ .$$

Réciproquement, toute application de $\mathcal{B}^+$ dans $\mathcal{B}^+$ qui possède ces propriétés est associée à un noyau.

Pour une fonction $f$ quelconque dans $\mathcal{B}$ , on définit une fonction $Vf$ en posant $Vf = Vf^+ - Vf^-$ lorsque cette différence a un sens. En particulier, si $V$ est borné, $V$ est alors une forme linéaire positive sur $\mathcal{B}_b$ .

Définition 6.2. - Soit $V$ un noyau fini sur $\Omega$ . Une fonction $d \in \mathcal{B}_+$ sera dite V-dominante (ou simplement dominante s'il ne peut y avoir de confusion) lorsque :

$$(d + Vf \geqslant Vg \quad \text{sur} \quad \{g > 0\}) \quad \text{implique} \quad (d + Vf \geqslant Vg \quad \text{partout})$$

pour toutes fonctions $f\ ,\ g \in \mathcal{B}_+$ .

L'ensemble de toutes les fonctions V-dominantes (resp. V-dominantes et s. c. i.) est noté $\mathcal{D} = \mathcal{D}(V)$ (resp. $\mathcal{D}_s \subset \mathcal{D}_s(V)$) .

Si $V$ est borné, on définit en outre un sous-ensemble $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(V)$ de $\mathcal{D}$ en posant :

$$\mathcal{D}^* = \{d \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}_b \mid \exists\, e \in \mathcal{D} : \ d + e \in \overline{V(\mathcal{B}_b)}\}$$

(cette définition a un sens, puisque $V(\mathcal{B}_b)$ est contenu dans $\mathcal{B}_b$ , l'adhérence étant prise dans le Banach $\mathcal{B}_b$ ).

Définition 6.3. - Soit $V$ un noyau fini sur $\Omega$ ; on dit que $V$ satisfait au principe complet du maximum (P. C. M.) si les constantes positives sont des fonctions V-dominantes.

Si $V$ satisfait au P. C. M., il est clair que $\underset{\sim}{R}^+ + V(\mathcal{B}^+) \subset \mathcal{D}$ .

PROPOSITION 6.4. - <u>Soit</u> $V$ <u>un noyau continu sur</u> $\Omega$ (<u>c'est-à-dire tel que</u> $V(\mathcal{C}_c) \subset \mathcal{C}$ ) <u>strictement positif</u>. <u>Si</u> $d$ <u>est une fonction s. c. i. telle que</u>, <u>pour toutes</u> $f$ , $g \in \mathcal{C}_c^+$ :

$$(d + Vf \geqslant Vg \ \text{sur} \ \{g > 0\}) \ \text{implique} \ (d + Vf \geqslant Vg \ \text{partout}) ,$$

<u>alors</u> $d$ <u>est une fonction</u> V-<u>dominante</u>.

<u>Démonstration</u> (Voir aussi [10], p. 251). - Soient $f$ , $g \in \mathcal{B}^+$ telles que $d+Vf \geqslant Vg$ sur $\{g > 0\}$ . Posons

$$A_f = \{f' \mid f' \geqslant f \ \text{et} \ f' \ \text{s. c. i.}\} ,$$

$$B_g = \{g' \mid g' \leqslant g \ \text{et} \ g' \ \text{s. c. s. bornée}\} .$$

Des conséquences de la théorie de la mesure sont que

$$Vf = \inf\{Vf' \mid f' \in A_f\}$$

$$Vg = \sup\{Vg' \mid g' \in B_g\}$$

et que $Vg' = \sup\{V(g'.1_K) \mid K \ \text{compact} \subset \{g' > 0\}\}$ pour toute fonction $g' \in B_g$ .

Choisissons $f' \in A_f$ , $g' \in B_g$ quelconques, $K$ compact quelconque, $K \subset \{g'>0\}$ , et enfin $\varepsilon > 0$ arbitraire.

Alors, puisque $V$ est strictement positif,

$$d + V(f' + \varepsilon) > V(g'.1_K) \ \text{sur} \ K .$$

Or $d + V(f' + \varepsilon)$ est s. c. i. tandis que $V(g'.1_K)$ est s. c. s. (car $f'$ est s. c. i., $g'.1_K$ s. c. s. à support compact, et $V$ continu) ; donc il existe une fonction $h \in \mathcal{C}_c$ et un voisinage compact $L$ de $K$ tels que :

$$d + V(f' + \varepsilon) > h > V(g'.1_K) \ \text{sur} \ L .$$

Mais il existe une suite croissante $(f'_n)_n \subset \mathcal{C}_c^+$ , et une suite décroissante $(g'_p)_p \subset \mathcal{C}_c^+$ , telles que :

$$f' + \varepsilon = \sup_n f'_n \ ; \ g'.1_K = \inf_p g'_p \ \text{et} \ S(g'_p) \subset L .$$

Donc, pour un choix convenable de $n$ et $p$ , on a

$$d + Vf'_n \geqslant h \geqslant Vg'_p \ \text{dans} \ L \text{, donc dans} \ \{g'_p > 0\} .$$

D'après l'hypothèse faite sur $d$ , c'est que

$$d + Vf'_n \geqslant Vg'_p \ \text{partout} .$$

On déduit de là que

$$d + V(f' + \varepsilon) > V(g'.1_K) \ \text{partout,}$$

puis, $f'$ , $g'$ , $K$ et $\varepsilon$ étant arbitraires, que

$$d + Vf \geqslant Vg \quad \text{partout.}$$

On suppose maintenant que $\Omega$ est un espace harmonique. Alors on peut énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 6.5. - A tout potentiel fini $p$ sur $\Omega$ , on peut faire correspondre un unique noyau $V$ sur $\Omega$ caractérisé par les deux conditions :

(a) $V1 = p$ ,

(b) Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_b^+$ , $Vf$ est un potentiel fini sur $\Omega$ tel que $C(Vf) \subset S(f)$ .

De plus, si $p$ est borné (resp. continu), $V$ est borné (resp. satisfait à $V(\mathcal{B}_b) \subset \mathcal{C}$). Le noyau $V$ est dit associé à $p$ .

Démonstration.

($\alpha$) Unicité d'un tel noyau $V$ . - Soit $K$ un compact de $\Omega$ ; $V1_K + V1_{\Omega\setminus K} = V1 = p$, donc $V1_K \prec p$ ; or $C(V1_K) \subset K$ ; le lemme 5.3 montre alors l'inégalité $V1_K \prec RS_p^K$ .

Pour tout borélien $B$ de $\Omega$ , on a donc

$$V1_B \prec RS_p^B$$

[puisque $V1_B = \sup\{V1_K \mid K \text{ compact } \subset B\} \prec \sup\{RS_p^K \mid K \text{ compact } \subset B\} = RS_p^B$ ].

Or $V1_B + V1_{\Omega\setminus B} = p$ et $RS_p^B + RS_p^{\Omega\setminus B} = p$ (corollaire 5.8). Par suite, $V1_B = RS_p^B$ ce qu'on peut aussi écrire

$$V(x , B) = RS_p^B(x) \qquad (x \in \Omega , \quad B \in \mathfrak{B}) ,$$

relations montrant l'unicité d'un noyau $V$ satisfaisant aux conditions (a) et (b) du théorème.

($\beta$) Existence du noyau $V$ . - Il faut donc montrer que l'application $V$ , définie sur $\Omega \times \mathfrak{B}$ par $V(x , B) = RS_p^B(x)$ , est un noyau, satisfaisant aux conditions (a) et (b) du théorème, que $V$ soit un noyau (satisfaisant à (a)) résulte du théorème 5.7 (la mesure $B \rightarrow V(x , B)$ étant la mesure que l'on a notée $\mu_x$ ).

Soit $f$ une fonction de $\mathcal{B}_b^+$ . Alors $f$ est la limite d'une suite croissante $(f_n)_n$ , les $f_n$ étant de la forme

$$f_n = \sum_{i=1}^{p(n)} \lambda_i^n 1_{B_i^n} , \text{ où } \lambda_i^n \in \underset{\sim}{R}^+ \text{ et } B_i^n \subset \{f > 0\} ;$$

donc $Vf_n = \sum_{i=1}^{p(n)} \lambda_i^n RS_p^{B_i^n}$ .

$Vf_n$ est donc un potentiel, et $C(Vf_n) \subset \bigcup_{i=1}^{p(n)} \overline{B_i^n} \subset S(f)$ . Par suite, $Vf = \sup Vf_n$

est un potentiel spécifiquement majoré par $\|f\|p$ (car $Vf + V(\|f\| - f) = V1 = p$ ) et $C(Vf) \subset S(f)$ .

Le noyau $V$ satisfait donc aux conditions (a) et (b).

Enfin, de la relation

$$Vf + V(\|f\| - f) = p \ , \quad f \in \mathcal{B}_b^+ \ ,$$

il résulte immédiatement que $V$ est borné si $p$ l'est, et que $V(\mathcal{B}_b) \subset \mathcal{C}$ si $p$ est continu [en outre $V$ est strictement positif si $p$ l'est].

COROLLAIRE 6.6. - Pour tout potentiel fini $p$ sur $\Omega$ , son noyau associé satisfait à $V(\mathcal{B}^+) \subset {}_+\mathcal{H}_\Omega^*$ .

Démonstration. - Cela résulte immédiatement du théorème 6.5 puisque pour $f \in \mathcal{B}^+$,

$$Vf = \sup_n Vf_n \ ,$$

où $(f_n)_n$ est une suite croissante dans $\mathcal{B}_b^+$ .

LEMME 6.7. - Soit $p$ un potentiel continu strictement positif. Alors son noyau $V$ associé est tel que :

(a) ${}_+\mathcal{H}_\Omega^* \subset \mathcal{D}_s(V)$ ,

(b) $\forall f \in \mathcal{B}_b^+$ , $\inf\{d \in \mathcal{D} \mid Vf - d \in \mathcal{C}_0^+\} = 0$ .

Démonstration.

(a) Soient $u \in {}_+\mathcal{H}_\Omega^*$ , $f$ , $g \in \mathcal{C}_c^+$ telles que

$$u + Vf > Vg \quad \text{sur} \quad \{g > 0\} \ .$$

$g$ est limite d'une suite croissante $(g_n)_n$ de fonctions de $\mathcal{C}_c^+$ telles que $S(g_n) \subset \{g > 0\}$ . Alors, pour tout $n$ ,

$$u + Vf \geq Vg_n \quad \text{sur} \quad C(Vg_n)$$

puisque $C(Vg_n) \subset S(g_n) \subset \{g > 0\}$ ; $u + Vf$ étant une fonction hyperharmonique, et $Vg_n$ un potentiel continu (car $p$ est continu), le principe de domination (corollaire 2.10), montre que

$$u + Vf \geq Vg_n \quad \text{partout (et pour tout } n \text{ ).}$$

Donc $u + Vf \geq Vg = \sup Vg_n$ partout, et, d'après la proposition 6.1, c'est que $u \in \mathcal{D}_s$ .

(b) est une conséquence immédiate du (a) précédent et du lemme 3.6.

LEMME 6.8. - <u>On suppose que</u> $(\Omega\ ,\ \mathcal{H})$ <u>est un espace fortement harmonique et que la constante</u> $1$ <u>est surharmonique. Il existe alors un potentiel</u> $p \in \mathcal{P} \cap \mathcal{C}_b$ , <u>strictement positif, tel que l'on ait l'inclusion</u>

$$\mathcal{C}_c \subset \overline{\mathcal{D}^*(V) - \mathcal{D}^*(V)}$$

<u>pour le noyau</u> $V$ <u>associé à</u> $p$ .

<u>Démonstration</u>. - D'après le théorème 3.7, toute fonction $f \in \mathcal{C}_c$ peut être approchée uniformément par des différences $u - v$ de fonctions de

$$\mathcal{P}_c = \{p \in \mathcal{P} \cap \mathcal{C} \mid C(p) \text{ compact}\} ;$$

il existe donc un ensemble dénombrable $Q = \{u'_1\ ,\ u'_2\ ,\ \ldots\}$ de tels potentiels $u'_n \not\equiv 0$ de $\mathcal{P}_c$ tel que $\mathcal{C}_c \subset \overline{Q - Q}$ . D'après le principe de domination (corollaire 2.10), tous les potentiels de $\mathcal{P}_c$ sont bornés, et l'on peut donc poser :

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|u'_n\|}\, u'_n \ , \text{ donc } \ 0 < p \leqslant 1 \ .$$

Alors $p$ est un potentiel (proposition 2.8) continu et strictement positif. Soit $V$ le noyau qui lui est associé. Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$ , on a (si $u_n = 1/(2^n \|u'_n\|)\ u'_n$ )

$$u_n \in \mathcal{P}_c \subset \mathcal{D}(V) \cap \mathcal{B}_b \quad \text{(d'après le lemme précédent)}$$

et de même $p - u_n = \sum_{m \neq n} u_m \in \mathcal{P} \subset \mathcal{D}(V)$ et $p - u_n \in \mathcal{B}_b$ . Puisque

$$u_n + p - u_n = p = V1 \in V(\mathcal{B}_b) \subset \overline{V(\mathcal{B}_b)}\ ,$$

c'est que $u_n$ , donc $u'_n$ , appartient à $\mathcal{D}^*(V)$ . Il s'ensuit que

$$\mathcal{C}_c \subset \overline{Q - Q} \subset \overline{\mathcal{D}^*(V) - \mathcal{D}^*(V)}\ .$$

Rassemblons les résultats de ce paragraphe dans le théorème suivant.

THÉORÈME 6.9. - <u>Soit</u> $(\Omega\ ,\ \mathcal{H})$ <u>un espace fortement harmonique (à base dénombrable) tel que les constantes positives soient hyperharmoniques. Il existe alors un noyau</u> $V$ <u>sur</u> $\Omega$ <u>possédant les propriétés suivantes</u> :

$(K_0)$ $V$ <u>est borné et satisfait au principe complet du maximum</u>,

$(K_1)$ $V(\mathcal{B}_b) \subset \overline{\mathcal{B}_b \cap \mathcal{C}} = \mathcal{C}_b$ ,

$(K_2)$ $\mathcal{C}_c \subset \mathcal{D}^*(V) - \mathcal{D}^*(V)$ ,

$(K_3)$ $\forall\ f \in \mathcal{B}_b^+\ ,\ \inf\{d \in \mathcal{D} \mid Vf - d \in \mathcal{C}_0^+\} = 0$ ,

$(K)$ $V(\mathcal{B}^+) \subset {}_+\mathcal{H}_\Omega^* \subset \mathcal{D}_s(V)$ .

Un noyau possédant ces cinq propriétés sera dit <u>admissible</u>.

Il suffit de remarquer que si $V$ est le noyau associé au potentiel $p$ du lemme

6.8, $V$ est un noyau admissible [il satisfait au P. C. M., car $1 \quad {}_+\mathcal{H}^*_\Omega \subset \mathcal{Q}_s \subset \mathcal{Q}$ ].

7. Semi-groupes et fonctions excessives.

Si $V$ et $W$ sont deux noyaux sur un espace localement compact $\Omega$ , à base dénombrable, $V$ et $W$ considérés comme applications de $\mathcal{B}^+$ dans $\mathcal{B}^+$ peuvent être composés ; on obtient ainsi une application $WV$ de $\mathcal{B}^+$ dans lui-même, et qui dérive du noyau

$$(x , B) \to \int W(x , dy)\, V(y , B) \qquad (x \in \Omega , \quad B \in \mathfrak{F}) .$$

Il est évident que si $W$ et $V$ sont tous deux (sous)-markoviens, $WV$ est aussi (sous)-markovien.

On peut donc poser la définition suivante.

Définition 7.1. - Une famille $(P_t)_{t\geq 0}$ de noyaux (sous)-markoviens sur $\Omega$ est appelée semi-groupe sur $\Omega$ (de noyaux (sous-) markoviens) si

$P_{t+s} = P_t\, P_s$ pour tout $t , s \geq 0$ ,

$P_0$ est le noyau identique $I$ , défini par

$$I(x , B) = 1_B(x) \qquad (x \in \Omega , \quad B \in \mathfrak{F}) .$$

Pour un tel semi-groupe, il existe une classe importante de fonctions associées, qui, déjà par définition, est analogue à la classe des fonctions hyperharmoniques positives :

Définition 7.2. - Une fonction $f \in \mathcal{B}^+$ est dite excessive relativement à un semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ de noyaux sous-markoviens sur $\Omega$ si

$P_t\, f \leq f$ ,

$\lim_{t\to 0} P_t\, f = f$ .

L'ensemble de toutes les fonctions excessives sera noté $\mathcal{E} = \mathcal{E}((P_t)_{t\geq 0})$

Définition 7.3. - Un semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ de noyaux sous-markoviens sur $\Omega$ est appelé semi-groupe quasi de Feller si

$P_t(\mathcal{C}_0) \subset \mathcal{C}_b \quad (\forall\, t \geq 0)$ , (7.1)

$\lim_{t\to 0} \|P_t\, f - f\| = 0 \quad (\forall\, f \in \mathcal{C}_0)$ , (7.2)

$\exists\, p \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}_b$ , $p > 0$ , $\exists\, q \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}$ telles que $\forall\, \alpha , \beta \in \mathbb{R}^*_+$ , $\{p \geq \alpha\} \cap \{q \leq \beta\}$ soit compact.

On peut alors démontrer ([7], p. 188) le théorème suivant.

THÉORÈME 7.4. - Soit $V$ un noyau satisfaisant aux propriétés $(K_0)$ à $(K_3)$ (du théorème 6.9). Alors il existe un unique semi-groupe quasi de Feller sur $\Omega$ tel que :

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t \, f(x) \, dt \, ,$$

pour toute $f \in \mathcal{B}^+$ et tout $x \in \Omega$.

Comme conséquence des théorèmes 6.9 et 7.4 on a alors le théorème ci-après.

THÉORÈME 7.5. - Soit $V$ un noyau admissible sur un espace fortement harmonique $\Omega$ pour lequel les constantes positives sont hyperharmoniques, et soit $(P_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe quasi de Feller qui lui correspond. Alors on a les égalités :

$$_+\mathcal{H}^*_\Omega = \mathcal{D}_s(V) = \mathcal{E}((P_t)_{t\geq 0}) \, .$$

Démonstration. - Nous savons déjà (par définition d'un noyau admissible) que $_+\mathcal{H}^*_\Omega \subset \mathcal{D}_s(V)$.

Montrons $\mathcal{D}_s(V) \subset \mathcal{E}$ ; Pour cela, soit $d \in \mathcal{D}_s(V)$. $d$ étant une fonction dominante, la théorie des résolvantes ([10], p. 246, et aussi [5]) montre que $P_t \, d \leqslant d$ $(t \geqslant 0)$ ; $d$ étant s. c. i., il existe une suite $(f_n)_n \subset \mathcal{C}^+_c$, croissante, et d'enveloppe supérieure égale à $d$ ; alors la relation (7.2) montre que, pour tout $n$, on a

$$f_n = \lim_{t\to 0} P_t \, f_n \leqslant \lim_{t\to 0} P_t \, d \leqslant d \, ;$$

en passant à la limite, on obtient $d = \lim_{t\to 0} P_t \, d$, donc $d \in \mathcal{E}$.

Montrons $\mathcal{E} \subset {_+\mathcal{H}^*_\Omega}$ ; Soit $u \in \mathcal{E}$. La théorie des semi-groupes montre ([10], p. 242-243, T 64 - T 65) qu'il existe une suite $(f_n)_n \subset \mathcal{B}^+$ telle que la suite $(Vf_n)_n$ soit croissante et admette $u$ pour enveloppe supérieure. Puisque $V(\mathcal{B}^+) \subset {_+\mathcal{H}^*_\Omega}$, $u \in {_+\mathcal{H}^*_\Omega}$ (remarque 4°, § 1), le théorème est donc démontré.

Esquisse de la démonstration du théorème 7.4.

(A) On appelle résolvante sur $(\Omega, \mathcal{F})$, une famille $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ de noyaux sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que :

$$\text{(R)} \qquad V_\lambda - V_\mu = (\mu - \lambda) \, V_\lambda \, V_\mu \; ; \quad V_\lambda \, V_\mu = V_\mu \, V_\lambda$$

pour tout $\lambda, \mu > 0$, $\mu > \lambda$.

On dit que la résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ est sous-markovienne si tous les noyaux $\lambda V_\lambda$ sont sous-markoviens.

A une résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$, on peut associer (grâce à (R)) un nouveau noyau

$V_0 = \sup_\lambda V_\lambda$ , et l'équation résolvante (R) est encore vraie avec $\lambda = 0$ .

Inversement, on a le théorème ci-après.

THÉORÈME A. - Soit $V$ un noyau borné sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ satisfaisant au principe complet du maximum. Alors il existe une unique résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ , sous-markovienne, telle que $V_0 = V$ . En outre, pour tout $\lambda > 0$ , $V_\lambda(\mathcal{B}_b) \subset \mathcal{B}_b$ .

(B) Soit $X$ un espace de Banach ordonné par un cône convexe fermé.

Un opérateur $A$ sur $X$ est dit sous-markovien si $\|A\| \leq 1$ et si $A$ est positif.

Un semi-groupe sous-markovien sur $X$ est une famille $(P_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs sous-markoviens sur $X$ telle que :

$$P_t \cdot P_s = P_{t+s} \quad \text{pour tout } t , s \geq 0$$

$$P_0 = I \quad (\text{identité de } L(X) ).$$

On dit que le semi-groupe est fortement continu si

$$\lim_{t\to 0} \|P_t\, x - x\| = 0 \quad \text{pour tout } x \in X .$$

Une résolvante sous-markovienne sur $X$ est une famille $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ d'opérateurs sur $X$ , telle que les opérateurs $\lambda V_\lambda$ soient sous-markoviens et satisfaisant l'équation résolvante

$$V_\lambda - V_\mu = (\mu - \lambda)\, V_\lambda\, V_\mu \quad \text{pour tout } \lambda , \mu > 0 .$$

Une telle résolvante est dite fortement continue si

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda V_\lambda\, x - x\| = 0 \quad \text{pour tout } x \in X .$$

A tout semi-groupe sous-markovien fortement continu $(P_t)_{t\geq 0}$ , sur $X$ , on peut faire correspondre une résolvante sous-markovienne fortement continue $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ , sur $X$ , en posant, pour tout $\lambda > 0$ :

$$V_\lambda\, x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, P_t\, x\, dt \quad \text{pour tout } x \in X .$$

La réciproque est le théorème d'Hille-Yosida :

THÉORÈME B. - Soit $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une résolvante sous-markovienne fortement continue sur $X$ . Alors il existe un unique semi-groupe sous-markovien fortement continu $(P_t)_{t\geq 0}$ sur $X$ dont la résolvante est $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ , c'est-à-dire tel que, pour tout $\lambda > 0$ :

$$V_\lambda\, x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, P_t\, x\, dt .$$

Nous énoncerons aussi les résultats suivants. Soit $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une résolvante sous-markovienne sur $X$ .

LEMME B.1. - $V_\lambda(X_1)$ <u>est indépendant de</u> $X_1$ <u>si</u> $X_1$ <u>est un sous-espace vectoriel de</u> $X$ <u>stable par les</u> $V_\lambda$ <u>(c'est-à-dire</u> $V_\lambda(X_1) \subset X_1$ <u>pour tout</u> $\lambda > 0$ )

LEMME B.2. - <u>Pour tout</u> $x \in V_\lambda(X)$ , $\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda V_\lambda x - x\| = 0$ .

$(V_\lambda)_{\lambda>0}$ <u>est fortement continu si, et seulement si,</u> $\overline{V_\lambda(X)} = X$ .

LEMME B.3. - <u>Soit</u> $X_0 = \overline{V_\lambda(X)}$ . <u>Alors</u> $V_\lambda(X_0)$ <u>est indépendant de</u> $\lambda$ , <u>et</u>

$$\overline{V_\lambda(X_0)} = X_0 .$$

(C) Soit donc $V$ un noyau sur $(\Omega , \mathfrak{F})$ satisfaisant aux propriétés $(K_0)$ à $(K_3)$.

D'après $(K_0)$ et le théorème A, il existe une unique résolvante sous-markovienne $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ sur $(\Omega , \mathfrak{F})$ telle que $V_0 = V$ .

D'après $(K_1)$, la restriction des noyaux à $\mathcal{B}_0 = \overline{V(\mathcal{B}_b)}$ forme une résolvante sous-markovienne sur le Banach $\mathcal{B}_0$ (et pour tout $\lambda$ , $\mathcal{B}_0 = \overline{V_\lambda(\mathcal{B}_b)}$ ); cette résolvante, sur $\mathcal{B}_0$ , est fortement continue d'après les lemmes B.2 et B.3.

Il existe donc, d'après le théorème d'Hille-Yosida, un semi-groupe fortement continu $(P_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{B}_0$ , sous-markovien et tel que

$$V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f \, dt \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{B}_0 \text{ et tout } \lambda > 0 .$$

L'idée de la démonstration est de prolonger le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ en un semi-groupe de noyaux sur $(\Omega , \mathfrak{F})$ tel que $(V_\lambda)_\lambda$ soit la résolvante de ce semi-groupe de noyaux.

Un prolongement du semi-groupe est possible car $\mathcal{C}_c \subset \mathcal{B}_0$ (donc $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{B}_0$ ).

<u>Montrons donc</u> $\mathcal{C}_c \subset \mathcal{B}_0$ : Soit $d \in \mathcal{Q}^*$ , et soit $e \in \mathcal{Q}$ tel que $f = d + e \in \mathcal{B}_0$ . Puisque $d$ et $e$ sont des fonctions V-dominantes, elles sont surmédianes pour $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ ([10] , p. 246), c'est-à-dire

$$\lambda V_\lambda d \leq d \quad \text{et} \quad \lambda V_\lambda e \leq e \quad \text{pour tout } \lambda$$

d'où l'on déduit :

$$0 \leq d - \lambda V_\lambda d \leq f - \lambda V_\lambda f ;$$

mais $f \in \mathcal{B}_0$ , donc (lemme B.2)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda V_\lambda f - f\| = 0 .$$

Par suite, $\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda V_\lambda d - d\| = 0$ , ce qui montre que $d \in \mathcal{B}_0$ . Par conséquent, $\mathcal{Q}^* - \mathcal{Q}^* \subset \mathcal{B}_0$ , et la propriété $(K_2)$ implique donc $\mathcal{C}_c \subset \mathcal{B}_0$ .

Notons $(\overline{P}_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de noyaux sur $(\Omega , \mathfrak{F})$ qui coïncident avec $(P_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{C}_c$ , donc sur $\mathcal{C}_0$ . Terminons cette ébauche de démonstration en montrant que

$(\overline{P}_t)_{t\geq 0}$ <u>et</u> $(P_t)_{t\geq 0}$ <u>coïncident sur</u> $\mathcal{B}_0$ .

(a) Soit $h \in \mathcal{B}_0^+$ ; donc $h \in \mathcal{C}_b^+$ (d'après $(K_1)$), et il existe une suite croissante $(h_n)_n$ dans $\mathcal{C}_c^+$ d'enveloppe supérieure égale à $h$ . Alors :

$$\overline{P}_t\, h = \sup_n \overline{P}_t\, h_n = \sup_n P_t\, h_n \leq P_t\, h \ .$$

(b) Soit $f \in \mathcal{B}_b^+$ , et soit $d \in \mathcal{Q}$ telle que $Vf - d \in \mathcal{C}_0^+$ . Comme $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{B}_0$ , la fonction

$$d = Vf - (Vf - d)$$

appartient à $\mathcal{B}_0$ .

Puisque $d \in \mathcal{Q}$ , $d$ est surmédiane pour $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ et puisque $d \in \mathcal{B}_0$ ,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda V_\lambda\, d - d\| = 0 \ ;$$

$d$ est donc excessive pour $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ , et aussi pour $(P_t)_{t>0}$ ([10], p. 243) c'est-à-dire :

$$P_t\, d \leq d \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0} P_t\, d = d \ .$$

On a alors, pour tout $t \geq 0$ ,

$$\overline{P}_t\, Vf \geq \overline{P}_t(Vf - d) = P_t(Vf - d)$$
$$= P_t\, Vf - P_t\, d \geq P_t\, Vf - d \ .$$

D'après la propriété $(K_3)$, on a donc : $\overline{P}_t\, Vf \geq P_t\, Vf$ ; le (a) implique alors $\overline{P}_t\, Vf = P_t\, Vf$ . Par suite $\overline{P}_t = P_t$ sur $V(\mathcal{B}_b)$ , donc sur $\mathcal{B}_0$ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (H.). - Harmonische Raüme und ihre Potential Theorie. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 22).

[2] BAUER (H.). - Harmonic spaces and associated Markov processes, Centro internazionalematematico estivo : Potential theory [1969. Stresa], p. 23-67. - Roma, Cremonese, 1970.

[3] BOURBAKI (N.). - Topologie générale. chap. X. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1084 ; Bourbaki, 10).

[4] BRELOT (M.). - Lectures on potential theory. - Bombay, Tata Institute, 1960 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures in Mathematics, 19)

[5] CAIROLI (R.). - Produits de semi-groupes de transition et produits de processus, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, t. 15, 1966, p. 311-384.

[6] CHOQUET (G.). - Theory of capacities, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 5, 1953/54, p. 131-296.

[7] HANSEN (W.). - Konstruktion von Halbgruppen und Markoffschen Prozessen, Inventiones Math., Berlin, t. 3, 1967, p. 179-214.

[8] HERVE (Rose-Marie). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, fasc. 1, p. 415-571.

[9] MEYER (P. A.). - Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, fasc. 2, p. 357-372.

[10] MEYER (P. A.). - Probabilités et potentiel. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1318, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 14).

[11] SIBONY (D.). - Cônes de fonctions et potentiels, Cours de 3e cycle à la Faculté des Sciences de Paris, 1967/1968, et à l'University McGill de Montréal, été 1968.

(Texte reçu le 30 mai 1973)

Jean GUILLERME
19 rue Emile Zola
94130 NOGENT SUR MARNE