Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

J. C. Taylor

Balayage de fonctions excessives

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 14 (1970-1971), exp. n° 2, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1970-1971__14__A1_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
14e-15e années, 1970-1972, n° 2, 11 p.

5 et 12 novembre 1970

BALAYAGE DE FONCTIONS EXCESSIVES

par J. C. TAYLOR

Introduction. - Dans la théorie axiomatique du potentiel, on balaye d'abord les hyperharmoniques positives, puis, en se servant d'un théorème d'approximation de Mme HERVÉ, on balaye les mesures à support compact.

Dans la théorie probabiliste, on inverse la méthode, et on détermine d'abord les balayées des mesures ponctuelles ε_x sur un ensemble convenable E. On obtient ainsi un noyau avec lequel on balaye les fonctions excessives. Dans cette méthode, on utilise les trajectoires, les temps d'arrêt, et la théorie de la capacitabilité.

Ici, on se propose de faire la théorie probabiliste du balayage par la méthode axiomatique, en supposant des hypothèses analytiques sur la résolvante.

Soit X un espace localement compact à base dénombrable, et soit $\mathcal{B}$ la tribu des ensembles universellement mesurables. Supposons que $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ soit une résolvante sousmarkovienne sur $(X, \mathcal{B})$, qui satisfait aux hypothèses suivantes :

(1) La fonction 1 est excessive ;

(M) u, v excessives $\Longrightarrow$ $\min(u, v)$ excessive ;

(L) L'hypothèse (L) de P.-A. MEYER ;

(R_1) $\varphi \in \mathcal{C}_c \Longrightarrow V\varphi \in \mathcal{C}$ $(V = V_0)$;

(R_2) $\overline{\mathcal{S}_b - \mathcal{S}_b} \supset \mathcal{C}_c$ (fermeture uniforme de différences de fonctions excessives bornées) ;

(R_3) $(\varphi \in \mathcal{C}_c^+, \varepsilon > 0, x \in X) \Longrightarrow (\exists K \subset X$ compact et une excessive s. c. i. s telles que :

(1) $s \leq V\varphi$, et $s = V\varphi$ sur $\complement K$,

(2) $s(x) < \varepsilon$).

Il existe alors, $\forall E \subset X$, un noyau unique $\hat{R}_E$ tel que, $\forall u$ excessive, $\hat{R}_E u = \int \hat{R}_E(\ , dy)\, u(y)$ soit la plus grande excessive majorée par

$$\inf\{v \mid v \text{ excessive}, v \geq u \text{ sur } E\} .$$

Dans ce cadre, on lie l'effilement, le balayage, et la topologie fine.

Notations. - L'indice " b " signifie "bornée", et l'indice " c " signifie "à support compact". Si $\mathcal{B}$ est une tribu, $f \in \mathcal{B}$ signifie que f est mesurable par rapport à $\mathcal{B}$ et à la tribu borélienne sur $\overline{\underset{\sim}{R}} = \underset{\sim}{R} \cup \{\pm \infty\}$.

1. Définitions et lemmes préliminaires.

Soient $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille résolvante sous-markovienne sur $(X, \mathcal{B})$. On note par $\mathcal{S}$ le cône des fonctions mesurables et excessives par rapport à $(V_\lambda)_{\lambda>0}$. On suppose :

(1) $1 \in \mathcal{S}$;

(M) $(u, v \in \mathcal{S}) \implies (\min(u, v) \in \mathcal{S})$.

Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ la collection des ensembles $0 \subset X$ ayant la propriété suivante : $(x_0 \in 0) \implies (\exists\, u \in S$ et $\alpha > 0$ tels que $x_0 \in (u > \alpha) \subset 0)$. La famille $\mathcal{O}$ est une topologie.

PROPOSITION 1.1. - Soient $0 \in \mathcal{O} \cap \mathcal{B}$ et $x_0 \in 0$. On a alors

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda(x_0, \complement 0) = 0 .$$

Démonstration. - On peut supposer $0 = (u > \alpha)$. Soient $\beta = u(x_0)$ et $u_1 = \min(u, \beta)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe λ_0 tel que

$$(\beta - \varepsilon) \leqslant \lambda V_\lambda(x_0, u_1) \leqslant \alpha\lambda V_\lambda(x_0, \complement 0) + \beta\lambda V_\lambda(x_0, 0) \leqslant \beta , \qquad \text{pour } \lambda \geqslant \lambda_0 > 0 .$$

Soit $\gamma = \limsup_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda(x_0, \complement 0)$. Alors

$$(1 \in \mathcal{S}) \implies ((\beta - \varepsilon) \leqslant \alpha\gamma + \beta(1 - \gamma) \leqslant \beta) ,$$

et ainsi $\gamma = 0$.

Soit $\mathcal{O}_f$ la topologie faible sur X définie par $\mathcal{S}$. On démontre que les ensembles de la forme $0 \cap (u < \alpha)$, où $u \in \mathcal{S}$, $\alpha > 0$, et $0 \in \mathcal{O}$, sont une base pour $\mathcal{O}_f$, et on note que, pour chaque point, le filtre des voisinages a une base constituée d'ensembles $G \in \mathcal{O}_f \cap \mathcal{B}$.

PROPOSITION 1.2. - Soient $G \in \mathcal{O}_f \cap \mathcal{B}$, et $x_0 \in G$. On a alors

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda(x_0, \complement G) = 0 .$$

Démonstration. - Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer $G = 0 \cap (u < \alpha)$, avec $0 \in \mathcal{O}$, $u > (u(x_0) - \varepsilon)$ sur 0 , et u bornée. On a alors

$$\varepsilon = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda(x_0, [u - u(x_0) + \varepsilon]\, 1_0) \geqslant [\alpha - u(x_0) + \varepsilon] \limsup_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda(x_0, 0 \setminus G) .$$

Soit λ_0 tel que $\lambda V_\lambda(x_0, \complement 0) < \varepsilon/[\alpha - u(x_0) + \varepsilon]$, $\forall\, \lambda \geqslant \lambda_0$. On a alors

$$2\varepsilon \geqslant [\alpha - u(x_0) + \varepsilon] \limsup_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda(x_0, \complement G) ,$$

d'où le résultat.

PROPOSITION 1.3. - Soit s une fonction surmédiane. On a alors

$$\hat{s}(x) = \liminf_{y\to x} \text{fine } s(y) , \qquad \text{où} \quad \hat{s} = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda s .$$

Par conséquent, $\hat{s}(x) = \liminf_{y\to x} s(y)$ par rapport à la topologie $\mathcal{O}$.

Démonstration. - Il suffit de supposer s bornée. On a $s \geq \hat{s} \in \mathbb{S}$, et ainsi $s \geq \liminf \text{fine } s \geq \hat{s}$. Soient $\liminf_{y\to x} \text{fine } s(y) = \beta > 0$, et $0 < \alpha < \beta$. Il existe un voisinage fin G de x dans $\mathcal{B}$, tel que $s \geq \alpha$ sur G. Par conséquent,

$$\hat{s}(x) \geq \limsup_{\lambda\to\infty} \int_G \lambda V_\lambda(x , dy)\ s(y) \geq \alpha\ [\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda(x , G)] = \alpha .$$

COROLLAIRE 1.4. - Soit $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une résolvante sur $(X , \mathcal{B})$, telle que 1 soit excessive. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $(u , v \in \mathbb{S}) \Longrightarrow (\min(u , v) \in \mathbb{S})$;

(2) $\forall\ x \in X ,\ \forall\ G \in \mathcal{O}_f \cap \mathcal{B} ,\ (x \in G) \Longrightarrow (\lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda(x , G) = 1)$;

(3) Chaque fonction surmédiane et finement s. c. i. est excessive ;

(4) Chaque fonction surmédiane et s. c. i. par rapport à $\mathcal{O}$ est excessive.

Démonstration. - (1) $\Longrightarrow$ (2) (proposition 1.2). La démonstration de la proposition 1.3 n'utilise que (2). Ainsi, (2) $\Longrightarrow$ (3) et (4). Evidemment, (3) et (4) impliquent (1) (indépendemment).

Remarque. - On peut démontrer la proposition 1.3 et le corollaire 1.4 sans l'hypothèse (1). Dans ce cas, pour (2), dans le corollaire, on aura

$$(\lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda(x , G) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda(x , 1)) .$$

2. Balayage de fonctions excessives.

On suppose l'hypothèse (L) de P.-A. MEYER [4], c'est-à-dire :

(L) Il existe une mesure positive θ sur $\mathcal{B}$, telle que

$$(\int u\, d\theta = 0 \quad \text{et} \quad u \in \mathbb{S}) \Longrightarrow (u = 0) ;$$

et

(P) Le noyau V est propre.

Soit $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{S}$, et soit $\inf \mathfrak{F}$ la fonction dont la valeur en x est

$$\inf\{v(x) \mid v \in \mathfrak{F}\} .$$

Le théorème XV, T50, dans [4], implique qu'il existe une surmédiane $s \geqslant \inf \mathfrak{F}$ telle que $\inf \mathfrak{F} \geqslant \hat{s}$. La régularisée $\hat{s}$ ne dépend pas du choix de la surmédiane s , si $s \geqslant \inf \mathfrak{F} \geqslant \hat{s}$. On définit $\widehat{\inf}\, \mathfrak{F} = \hat{s}$.

Soient $E \subset X$, et $u \in \mathfrak{S}$. Si $\mathfrak{F} = \{v \mid v \in S , v \geqslant u \text{ sur } E\}$, on note $\inf \mathfrak{F}$ par $R_E\, u$, et $\widehat{\inf}\, \mathfrak{F}$ par $\hat{R}_E\, u$, et par $R_E\, u(x)$ (resp. $\hat{R}_E\, u(x)$) la valeur de cette fonction en x . On appelle $R_E\, u$ la réduite de u par rapport à E , et $\hat{R}_E\, u$ la balayée de u par rapport à E .

LEMME 2.1. - <u>Soit</u> $G \in \mathcal{O}_f$. <u>On a</u> $R_G\, u = \hat{R}_G\, u$, $\forall u \in \mathfrak{S}$. <u>De plus, si</u> $E \subset X$, <u>et si</u> u <u>est finie sur</u> E , $R_E\, u = \inf\limits_G R_G\, u$, $E \subset G \in \mathcal{O}_f$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $s \geqslant R_G\, u \geqslant \hat{s} = \hat{R}_G\, u$. On a $\hat{s}(x) = u(x)$, $\forall x \in G$, en vertu de la proposition 1.3.

Soient u finie sur E , $v \geqslant u$ sur E , et $x \in X$. On a $(v + \varepsilon > u) = G \in \mathcal{O}_f$ et $R_G\, u(x) \leqslant v(x) + \varepsilon$.

PROPOSITION 2.2. - <u>Soient</u> $E \subset X$, <u>et</u> $u , v \in \mathfrak{S}$; <u>on a</u> :

(1) $R_E(u + v) = R_E\, u + R_E\, v$; <u>et</u>
(2) $\hat{R}_E(u + v) = \hat{R}_E\, u + \hat{R}_E\, v$.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de démontrer (1). Soit $G \in \mathcal{O}_f$. On a

$$R_G(u + v) \leqslant R_G\, u + R_G\, v ,$$

et, parce que $\mathfrak{S}$ est un cône de potentiels [5], on a

$$R_G(u + v) = w + z , \qquad w \leqslant R_G\, u , \quad z \leqslant R_G\, v .$$

Soient u , v bornées. On a alors

$$w = R_G\, u \qquad \text{et} \qquad z = R_G\, v .$$

Pour le cas non borné, on passe à la limite.

Un argument formel (dû à CONSTANTINESCU et CORNEA) implique le résultat pour tout E , dès que c'est vrai pour tout G appartenant à $\mathcal{O}_f$ (voir [1]).

On démontre, par les mêmes arguments que dans [1], les résultats suivants (il faut signaler que le passage de la réduite à la balayée est formelle) :

PROPOSITION 2.3. - <u>Soit</u> $(u_n)_n \subset \mathcal{S}$ <u>une suite croissante ; on a :</u>

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} R_E u_n = R_E u$; <u>et</u>

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{R}_E u_n = \hat{R}_E u$;

<u>où</u> $u = \sup\limits_n u_n$.

PROPOSITION 2.4. - <u>Soit</u> $(E_n)_n$ <u>une suite croissante d'ensembles, avec</u> $E = \bigcup E_n$. <u>On a :</u>

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} R_{E_n} u = R_E u$; <u>et</u>

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{R}_{E_n} u = \hat{R}_E u$, $\forall\, u \in \mathcal{S}$.

3. Balayage de mesures.

Soient $E \subset X$, et $x \in X$. On considère la forme linéaire $\ell : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}^+$, définie par la formule

$$\ell(u) = \hat{R}_E\, u(x) \quad ,$$

et on cherche à représenter cette forme par une mesure μ .

On suppose maintenant X localement compact à base dénombrable, et on prend $\mathcal{B}$ égal à la tribu des ensembles universellement mesurables. On suppose que la résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ satisfait aux hypothèses (1), (M), et (L), et de plus aux propriétés suivantes :

(R_1) $\forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c$, $V\varphi \in \mathcal{C}$ $(V = V_0)$;

(R_2) $\overline{\mathcal{S}_b - \mathcal{S}_b} \supset \mathcal{C}_c$, où la fermeture est prise par rapport à la norme uniforme ;

(R_3) $(\varphi \in \mathcal{C}_c^+ , \ \varepsilon > 0 , \ x \in X) \Longrightarrow (\exists\, K \subset X$ compact et une excessive s. c. i. s telles que :

(1) $s \leq V\varphi$, et $s = V\varphi$ sur $\complement K$,

(2) $s(x) < \varepsilon$).

<u>Exemples.</u>

1° Soit V un noyau de Hunt (c'est-à-dire que V satisfait aux hypothèses du théorème de Hunt (théorème X, T15, dans [3])) qui vérifie (L). On démontre que (1) et (M) sont vérifiées, soit par des méthodes probabilistes (voir [4]), soit par la théorie des cônes. Les autres conditions sont trivialement satisfaites.

2° Soit V un noyau tel que $V1 = p$ soit un potentiel continu, strict, borné pour une axiomatique locale de Bauer ou de Brelot, dont 1 est surharmonique. Les excessives sont les hyperharmoniques positives, et ainsi sont s. c. i. Les hypothèses (1), (M), et (L), ainsi que les autres, sont toutes vérifiées.

PROPOSITION 3.1. - Il existe $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ unique, telle que

$$\ell(V\varphi) = \int (V\varphi)\, d\mu \,, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c^+ \,.$$

Démonstration. - La forme ℓ définit une forme linéaire positive $\bar{\ell}$ unique sur $\overline{\mathcal{S}_b - \mathcal{S}_b}$, telle que $\bar{\ell}(u) = \ell(u)$, $\forall\, u \in \mathcal{S}_b$. Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ (unique), telle que $\bar{\ell}(\psi) = \int \psi\, d\mu$, $\forall\, \psi \in \mathcal{C}_c$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^+$. On a $\ell(V\varphi) \geq \int (V\varphi)\, d\mu$, parce que $V\varphi$ est s. c. i. Soient $K \subset X$ un compact, et $s \in \mathcal{S}$ s. c. i. telle que :

(1) $s \leq V\varphi$, et $s = V\varphi$ sur $\complement K$;

(2) $s(x) < \varepsilon$.

On a

$$\ell(V\varphi) = \ell(V\varphi - s) + \ell(s) \,.$$

Si $\psi \in \mathcal{C}_c^+$ et $V\varphi - s \leq \psi$, on a $\ell(V\varphi) \leq \bar{\ell}(\psi) + \varepsilon$. Par conséquent,

$$\ell(V\varphi) \leq \int (V\varphi - s)\, d\mu + \varepsilon \leq \int (V\varphi)\, d\mu + \varepsilon \,.$$

Remarques.

1° Si la résolvante satisfait à (1), (M), (L), et (R_1), on peut démontrer le résultat (sans l'unicité) ci-dessus, lorsque le cône $V(\mathcal{C}_c^+)$ est préadapté [6].

2° Si V est fortement fellérien, la même démonstration s'applique à chaque Vf, $f \in \mathcal{B}_b^+$, si (R_3) est vérifiée pour tout f appartenant à $\mathcal{B}_b^+$.

THÉORÈME 3.2. - Soit $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une résolvante qui vérifie (1), (M), (L), et (R_1), et soit $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ telle que

$$\ell(V\varphi) = \int (V\varphi)\, d\mu \,, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c^+ \,.$$

On a alors

$$(*) \qquad \ell(u) = \int u\, d\mu \,, \qquad \forall\, u \in \mathcal{S} \,.$$

Démonstration. - L'égalité (*) est vérifiée pour $u = Vf$, lorsque :

(1) $f \geq 0$ est s. c. i. ; et, par conséquent, lorsque :

(2) $f \geq 0$ est s. c. s. à support compact.

Pour $K \subset X$ compact, soit $I(K) = \ell(V1_K)$. Soit I^* la fonction définie par les formules

$$I^*(A) = \sup\{I(K) \mid K \subset A \text{ compact}\} \,, \qquad \text{si } A \text{ est un } \mathcal{K}_\sigma \,;$$

$$I^*(C) = \inf\{I^*(A) \mid C \subset A \in \mathcal{K}_\sigma\} \,, \qquad \text{si } C \subset X \,.$$

La fonction I satisfait aux hypothèses du théorème III, T23, dans [3], et alors I^* est une $\mathcal{K}$-capacité de Choquet. On a $I^*(A) = \ell(V1_A)$ si $A \in \mathcal{K}_\sigma$, et $I^*(A) \geq \ell(V1_A)$ si A est $\mathcal{K}$-analytique.

Supposons A $\mathcal{K}$-analytique. On a

$$I^*(A) = \sup_{K \subset A} I(K) = \sup_{K \subset A} \ell(V1_K) \leq \ell(V1_A) \leq I^*(A) \quad .$$

Par conséquent, $\ell(V1_A) = \int (V1_A)\, d\mu$, $\forall$ A $\mathcal{K}$-analytique.

On a alors $\ell(Vf) = \int (Vf)\, d\mu$, $\forall$ $f \geq 0$ borélienne. Soient $f \geq 0$ universellement mesurable, et $0 \leq f_1 \leq f \leq f_2$, avec f_1 , f_2 boréliennes, telles que

$$\langle \lambda , f_1 \rangle = \langle \lambda , f_2 \rangle , \qquad \text{où } \lambda = \mu V$$

($\lambda \in \mathcal{M}^+(X)$, parce que $\langle \lambda , \varphi \rangle = \ell(V\varphi) < +\infty$, $\forall$ $\varphi \in \mathcal{C}_c^+$). On a

$$\langle \mu , Vf_1 \rangle = \ell(Vf_1) \leq \ell(Vf) \leq \ell(Vf_2) = \langle \mu , Vf_2 \rangle \quad .$$

Ainsi, $\ell(Vf) = \langle \mu , Vf \rangle = \int (Vf)\, d\mu$.

Le noyau V étant propre, on a $\ell(u) = \int u\, d\mu$, $\forall$ $u \in \mathcal{S}$.

DÉFINITION. - Soit ε_x^E la mesure de Radon telle que $\hat{R}_E\, u(x) = \int u\, d\varepsilon_x^E$, $\forall$ $u \in \mathcal{S}$.

PROPOSITION 3.3. - <u>L'application</u> $f \rightarrow \hat{R}_E f$, <u>où</u> $\hat{R}_E f(x) = \int f\, d\varepsilon_x^E$, $\forall$ $f \in \mathcal{B}^+$, <u>est un noyau diffusion</u>.

<u>De plus</u>, $(\overline{V(\mathcal{C}_c)} = \mathcal{C}_0) \implies (\hat{R}_E$ <u>tend vers zéro à l'infini</u>) .

<u>Démonstration</u>. - Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c$. Il existe $(f_n)_n \subset \mathcal{S}_b - \mathcal{S}_b$ uniformément bornée, telle que $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\forall$ $x \in X$. On a alors $\hat{R}_E\, \varphi = \lim_{n\to\infty} \hat{R}_E\, f_n \in \mathcal{B}$. Par conséquent, $\hat{R}_E\, f \in \mathcal{B}$, $\forall$ $f \geq 0$ s. c. i., d'où $\hat{R}_E\, f \in \mathcal{B}$, $\forall$ $f \geq 0$ borélienne.

Soit $\mu \in M^+(X)$, et soit $\lambda = \mu\hat{R}_E$. La condition de densité (R_2) implique que λ est de Radon. Soit $f \in \mathcal{B}^+$. Un argument utilisé dans la démonstration du théorème 3.2 implique que $\hat{R}_E\, f \in \mathcal{B}$.

Soient $\psi \in \mathcal{C}_c^+$, et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathcal{C}_c$ telle que $\|V\varphi - \psi\| < \varepsilon$. On a alors $\|\hat{R}_E\, V\varphi - \hat{R}_E\, \psi\| < \varepsilon$, et $\hat{R}_E\, V\varphi$ s'annule à l'infini.

<u>Notation</u>. - Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$. On note $\mu^E = \mu\hat{R}_E$.

PROPOSITION 3.4. - <u>Soient</u> $E \subset X$, <u>et</u> $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$. <u>On a alors</u> $\mu^E(\complement\bar{E}) = 0$.

Démonstration. - Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^+$ de support disjoint de $\overline{E}$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $u , v \in \mathcal{S}_b$ telles que $\|(u - v) - \varphi\| < \varepsilon$. On a alors $\|\hat{R}_E u - \hat{R}_E v\| < \varepsilon$, et ainsi

$$\int \varphi \, d\mu^E = \int (\hat{R}_E u - \hat{R}_E v) \, d\mu - \int [(u - v) - \varphi] \, d\mu^E \leqslant 2\varepsilon \|\mu\| \quad .$$

PROPOSITION 3.5. - Soient $E \subset X$, et $u , v \in \mathcal{S}$ telles que $E \cap G = \emptyset$, $G = (u > v)$. Alors $\mu^E(G) = 0$, $\forall \mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$.

Démonstration. - Soit $w = \min(u , v)$. On a $G = (u > w)$ et $\hat{R}_E u = \hat{R}_E w$. Ainsi $\langle \mu^E , u - w \rangle = 0$.

4. Effilement et balayage.

On démontre ici quelques résultats dus à CONSTANTINESCU [2] en théorie locale.

PROPOSITION 4.1. - Soient $E , F \subset X$, et $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$. On a alors :

(1) $\mu^{E \cup F} \leqslant \mu^E + \mu^F$; et

(2) $\hat{R}_{E \cup F} u \leqslant \hat{R}_E u + \hat{R}_F u$, $\forall u \in \mathcal{S}$.

Démonstration. - On peut supposer u bornée. La démonstration du théorème 1.1 dans [2] s'applique à démontrer (2). Notons par $u(E , F)$ la fonction excessive v telle que

$$\hat{R}_{E \cup F} u + v = \hat{R}_E u + \hat{R}_F u \quad .$$

Il est facile de voir que $(u \leqslant u') \Longrightarrow (u(E , F) \leqslant u'(E , F))$ (en regardant la démonstration).

Soit $\bar{\ell}$ la forme linéaire positive sur $\overline{\mathcal{S}_b - \mathcal{S}_b}$, telle que $\bar{\ell}(u) = \int u(E , F) \, d\mu$, $\forall u \in \mathcal{S}_b$. On a $\mu^E + \mu^F = \mu^{E \cup F} + \nu$, où $\int \varphi \, d\nu = \bar{\ell}(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c$.

COROLLAIRE 4.2. - Soient $E \subset X$, et $G = (u_1 < \alpha_1) \cap (u_2 > \alpha_2) \subset \complement E$, où $u_i \in \mathcal{S}$ et $\alpha_i \in \underset{\sim}{R}^+$. On a alors $\mu^E(G) = 0$, $\forall \mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$.

Démonstration. - $\varepsilon_x^E(G) \leqslant \varepsilon_x^{E_1}(G_1) + \varepsilon_x^{E_2}(G_2)$, où $E_i = E \setminus G_i$, et $G_1 = (u_1 < \alpha_1)$, $G_2 = (u_2 > \alpha_2)$. La proposition 3.5 implique que $\varepsilon_x^E(G) = 0$.

COROLLAIRE 4.3. - Soit $\mathcal{O}_e$ la famille des sous-ensembles $G \subset X$ tels que $(x \in G) \Longrightarrow (\varepsilon_x^{\complement G}(\{x\}) = 0)$. Alors cette famille est une topologie plus fine que la topologie fine $\mathcal{O}_e$.

Démonstration. - Soient $G_i \in \mathcal{O}_e$, et $E_i = \complement G_i$. Alors

$$(x \in G_1 \cap G_2) \implies (\varepsilon_x^{E_1 \cup E_2}(\{x\}) \leqslant \varepsilon_x^{E_1}(\{x\}) + \varepsilon_x^{E_2}(\{x\}) = 0) \quad .$$

Remarque. - Dans le cadre probabiliste, cette topologie est appelée la topologie fine. La condition du corollaire implique que $\varepsilon_x^G = \varepsilon_x$, $\forall\, x \in G$, et ainsi $R_G\, u = \hat{R}_G\, u$, $\forall\, u \in \mathcal{S}$.

Soient μ , $\nu \in \mathcal{M}^+(X)$. On écrit $\mu \preccurlyeq \nu$, si $\int u\, d\mu \leqslant \int u\, d\nu$, $\forall\, u \in \mathcal{S}$.

DÉFINITION. - On dit qu'une fonction excessive finie p est stricte, si, $\forall\, \mu$, $\nu \in \mathcal{M}_b^+(X)$,

$$(\mu \preccurlyeq \nu \quad \text{et} \quad \int p\, d\mu = \int p\, d\nu < +\infty) \implies (\mu = \nu) \quad .$$

LEMME 4.4. - Il existe des potentiels stricts.

Démonstration. - Parce que V satisfait le principe complet du maximum et V est propre, il existe (suivant HUNT) des fonctions $a \in \mathcal{B}^+$ strictement positives, telles que $p = Va$ soit bornée.

Soient $\mu \preccurlyeq \nu$, et $\int p\, d\mu = \int p\, d\nu < +\infty$, μ , $\nu \in \mathcal{M}_b^+(X)$. Posons

$$\mu_1(A) = \langle \mu \,,\, V(a 1_A) \rangle \qquad \text{et} \qquad \nu_1(A) = \langle \nu \,,\, V(a 1_A) \rangle \,, \qquad \forall\, A \in \mathcal{B} \quad .$$

On a

$$(\mu \preccurlyeq \nu) \implies (\mu_1 \leqslant \nu_1) \qquad \text{et} \qquad (\langle \mu \,,\, p \rangle = \langle \nu \,,\, p \rangle) \implies (\mu_1(X) = \nu_1(X)) \quad ,$$

d'où $\mu_1 = \nu_1$.

Par conséquent, $\langle \mu \,,\, Vf \rangle = \langle \nu \,,\, Vf \rangle$, $\forall\, f \in \mathcal{B}^+$. Les deux mesures coïncident alors sur les excessives, et ainsi sur $\mathcal{C}_c$.

DÉFINITION. - E est dit effilé en x , si

$$\inf\{\hat{R}_{E \cap U}(x \,,\, 1) \mid U \in \mathcal{O} \,,\ x \in U\} < 1 \quad .$$

PROPOSITION 4.5. - Soient $E \subset X$, et $x \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) E est effilé en x ;

(2) $\varepsilon_x^E \neq \varepsilon_x$;

(3) $\hat{R}_E\, p(x) < p(x)$, si p est une excessive stricte ;

(4) $\exists\, u \in \mathcal{S}$ telle que $\hat{R}_E\, u(x) < u(x)$.

Démonstration. - D'après la proposition 3.5, la démonstration de CONSTANTINESCU dans [2] s'applique.

DÉFINITION. - $E \subset X$ est dit totalement effilé, si E est effilé en tout point, et E est dit semipolaire, si E est réunion dénombrable d'ensembles totalement effilés.

PROPOSITION 4.6. - Soient $E \subset X$, et $u \in \mathcal{S}$. Alors $\{x \mid R_E u(x) \neq \hat{R}_E u(x)\}$ est semipolaire.

Démonstration. - Soit s surmédiane, telle que $s \geq R_E u \geq \hat{s} = \hat{R}_E u$. On peut supposer $s = \inf_n v_n$, où $(v_n)_n \subset \mathcal{S}$ est décroissante. La démonstration de SATZ, 3.3.4, dans [1], s'applique si on remplace u_0 par s.

PROPOSITION 4.7. - Soit $E \subset X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) E est semipolaire ;

(2) $\exists\, u \in \mathcal{S}$ finie, strictement positive, $(E_n)_n$ avec $E = \bigcup_n E_n$, telles que, $\forall\, n$, $\lim_{k\to\infty} (\hat{R}_{E_n})^k u = 0$;

(3) $\forall\, u \in \mathcal{S}$ finie, la propriété (2) est valable.

Démonstration.

(1) $\Longrightarrow$ (3). On peut supposer E totalement effilé. Soient p une excessive stricte, et $w = u + p$. On a

$$\hat{R}_E w(x) = \hat{R}_E u(x) + \hat{R}_E p(x) < u(x) + p(x) .$$

Soit $E_n = \{x \in X \mid \hat{R}_E w(x) < (1 - \frac{1}{n}) w(x)\}$. On a

$$(\hat{R}_{E_n})^k u \leq (\hat{R}_{E_n})^k w \leq (1 - \tfrac{1}{n})^k w \quad \text{qui tend vers zéro} .$$

Trivialement, (3) $\Longrightarrow$ (2). On suppose (2) et, pour tout n, on pose $E_n^k = \{x \in E_n \mid (\hat{R}_{E_n})^k (x, u) < (\hat{R}_{E_n})^{k-1} (x, u)\}$. Chaque E_n^k est semipolaire, et

$$(u(x) > 0 , \ \forall\, x \in X) \Longrightarrow (E_n = \bigcup_k E_n^k) .$$

Remarque. - Cette proposition, dans le cadre axiomatique, est due à SIEVEKING.

5. Effilement et la topologie fine.

MOKOBODZKI a démontré que $R_E u(x) = \hat{R}_E u(x)$, $\forall\, x \in \complement E$, $\forall\, u \in \mathcal{S}$. (Ce résultat est dû à HUNT dans le cas probabiliste.)

PROPOSITION 5.1. - Soit $E \subset X$. On a alors

$$(E \text{ est effilé en } x_0 \notin E) \iff (\inf\{R_{E\cap U}(x_0\,,\,1) \mid U \in \mathcal{O}\,,\; x_0 \in U\} < 1)\ .$$

Démonstration. - Soient $U \in \mathcal{O}$, $x_0 \in U$, et $\hat{R}_{E\cap U}(x_0\,,\,1) < 1$. On a

$$\hat{R}_{E\cap U}(x_0\,,\,1) = R_{E\cap U}(x_0\,,\,1) < 1\ .$$

COROLLAIRE 5.2. - La topologie fine coïncide avec la topologie $\mathcal{O}_e$ définie dans le corollaire 4.3.

Démonstration. - Soit $G \in \mathcal{O}_e$. Alors

$$(x_0 \in G) \implies (\complement G \text{ est effilé en } x_0)\ .$$

Il existe $U \in \mathcal{O}$, $x_0 \in U$, et $u \in \mathcal{S}$, avec $u \lesssim 1$, $u = 1$ sur $U \setminus G$, et $\alpha = u(x_0) < 1$. Ainsi,

$$G \supset U \cap \left(u < \frac{\alpha + 1}{2}\right) \ni x_0\ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (Heinz). - Harmonische Raüme und ihre Potentialtheorie. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 22).

[2] CONSTANTINESCU (Corneliu). - Some properties of the balayage of measures on a harmonic space, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 17, 1967, p. 273-293.

[3] MEYER (Paul-André). - Probabilités et potentiel. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1318 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 14).

[4] MEYER (Paul-André). - Processus de Markov. - Berlin, Springer-Verlag, 1967 (Lecture Notes in Mathematics, 26).

[5] MOKOBODZKI (Gabriel). - Densité relative de deux potentiels comparables, Séminaire de Probabilités IV, p. 170-194. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 124).

[6] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du potentiel, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 6e année, 1966/67, n° 5, 35 p.

(Texte reçu le 10 février 1971)

J. C. TAYLOR
Department of Mathematics
McGill University
MONTRÉAL (Canada)