Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

FRANCIS HIRSCH

Noyaux associés à des opérateurs de Faraut

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 13 (1969-1970), exp. nº 10, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1969-1970__13__A5_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
13e année, 1969/70, n° 10, 16 p.

19 février 1970

NOYAUX ASSOCIÉS À DES OPÉRATEURS DE FARAUT

par Francis HIRSCH

1. Introduction.

Le point de départ de cette étude est la théorie de Hunt, et les prolongements de cette théorie tels qu'ils sont exposés dans [3]. On sait que, si V est une application linéaire de $\mathcal{K}(X, \underset{\sim}{R})$ (espace des fonctions continues à support compact, définies sur l'espace localement compact X, et à valeurs dans $\underset{\sim}{R}$) dans $\mathcal{C}^0(X, \underset{\sim}{R})$ (espace des fonctions continues de X dans $\underset{\sim}{R}$, et tendant vers 0 à l'infini), et, si $Vf \geqslant 0$ pour toute $f \geqslant 0$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(α) Il existe une famille résolvante sous-markovienne $(R_\lambda)_{\lambda>0}$, telle que, $\forall f \in \mathcal{K}$, $Vf = \lim_{\lambda\to 0} R_\lambda f$;

(β) V vérifie le principe du maximum positif faible ;

(γ) V vérifie le principe complet du maximum.

En outre, si l'image de V est dense dans $\mathcal{C}^0(X, \underset{\sim}{R})$, ces trois propriétés sont équivalentes à :

(δ) V vérifie le principe du maximum positif.

Nous allons nous intéresser, dans le cadre de cet exposé, aux endomorphismes V d'un espace de Banach complexe E $(V \in L(E))$. Nous aurons, dans un cadre abstrait et dans un cadre fonctionnel, des principes analogues à (α), (β), (δ) liés par les mêmes relations. Mais nous n'aurons pas de principe analogue au principe complet du maximum, qui soit équivalent aux autres propriétés qui auront été mises en évidence. Cependant, nous énoncerons un principe du maximum pour des noyaux complexes, qui est une condition nécessaire pour qu'un noyau soit la limite forte d'une famille résolvante à contraction. Puis, dans le cas de la convolution, nous caractériserons toute une classe de noyaux vérifiant ce principe, et nous montrerons, qu'à un coefficient près et sous une hypothèse supplémentaire, ce sont les inverses des distributions de Faraut ([1]).

Cet exposé développe et complète, sur certains points, la Note aux Compte Rendus ([2]).

DÉFINITION 1. - Si E est un espace de Banach sur $\underset{\sim}{C}$, on appellera famille résolvante à contraction sur E, une famille $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ d'éléments de $L(E)$, telle que

$$\forall \lambda > 0 , \qquad \|\lambda R_\lambda\| \leq 1 ,$$

$$\forall \lambda , \mu > 0 , \qquad R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda .$$

2. Etude dans le cas général.

On considère, dans ce paragraphe, un espace de Banach sur $\mathbb{C}$, E , et un endomorphisme de E , V . On note E' le dual de E .

On rappelle qu'un semi-produit intérieur sur E est la donnée d'une application $[\cdot , \cdot]$ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, qui est linéaire en la première variable, et qui vérifie,

$$\forall x \in E , \quad [x , x] = \|x\|^2 , \qquad \text{et} \qquad \forall x , y \in E , \quad |[x , y]| \leq \|x\| \, \|y\| .$$

THÉORÈME 2. - On considère les quatre propriétés suivantes :

(i) Pour tout u de E , il existe un élément φ de E' , tel que

$$\|\varphi\| = 1 , \qquad \varphi(Vu) = \|Vu\| \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Re} \varphi(u) \geq 0 ;$$

(ii) Il existe une famille résolvante à contraction $(R_\lambda)_{\lambda>0}$, telle que

$$\forall u \in E , \qquad \lim_{\lambda\to 0} R_\lambda u = Vu ;$$

(iii) Pour tout semi-produit intérieur $[,]$ sur E , et pour tout u appartenant à E , on a

$$(|[Vu , y]| \leq 1 \ \text{sur} \ \{y \in E ; \ \|y\| = 1 \ \text{et} \ [u , y] \neq 0\}) \implies (\|Vu\| \leq 1) ;$$

(iv) Pour tout u appartenant à E , et tout φ appartenant à E' ,

$$\|\varphi\| = 1 \ \text{et} \ \varphi(Vu) = \|Vu\| \implies \operatorname{Re} \varphi(u) \geq 0 .$$

Alors (iv) $\implies$ (i) $\iff$ (ii) $\implies$ (iii) , et si $\overline{V(E)} = E$, (i) $\iff$ (iv) .

Démonstration.

1° (iv) $\implies$ (i) : C'est trivial.

2° (i) $\implies$ (ii) : Supposons (i), et soit J le plus grand intervalle contenant $[0 , \frac{1}{\|V\|}[$ tel que, pour tout λ appartenant à J , $(I + \lambda V)$ soit inversible dans $L(E)$. Posons, pour λ appartenant à J ,

$$R_\lambda = V(I + \lambda V)^{-1} .$$

Soit u appartenant à E . $u = v + \lambda Vv$, avec v appartenant à E .

$$R_\lambda u = Vv \quad .$$

Soit φ associé à v , d'après (i),

$$\varphi(R_\lambda u) = \|R_\lambda u\| \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Re} \varphi(v) \geqslant 0 \quad .$$

On a donc

$$\operatorname{Re} \varphi(u) \geqslant \lambda \operatorname{Re} \varphi(Vv) = \lambda \|R_\lambda u\| \quad ,$$

ce qui entraîne

$$\|\lambda R_\lambda u\| \leqslant \|u\| \quad .$$

Donc, pour tout λ appartenant à J , on a $\|\lambda R_\lambda\| \leqslant 1$.

Supposons $J = [0 , \ell)$ avec ℓ fini. Soit ℓ' tel que

$$\frac{\ell}{2} < \ell' < \ell \quad ,$$

et définissons R_λ , pour $\ell \leqslant \lambda < 2\ell'$, par

$$R_\lambda = R_{\ell'}[I + (\lambda - \ell') R_{\ell'}]^{-1} \quad .$$

On a alors facilement

$$R_\lambda(I + \lambda V) = (I + \lambda V) R_\lambda = V \quad ,$$

et donc

$$(I + \lambda V)(I - \lambda R_\lambda) = (I - \lambda R_\lambda)(I + \lambda V) = I \quad ,$$

pour tout $\ell \leqslant \lambda < 2\ell'$, ce qui est contradictoire avec la définition de J . Donc $J = [0 , \infty[$, et R_λ peut être défini, pour tout $\lambda \geqslant 0$, par $R_\lambda = V(I + \lambda V)^{-1}$, de sorte que, pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\|\lambda R_\lambda\| \leqslant 1$.

Enfin il est clair que R_λ converge vers V , quand λ tend vers 0 .

3° (ii) $\Longrightarrow$ (i) : Ceci va provenir du lemme suivant.

LEMME 3. - (ii) $\Longrightarrow$ ($\forall\, u \in E$, $\forall\, \lambda > 0$, $\|\lambda Vu\| \leqslant \|u + \lambda Vu\|$) .

(Comme on démontrera ensuite que la propriété ci-dessus implique (i), on aura en fait une équivalence.)

Supposons (ii), alors, pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\lambda R_\lambda(I + \lambda V) = \lambda V \quad ,$$

ce qui démontre le lemme.

Soit u appartenant à E . Pour tout $\lambda > 0$, choisissons φ_λ appartenant à E' (l'existence d'un tel φ_λ est assurée par le théorème de Hahn-Banach), tel que

$$\|\varphi_\lambda\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi_\lambda(u + \lambda Vu) = \|u + \lambda Vu\| \quad .$$

Considérons une valeur d'adhérence φ de la famille f_λ , pour λ tendant vers l'infini,

$$\|\lambda Vu\| \leqslant \|u + \lambda Vu\| = \varphi_\lambda(u + \lambda Vu) = \text{Re } \varphi_\lambda(u) + \text{Re } \varphi_\lambda(\lambda Vu) \leqslant \text{Re } \varphi_\lambda(u) + \|\lambda Vu\| \quad .$$

Il en résulte que $\text{Re } \varphi(u) \geqslant 0$. On a, d'autre part,

$$\|\varphi\| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(Vu) = \underset{\lambda\to\infty}{\text{v. a.}} \ \varphi_\lambda\left(\frac{u}{\lambda} + Vu\right) = \underset{\lambda\to\infty}{\text{v. a.}} \ \left\|\frac{u}{\lambda} + Vu\right\| = \|Vu\| \quad .$$

Donc $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(Vu) = \|Vu\|$. Le couple (u , φ) vérifie donc les conditions de (i).

4° (ii) $\Longrightarrow$ (iii) : Supposons d'abord que V est de la forme $(I - T)^{-1}$ avec $\|T\| < 1$, et prenons pour hypothèse que

$$|[Vu , y]| \leqslant 1 \quad \text{sur } \{y \in E \; ; \; \|y\| = 1 \text{ et } [u , y] \neq 0\}$$

([,] étant un semi-produit intérieur quelconque).

Si $[u , \frac{Vu}{\|Vu\|}] \neq 0$, alors, d'après l'hypothèse, $\|Vu\| \leqslant 1$ (on suppose évidemment que $\|Vu\| \neq 0$).

Supposons $[u , \frac{Vu}{\|Vu\|}] = 0$. Alors $[Vu , \frac{Vu}{\|Vu\|}] = [VTu , \frac{Vu}{\|Vu\|}]$. Donc

$$\|Vu\| \leqslant \|Vu\| \; \|T\| \quad .$$

Il suffit donc de démontrer que $\|Vu\| \leqslant \frac{1}{\|T\|}$. En itérant le raisonnement, on voit qu'il suffit de démontrer que $\|Vu\| \leqslant \frac{1}{\|T\|^n}$ pour un certain n , ce qui est toujours vérifié.

Si maintenant (ii) est vérifié, alors, pour $\mu > \lambda$,

$$R_\lambda + \frac{I}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} (I - (\mu - \lambda) \; R_\mu)^{-1} \quad .$$

Donc $R_\lambda + \frac{I}{\mu - \lambda}$ vérifie (iii), et en faisant tendre d'abord μ vers l'infini, puis λ vers 0 , on voit que V vérifie (iii).

5° Si $\overline{V(E)} = E$, (ii) $\Longrightarrow$ (iv) : Supposons (ii). Alors, pour tout u de E , et tout $\lambda > 0$, on a

$$Vu - \lambda R_\lambda \; Vu = R_\lambda \; u \quad .$$

Soit φ appartenant à E' , tel que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(Vu) = \|Vu\|$. Alors, $\|\lambda R_\lambda\|$ étant $\leqslant 1$, on a

$$\mathrm{Re}(\varphi(Vu) - \varphi(\lambda R_\lambda Vu)) = \|Vu\| - \mathrm{Re}\, \varphi(\lambda R_\lambda Vu) \geqslant 0 \quad .$$

Donc $\mathrm{Re}\, \lambda R_\lambda u \geqslant 0$. Il suffit alors de faire tendre λ vers $+\infty$.

REMARQUES 4.

(1) D'après le lemme 3 et la remarque qui le suit, on voit que : L'ensemble des endomorphismes de E , qui vérifient (ii), est stable par limite forte.

(2) Si E est réflexif, (iv) implique que $\overline{V(E)} = E$. En effet, (iv) implique que V est injectif, et (iv) implique (ii). Il suffit alors d'utiliser un résultat de [5] (p. 218).

(3) Le cas où $\overline{V(E)} = E$ correspond au cas où la famille $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ est associée à un semi-groupe fortement continu à contraction.

(4) On obtient une assertion équivalente à (i), en remplaçant "Pour tout u de E " par "Pour tout u de H , sous-espace dense de E ".

3. Etude dans le cas fonctionnel.

Dans ce paragraphe, X désigne un espace localement compact. On note E l'espace $\mathcal{C}^0(X , \mathbb{C})$, et on considère un opérateur V de $L(E)$.

THÉORÈME 5. - On considère les trois propriétés suivantes :

(P_1) $\forall f \in E$, $\exists\, \theta \in [0 , 2\pi)$, $\exists\, x \in X$, tels que $e^{i\theta} Vf(x) = \|Vf\|$ et $\mathrm{Re}\, e^{i\theta} f(x) \geqslant 0$;

(P_2) $\forall f \in E$, $\forall x \in X$, $(Vf(x) = \|Vf\|) \Longrightarrow (\mathrm{Re}\, f(x) \geqslant 0)$;

(P_3) Il existe une famille résolvante à contraction $(R_\lambda)_{\lambda>0}$, telle que

$$\forall f \in E , \qquad Vf = \lim_{\lambda \to 0} R_\lambda f \quad .$$

Alors $(P_2) \Longrightarrow (P_1) \Longleftrightarrow (P_3)$, et si $\overline{V(E)} = E$, $(P_2) \Longleftrightarrow (P_1) \Longleftrightarrow (P_3)$.

Démonstration. - Les implications $(P_2) \Longrightarrow (P_1) \Longrightarrow (P_3)$ et $(P_3) \Longrightarrow (P_2)$ si $\overline{V(E)} = E$ sont évidentes, compte tenu des implications du théorème 3.

Il faut démontrer $(P_3) \Longrightarrow (P_1)$. Reprenons la démonstration (ii) $\Longrightarrow$ (i) du théorème 3. Les éléments φ_λ de E' peuvent être pris de la forme $e^{i\theta_\lambda} \varepsilon_{x_\lambda}$, où x_λ appartient à X , et θ_λ à $[0 , 2\pi)$. φ peut être alors pris de la forme $e^{i\theta} \varepsilon_x$, où x appartient au compactifié d'Alexandrov de X , et θ appartient à $[0 , 2\pi)$. Si $\|Vf\| \neq 0$, nécessairement x appartient à X , et le résultat est démontré. Si $\|Vf\| = 0$, le résultat est trivial.

PROPOSITION 6. - Soit (P) la propriété suivante :

(P) $\forall f \in E$, $(|Vf(x)| \leqslant 1$ pour tout x de $\mathrm{Supp}\, f)$ $\Longrightarrow$ $\|Vf\| \leqslant 1$.

Alors $(P_1) \Longrightarrow (P)$.

Démonstration. - Il est immédiat de voir que c'est une conséquence de l'implication analogue du théorème 3. Nous allons cependant donner une démonstration directe (n'utilisant pas les familles résolvantes), et valable sans l'hypothèse que V est borné, et même si V est simplement une application de $\mathcal{K}$ dans E .

On suppose donc que V est une application linéaire de E dans E (resp. de $\mathcal{K}$ dans E), qui vérifie

$\forall f \in E$ (resp. $\forall f \in \mathcal{K}$) , $\exists\, \theta$ et $\exists\, x$: $e^{i\theta}\, Vf(x) = \|Vf\|$ et $\mathrm{Re}\, e^{i\theta} f(x) \geqslant 0$.

Soit f appartenant à E (resp. à $\mathcal{K}$), telle que $|Vf(x)| \leqslant 1$ pour tout x de $\mathrm{Supp}\, f$. Supposons qu'il existe x_0 dans $\complement \mathrm{Supp}\, f$, tel que $|Vf(x_0)| = a > 1$.

Soit $\omega = \{x \; ; \; |Vf(x)| > \frac{1}{2} + \frac{a}{2}\}$. ω est un ouvert relativement compact, et $\overline{\omega} \cap \mathrm{Supp}\, f = \emptyset$. Soit $\psi_\lambda = f + \lambda\varphi$, où λ est réel et $\varphi = Vf$ (resp. $\varphi \in \mathcal{K}$ et $\varphi = Vf$ sur ω). On a

$$\text{sur } \complement\omega , \qquad |V\psi_\lambda| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + |\lambda|\; \|\varphi\| \qquad \text{et} \qquad |V\psi_\lambda(x_0)| \geqslant a - |\lambda|\; \|\varphi\| \quad .$$

Donc, pour $|\lambda|$ assez petit, $|V\psi_\lambda|$ atteint son maximum en y_λ sur ω , avec $\mathrm{Re}(\overline{V\psi_\lambda(y_\lambda)}\; \psi_\lambda(y_\lambda)) \geqslant 0$.

Or, f étant nulle sur ω , on a

$$\lambda\, \mathrm{Re}(\overline{Vf(y_\lambda)}\; \varphi(y_\lambda)) + \lambda^2\, \mathrm{Re}(\overline{V\varphi(y_\lambda)}\; \varphi(y_\lambda)) \geqslant 0 \quad .$$

Prenons $\lambda < 0$, on obtient

$$|Vf(y_\lambda)|^2 + \lambda\, \mathrm{Re}(\overline{V\varphi(y_\lambda)}\; \varphi(y_\lambda)) \leqslant 0 \quad .$$

Or $|Vf_\lambda(y_\lambda)|^2$ est supérieur ou égal à $\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2}\right)^2$. On a donc une contradiction.

4. Noyaux de convolution sur $\mathbb{R}$.

Nous gardons les notations du paragraphe 2, avec $X = \mathbb{R}$.

On note P l'ensemble des distributions T , vérifiant

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) , \qquad f(0) = \|f\| \Longrightarrow \mathrm{Re}\langle T , f \rangle \leqslant 0 \quad .$$

D'après [1], ce sont des distributions de $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$, et elles sont associées aux générateurs infinitésimaux de semi-groupes de mesures de norme $\leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$.

Enfin, si μ est une mesure bornée, on notera V_μ le noyau sur E : $f \rightarrow \mu \star f$.

Nous donnons d'abord une caractérisation des distributions de P admettant pour inverse une mesure bornée.

PROPOSITION 7. - <u>Si</u> T <u>appartient à</u> P, <u>pour tout</u> $\lambda > 0$, $(\lambda\delta - T)$ <u>admet un inverse de convolution qui est une mesure bornée</u> E_λ.

<u>Pour que</u> T <u>admette un inverse qui soit une mesure bornée</u> $(-k)$, <u>il faut et il suffit que</u>

$$\sup_{\lambda>0} \|E_\lambda\| < \infty$$

($\| \|$ <u>désignant la norme dans l'ensemble des mesures bornées</u>).

<u>Les mesures bornées</u> k <u>obtenues ainsi sont caractérisées par</u>

$$V_k \quad \underline{\text{vérifie}} \quad (P_2) \quad \underline{\text{et}} \quad \overline{V_k(E)} = E \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Si T appartient à P, $(\lambda\delta - T)^{-1}$ est la mesure associée à la résolvante d'ordre λ du semi-groupe engendré par T.

Notons $E_\lambda = (\lambda\delta - T)^{-1}$, alors $\widehat{E_\lambda} = \frac{1}{\lambda - \hat{T}}$. Donc, si $\|E_\lambda\| \leqslant M$ pour tout $\lambda > 0$, $\left|\frac{1}{\lambda - \hat{T}}\right| \leqslant \|E_\lambda\| \leqslant M$. Il en résulte que $\hat{T}$ ne s'annule pas, et donc $\frac{1}{\hat{T}}$ est continue. Alors, d'après un théorème de Rudin ([4], p. 34), $\frac{1}{\hat{T}}$ est la transformée de Fourier d'une mesure bornée $-k$, qui est l'inverse de T.

Réciproquement, si T admet un inverse $-k$ qui est une mesure bornée,

$$k = \lambda k \star E_\lambda + E_\lambda \ .$$

Alors, pour tout $\lambda > 0$, $\delta + \lambda k$ est inversible dans l'algèbre des mesures bornées, et $E_\lambda = k \star (\delta + \lambda k)^{-1}$. Ce qui entraîne

$$\sup_{\lambda>0} \|E_\lambda\| < \infty \ .$$

Le reste de la proposition est évidente.

Nous allons maintenant caractériser les mesures bornées k, symétriques ou à support limité en 0, telles que V_k vérifie (P), et nous en déduirons, sous certaines hypothèses, une nouvelle caractérisation des mesures bornées inverses, à un coefficient près, de distributions de P.

THÉORÈME 8. - <u>Soit</u> k <u>une mesure bornée symétrique non nulle sur</u> $\underline{R}$. <u>Pour que</u> V_k <u>vérifie</u> (P), <u>il faut et il suffit qu'il existe deux nombres complexes</u> c_1 <u>et</u>

c_2, non tous les deux nuls, et qu'il existe T appartenant à P, tel que

$$k \star T = c_1\, \delta + c_2\, \delta'' \ .$$

Démonstration. - Pour démontrer la condition nécessaire, nous allons utiliser le lemme suivant.

LEMME 9. - Soit V une application linéaire de E dans E. Sont équivalents :

(i) $\forall f \in E$, $(|Vf(x)| \leqslant 1$ pour tout x de $\operatorname{Supp} f) \Longrightarrow \|Vf\| \leqslant 1$;

(ii) Pour toute mesure bornée μ, de norme $\leqslant 1$, et pour tout fermé F, il existe une mesure bornée ν de norme $\leqslant 1$, telle que

$$\forall f \in E, \qquad \operatorname{Supp} f \subset F \Longrightarrow \int Vf\, d\mu = \int Vf\, d\nu \ ,$$

et

$$\operatorname{Supp} \nu \subset F \ .$$

Démonstration. - Supposons (i). Notons $E_F = \{f \in E \ ; \ \operatorname{Supp} f \subset F\}$. Soit μ une mesure de norme $\leqslant 1$. Considérons l'application de $V(E_F)|F$ dans $\underset{\sim}{C}$, définie par

$$Vf|F \to \int Vf\, d\mu \ .$$

D'après (i), cette application est bien définie, et de norme $\leqslant 1$. D'après le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge en une application linéaire continue de $C^0(F, \underset{\sim}{C})$ dans $\underset{\sim}{C}$, de norme $\leqslant 1$, application qui se représente par une mesure ν bornée portée par F. Il est clair que ν convient.

Supposons (ii). Soit f dans E, telle que $|Vf(x)| \leqslant 1$ pour tout x de $\operatorname{Supp} f$. Soit x_0 quelconque. Il existe une mesure ν, telle que

$$\|\nu\| \leqslant 1 , \qquad \operatorname{Supp} \nu \subset \operatorname{Supp} f \qquad \text{et} \qquad Vf(x_0) = \int Vf(y)\, d\nu(y) \ .$$

Ceci entraîne $|Vf(x_0)| \leqslant 1$.

Remarque. - Le résultat précédent est valable, si $E = C^0(X, \underset{\sim}{C})$ avec X localement compact quelconque. On aurait un résultat analogue, si V était simplement une application linéaire de $\mathcal{K}(X, \underset{\sim}{C})$ dans $C^0(X, \underset{\sim}{C})$.

Reprenons la démonstration du théorème. D'après le lemme, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une mesure bornée σ_ε, telle que

$$\operatorname{Supp} \sigma_\varepsilon \subset]-\varepsilon, \varepsilon[, \qquad \|\sigma_\varepsilon\| \leqslant 1 , \qquad \check{k} = \check{k} \star \sigma_\varepsilon \quad \text{sur } [-\varepsilon, \varepsilon] \ .$$

Donc il existe deux mesures bornées σ_ε et α_ε, telles que

Supp $\sigma_\varepsilon \subset]-\varepsilon, \varepsilon[$, Supp $\alpha_\varepsilon \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\|\sigma_\varepsilon\| \leqslant 1$ et $k \star (\delta - \sigma_\varepsilon) = \alpha_\varepsilon$, et σ_ε et α_ε symétriques.

<u>1er cas</u> : σ_ε <u>ne converge pas faiblement vers</u> δ . – Il existe alors $\sigma \neq \delta$, et λ appartenant à $\mathbb{C}$, tels que

$$k \star (\sigma - \delta) = \lambda\delta \quad .$$

Supposons que $\lambda = 0$. k étant non nul, il existe $x_0 > 0$ tel que $\hat{k}(x_0) \neq 0$, et donc $1 = \hat{\sigma}(x_0) = \int \cos 2\pi x_0 y \, d\sigma(y)$. σ étant de norme $\leqslant 1$, ceci entraîne que σ est porté par $\{\frac{n}{2x_0}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Mais $\hat{k}(x)$ étant non nul pour x assez voisin de x_0 , on voit que σ est porté par $\{\frac{n}{2x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ pour de tels x . En choisissant un x tel que $\frac{x}{x_0}$ soit irrationnel, on voit que σ est porté par $\{0\}$, et donc $\sigma = \delta$, ce qui est contradictoire. Dans ce cas, $(\sigma - \delta)$ étant un élément de P , la condition nécessaire est démontrée.

<u>2e cas</u> : σ_ε <u>converge faiblement vers</u> δ . – Soit $x_0 > 0$ tel que $\hat{k}(x_0) \neq 0$.

(a) $|1 - \widehat{\sigma_\varepsilon}(x_0)| \geqslant M\varepsilon^2$ pour ε assez petit, M étant une constante > 0 :

En effet,

$$|1 - \widehat{\sigma_\varepsilon}(x_0)| \geqslant \int (1 - |\cos 2\pi x_0 y|) \, d|\sigma_\varepsilon|(y) \geqslant \int_{[-1/4x_0, 1/4x_0]} 2 \sin^2 \pi x_0 y \, d|\sigma_\varepsilon|(y)$$

$$\geqslant 2 \sin^2 \pi x_0 \varepsilon \int_{[-1/4x_0, 1/4x_0]} d|\sigma_\varepsilon|(y) \quad .$$

Mais σ_ε convergeant faiblement vers δ , $\int_{[-1/4x_0, 1/4x_0]} d|\sigma_\varepsilon|(y)$ est majoré par une constante > 0 , d'où le résultat.

(b) $\dfrac{\widehat{\alpha_\varepsilon}}{\widehat{\alpha_\varepsilon}(x_0)}$ est une famille équicontinue, uniformément bornée en module par un polynôme du second degré :

En effet,

$$\left|\frac{\widehat{\alpha_\varepsilon}(x)}{\widehat{\alpha_\varepsilon}(x_0)}\right| = \left|1 + \frac{\widehat{\alpha_\varepsilon}(x) - \widehat{\alpha_\varepsilon}(x_0)}{\widehat{\alpha_\varepsilon}(x_0)}\right| \quad ,$$

et

$$|\widehat{\alpha_\varepsilon}(x) - \widehat{\alpha_\varepsilon}(x')| \leqslant \int |\cos 2\pi xy - \cos 2\pi x'y| \, d|\alpha_\varepsilon|(y) \leqslant A\varepsilon^2 |x^2 - x'^2| \quad ,$$

$$|\widehat{\alpha_\varepsilon}(x_0)| \geqslant B\varepsilon^2 \qquad \text{(d'après (a))} \quad ,$$

où A et B sont des constantes strictement positives.

(c) Il existe une suite ε_n tendant vers 0, telle que $\dfrac{\alpha_{\varepsilon_n}}{\widehat{\alpha_{\varepsilon_n}}(x_0)}$ converge au sens de $\mathcal{E}'$ vers $\lambda\delta + \mu\delta''$, avec λ et μ non tous les deux nuls :

Ceci découle immédiatement de (b), et de ce que Supp α_ε est inclus dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

(d) Il existe une famille $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres strictement positifs, et une suite σ_n de mesures de norme $\leqslant 1$, telles que

$$\lim_{n\to\infty} k \star \frac{\sigma_n - \delta}{\lambda_n} = D \quad \text{dans } \mathcal{E}' ,$$

avec $D = c_1\,\delta + c_2\,\delta''$ (c_1 et c_2 non tous les deux nuls).

(e) $V_k(\mathcal{D})$ est dense dans E ($\mathcal{D}$, espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact) :

En effet, si f appartient à $\mathcal{D}$, $\lim\limits_{n\to\infty} V_k\left(\dfrac{\sigma_n \star f - f}{\lambda_n}\right) = Df$ au sens de la convergence uniforme. Donc $\overline{V_k(E)} \supset \{Df\ ;\ f \in \mathcal{D}\}$. Or $\overline{D(\mathcal{D})} = E$. Donc $\overline{V_k(E)} = E$, et, V_k étant borné, le résultat est démontré.

(f) V_k est injectif sur $\mathcal{D}$:

$V_k\, f = 0$ implique $Df = 0$, et donc $f = 0$.

(g) On définit un opérateur A sur le domaine $D_A = V_k(\mathcal{D})$ par

$$A(V_k\, f) = Df .$$

Alors :

$\forall\, g \in D_A$, $g(x) = \|g\| \implies \operatorname{Re} Ag(x) \leqslant 0$. (En effet, si $V_k\, f(x) = \|V_k\, f\|$, $\operatorname{Re}\left(\dfrac{\sigma_n - \delta}{\lambda_n} \star K \star f\right)(x) \leqslant 0$ pour tout n.)

$\overline{D_A} = E$ (d'après (2)).

$\forall\, \lambda > 0$, $\overline{(\lambda I - A)D_A} = E$.

Pour prouver ce dernier point, on doit prouver que

$$\forall\, \lambda > 0 , \qquad \overline{\{\lambda V_k\, f - Df\ ;\ f \in \mathcal{D}\}} = E ,$$

ce qui, d'après le théorème de Hahn-Banach, revient à montrer que, pour tout $\lambda > 0$, et toute mesure μ bornée,

$$\lambda k \star \mu - D\mu = 0 \implies \mu = 0 .$$

Or

$$(\lambda k \star \mu - D\mu = 0) \iff (\lambda\hat{k} - \hat{D})\hat{\mu} = 0$$

$$\iff \hat{k}[\lim_{n\to\infty}\left(\lambda + \frac{1-\widehat{\sigma_n}}{\lambda_n}\right)]\,\hat{\mu} = 0$$

$$\iff \hat{k}\hat{\mu} = 0 \quad ,$$

la dernière équivalence provenant de ce que $\mathrm{Re}\left(\lambda + \frac{1-\widehat{\sigma_n}}{\lambda_n}\right) \geqslant \lambda$. Or $\hat{k}$ a pour seuls zéros les zéros de D , c'est-à-dire $\hat{k}$ a au plus deux zéros. On a donc $\hat{\mu} = 0$, ce qui entraîne $\mu = 0$.

(h) (A , D_A) préengendre un semi-groupe à contraction sur E , invariant par les translations (cf. [1], p. 3).

Soit alors $\hat{A}$ le générateur de ce semi-groupe. $\hat{A} = T \star \cdot$, avec T appartenant à P , et $D_{\hat{A}} \supset \dot{\mathcal{B}}$ (espace des fonctions indéfiniment dérivables, telles que la fonction et toutes ses dérivées tendent vers 0 à l'infini). Donc, pour tout f de $\mathcal{D}$, on a

$$T \star k \star f = A(V_k\, f) = Df \quad .$$

Il en résulte que $T \star k = D$.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Supposons que $k \star T = D$, avec T appartenant à P , et $D = c_1\,\delta + c_2\,\delta''$ où c_1 et c_2 non nuls. Pour tout $\lambda > 0$, posons $E_\lambda = (\lambda\delta - T)^{-1}$. E_λ est une mesure bornée, et

$$k = - E_\lambda \star D + \lambda E_\lambda \star k \quad .$$

$\mathrm{Re}\,\hat{T} \leqslant 0$, et $\hat{T}$ a au plus deux zéros.

Donc $\lambda\widehat{E_\lambda}\,\hat{k} = \frac{\lambda\hat{k}}{\lambda - \hat{T}}$ converge vers 0 presque-partout, en étant majoré par $\|\hat{k}\|$, quand λ tend vers 0 . Donc $\lambda E_\lambda \star k$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'$.

Le noyau de convolution associé à E_λ vérifie (P), d'après la proposition 7, et D diminue les supports. Donc $E_\lambda \star D$ vérifie (P) sur $\mathcal{D}$. Par un passage à la limite,

$$\forall\, f \in \mathcal{D} , \qquad |V_k\, f(x)| \leqslant 1 \text{ pour tout } x \text{ de } \mathrm{Supp}\, f \implies \|V_k\, f\| \leqslant 1 \quad .$$

On en déduit, par régularisation, la même propriété pour les fonctions f de $\mathcal{K}$, puis, par un nouveau passage à la limite, pour les fonctions f de E .

REMARQUES 10.

1° La démonstration de la suffisance n'utilise pas la symétrie de k , ni la forme de l'opérateur différentiel D .

2° Il existe des mesures bornées k symétriques, telles que V_k vérifie (P), et pour lesquelles il n'existe pas de T appartenant à P tel que $k \star T = e^{i\theta}\,\delta$ (pour un certain θ). C'est le cas par exemple de $k = \left(\delta - \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-\sqrt{3}|x|}\, dx\right)$.

En effet, $k \star \left(\frac{\delta'' - 3\delta}{2}\right) = \frac{\delta'' - \delta}{2}$, et donc V_k vérifie (P). Mais

$$k \star (e^{-|x|}\, dx + \delta) = \delta \quad ,$$

et pour aucun θ , $e^{i\theta}(e^{-|x|}\, dx + \delta)$ n'est un élément de P .

Le théorème suivant donne une condition suffisante, mais évidemment non nécessaire, pour qu'une mesure symétrique bornée k , telle que V_k vérifie (P), soit, à une multiplication par $e^{i\theta}$ près, l'inverse d'une distribution de P .

THÉORÈME 11. - Soit k une mesure symétrique bornée non nulle, telle que

$$\liminf_{|x|\to\infty} |\hat{k}(x)| = 0 \quad .$$

Alors sont équivalents :

(i) V_k vérifie (P) ;

(ii) Il existe θ appartenant à $[0\ ,\ 2\pi]$, et T appartenant à P , tels que $k \star T = e^{i\theta}\,\delta$.

Démonstration. - Il suffit de démontrer (i) $\Longrightarrow$ (ii) . Or si (i) est vérifié, d'après le théorème 8, il existe un polynôme différentiel d'ordre 2 , D , et une distribution T appartenant à P , tels que

$$k \star T = D \quad .$$

Or si T appartient à P , $|\hat{T}| = o(|x|^2)$ (en effet, $T = S + \mu$, avec S distribution à support compact d'ordre $\leqslant 2$, et μ une mesure bornée ([1])). Il en résulte que si $\liminf_{|x|\to\infty} |\hat{k}(x)| = 0$, D est de la forme $c_1\,\delta$.

Nous allons maintenant donner un théorème analogue aux théorèmes 8 et 11, pour des mesures bornées à support dans $[0\ ,\ \infty[$.

THÉORÈME 12. - Soit k une mesure bornée non nulle à support dans $[0\ ,\ \infty[$. Pour que V_k vérifie (P), il faut et il suffit qu'il existe T appartenant à P et à support dans $[0\ ,\ \infty[$, et c_1 et c_2 nombres complexes non tous les deux nuls, tels que

$$k \star T = c_1\,\delta + c_2\,\delta' \quad .$$

Si $k(\{0\}) = 0$, alors, pour que V_k vérifie (P), il faut et il suffit qu'il existe

θ appartenant à $[0\,,\,2\pi]$, et T appartenant à P, et à support dans $[0\,,\,\infty[$, tels que $k \star T = e^{i\theta}\,\delta$.

Démonstration. – Elle est un peu plus simple que les démonstrations précédentes, à cause des propriétés de la transformation de Laplace.

D'après la démonstration de la suffisance dans le théorème 8, si $k \star T = c_1\,\delta + c_2\,\delta'$, V_k vérifie (P).

Supposons, réciproquement, que V_k vérifie (P). D'après le lemme 9, pour tout ε, il existe σ_ε et α_ε, mesures bornées, telles que

$$\|\sigma_\varepsilon\| \leqslant 1\,, \qquad \operatorname{Supp}\sigma_\varepsilon \subset\,]-\infty\,,\,-\varepsilon]\,, \qquad \operatorname{Supp}\alpha_\varepsilon \subset [-\varepsilon\,,\,\infty[\,,$$

et

$$\check{k} \star (\delta - \sigma_\varepsilon) = \alpha_\varepsilon \quad .$$

Il en résulte que $\operatorname{Supp}\alpha_\varepsilon \subset [-\varepsilon\,,\,0]$ et $k \star (\delta - \check{\sigma}_\varepsilon) = \check{\alpha}_\varepsilon$.

Soient K, S_ε, A_ε les transformées de Laplace de k, $\check{\sigma}_\varepsilon$, et $\check{\alpha}_\varepsilon$, définies sur $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Soit $x_0 > 0$ un nombre tel que $K(x_0) \neq 0$. Pour $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, on a

$$\left|\frac{1 - S_\varepsilon(z)}{1 - S_\varepsilon(x_0)}\right| = \frac{\left|1 - \int e^{-tz}\,d\check{\sigma}_\varepsilon(t)\right|}{\left|1 - \int e^{-tx_0}\,d\check{\sigma}_\varepsilon(t)\right|} \leqslant 1 + \frac{\int \left|e^{-tx_0} - e^{-tz}\right|\,d|\sigma_\varepsilon|(t)}{\int (1 - e^{-tx_0})\,d|\sigma_\varepsilon|(t)}\,,$$

$$\left|\frac{e^{-tx_0} - e^{-tz}}{(1 - e^{-tx_0})}\right| \leqslant A + B|x_0 - z|\,, \qquad \text{pour tout } t \geqslant 0\,,$$

A et B étant des constantes positives. Donc

$$\left|\frac{1 - S_\varepsilon(z)}{1 - S_\varepsilon(x_0)}\right| \leqslant A + B|x_0 - z| \quad .$$

On en déduit

$$\left|\frac{A_\varepsilon(z)}{1 - S_\varepsilon(x_0)}\right| \leqslant |K(z)|\,(A + B|x_0 - z|) \quad .$$

D'autre part,

$$\frac{|A_\varepsilon(z) - A_\varepsilon(z')|}{|1 - S_\varepsilon(x_0)|} \leqslant \frac{\varepsilon|z - z'|}{1 - e^{-\varepsilon x_0}} \leqslant M|z - z'| \quad .$$

Donc il existe une suite ε_n tendant vers 0, telle que $\dfrac{\check{\alpha}_{\varepsilon_n}}{A_{\varepsilon_n}(x_0)}$ tende, au sens des distributions, vers $\lambda\delta + \mu\delta'$ avec λ et μ non tous les deux nuls. Il en résulte qu'il existe $a > 0$, tel que, pour $\operatorname{Re} z > a$, $\dfrac{1 - S_{\varepsilon_n}(z)}{1 - S_{\varepsilon_n}(x_0)}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction analytique, majorée en module par $A + B|x_0 - z|$.

Donc il existe une limite de $\dfrac{\delta - \check{\sigma}_{\varepsilon_n}}{1 - S_{\varepsilon_n}(x_0)}$ au sens des distributions. Alors, à un coefficient près, cette distribution est un élément T de P, à support dans $[0, \infty[$. Donc il existe T appartenant à P, et à support dans $[0, \infty[$, telle que

$$k \star T = c_1 \delta + c_2 \delta' \qquad (c_1 \text{ et } c_2 \text{ non tous nuls}) .$$

D'autre part, le calcul montre que $|\mathcal{L}T(x)| \leq A' + B'|x|$. Il en résulte immédiatement que, si $k(\{0\}) = 0$, $c_2 = 0$.

5. Généralisation à $\underline{R}^n$ $(n \geq 2)$.

Si k est une mesure bornée, on note encore V_k le noyau de convolution associé, et P l'ensemble des distributions de Faraut sur $\underline{R}^n$.

THÉORÈME 8'. - Soit k une mesure bornée sur $\underline{R}$, non nulle, et invariante par les rotations de $\underline{R}^n$. Pour que V_k vérifie (P), il faut et il suffit qu'il existe deux nombres complexes c_1 et c_2, non tous les deux nuls, et une distribution T de P, invariante par rotations, telle que

$$k \star T = c_1 \delta + c_2 \Delta \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2 \delta}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \delta}{\partial x_n^2}\right) .$$

Démonstration. - On "balaye" k sur le complémentaire de la boule de centre 0 et de rayon ε, et, k étant invariant par rotations, on voit qu'il existe des mesures σ_ε et α_ε bornées, invariantes par rotations, telles que

$$\|\sigma_\varepsilon\| \leq 1 , \qquad \operatorname{Supp} \sigma_\varepsilon \subset \{x ;\ |x| \geq \varepsilon\} , \qquad \operatorname{Supp} \alpha_\varepsilon \subset \{x ;\ |x| \leq \varepsilon\} ,$$

et

$$k \star (\delta - \sigma_\varepsilon) = \alpha_\varepsilon .$$

Soit u appartenant à $\underline{R}^n$, $u \neq 0$, tel que $\hat{k}(u) \neq 0$.

$$|1 - \int e^{2i\pi u.y}\, d\sigma_\varepsilon(y)| \geq \int_{|y| \leq |u|/4} 2 \sin^2 \pi u.y \; d|\sigma_\varepsilon|(y)$$

$$= \iint_{|y| \leq |u|/4} 2 \sin^2 \pi u.y \; d|\sigma_\varepsilon|(y)\, d\sigma(u) ,$$

où σ est la répartition uniforme de la masse $+1$ sur la sphère de centre 0 et de rayon $|u|$.

$$\sin^2 \pi(u.y) \geqslant 4(u.y)^2 .$$

Il en résulte que

$$|1 - \int e^{2i\pi u.y}\, d\sigma_\varepsilon(y)| \geqslant \frac{8}{n} |u|^2 \int_{|y|\leqslant|u|/4} |y|^2\, d|\sigma_\varepsilon(y)|$$

$$\geqslant \frac{8\varepsilon^2 |u|^2}{n} \int_{|y|\leqslant|u|/4} d|\sigma_\varepsilon|(y) .$$

On a donc une inégalité analogue à celle que l'on avait dans le théorème 8, et tout se poursuit comme dans le paragraphe 3 avec des adaptations évidentes.

On a de même les théorèmes suivants.

THÉORÈME 11'. - Soit k une mesure bornée non nulle de $\mathbb{R}^n$, invariante par rotations, et telle que $\liminf_{|x|\to\infty} |\hat{k}(x)| = 0$. Alors sont équivalents :

(i) V_k vérifie (P) ;

(ii) Il existe θ appartenant à $[0 , 2\pi)$, et T appartenant à P, telle que $k \star T = e^{i\theta}\, \delta$.

THÉORÈME 12'. - Soit k une mesure bornée non nulle de $\mathbb{R}^n$, à support dans un cône convexe fermé Γ, dont le cône dual est d'intérieur non vide. Pour que V_k vérifie (P), il faut et il suffit qu'il existe T appartenant à P et à support dans Γ, et des $(c_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ non tous nuls, tels que

$$k \star T = c_0\, \delta + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial \delta}{\partial x_i} .$$

Si $k(\{0\}) = 0$, alors pour que V_k vérifie (P), il faut et il suffit qu'il existe θ appartenant à $[0 , 2\pi)$, et T appartenant à P, telle que

$$k \star T = e^{i\theta}\, \delta .$$

Démonstration. - Pour tout ε, il existe, si V_k vérifie (P) et k à support dans Γ, des mesures bornées σ_ε et α_ε telles que

$$\|\sigma_\varepsilon\| \leqslant 1 , \qquad \operatorname{Supp} \sigma_\varepsilon \subset \Gamma \cap \{x ;\ |x| \geqslant \varepsilon\} , \qquad \operatorname{Supp} \alpha_\varepsilon \subset \Gamma \cap \{x ;\ |x| \leqslant \varepsilon\} ,$$

et

$$k \star (\delta - \sigma_\varepsilon) = \alpha_\varepsilon .$$

On définit

$$K(z) = \int e^{t.z}\, dk(t) , \qquad \text{pour } z \in C + i\mathbb{R}^n$$

(où C est le cône dual), et de même $S_\varepsilon(z)$ et $A_\varepsilon(z)$. Soit u appartenant à $\overset{\circ}{C}$, tel que $K(u) \neq 0$. Il existe $a > 0$, avec

$$t.u \leqslant - a|t| , \qquad \text{pour tout } t \text{ de } \Gamma .$$

On peut donc trouver des inégalités analogues à celles obtenues dans la démonstration du théorème 12, et terminer la démonstration de la même façon.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FARAUT (J.). - Semi-groupes de mesures complexes et calcul symbolique sur les générateurs infinitésimaux de semi-groupes d'opérateurs (Thèse Sc. math. Orsay, 1969).

[2] HIRSCH (F.). - Sur un principe du maximum pour des noyaux complexes bornés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, Série A, p. 959-962.

[3] LION (G.). - Familles d'opérateurs et frontière en théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, fasc. 2, p. 389-453 (Thèse Sc. math. Paris, 1966).

[4] RUDIN (W.). - Fourier analysis on groups. - New York, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 12).

[5] YOSIDA (K.). - Functional analysis. 2nd edition. - Berlin, Springer-Verlag, 1968 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 123).

(Texte reçu le 30 mai 1970)

Francis HIRSCH
M. Ass. ENSET
1 avenue du Parc
91 - RIS-ORANGIS