SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

FRANCIS HIRSCH

Sur le principe classique du maximum

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 13 (1969-1970), exp. nº 6, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1969-1970__13__A4_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
13e année, 1969/70, n° 6, 11 p.

9 janvier 1970

SUR LE PRINCIPE CLASSIQUE DU MAXIMUM

par Francis HIRSCH

1. Introduction.

Le but de cet exposé est d'étudier certaines relations entre les noyaux vérifiant le principe classique du maximum et les "quotients" de générateurs infinitésimaux. Les résultats trouvés ne sont que partiels. Les idées de base sont dues à A. BEURLING et J. DENY, et notamment l'étude dans le cas du tore ([4]).

On établit d'abord une équivalence entre le principe classique du maximum et un principe du balayage, et on montre que, sous certaines hypothèses, un quotient de générateurs vérifie le principe classique du maximum. Ces deux résultats étendent, avec des démonstrations sensiblement différentes, des résultats de J. DENY [1].

Ensuite, grâce au balayage et à l'utilisation des fonctions de Bernstein, ou des fonctions définies négatives, on prouve que certains noyaux de convolution vérifiant le principe classique du maximum sont quotients de générateurs.

NOTATIONS.

X : espace localement compact ;

$\mathcal{K}(X)$: espace des fonctions réelles continues, définies sur X, à support compact ;

$\mathcal{C}(X)$: espace des fonctions réelles continues, définies sur X ;

$\mathcal{C}^0(X)$: espace des fonctions réelles continues, définies sur X, et tendant vers 0 à l'infini.

On notera par $\mathcal{K}_+(X)$, $\mathcal{C}_+(X)$, $\mathcal{C}_+^0(X)$ les sous-ensembles des espaces précédents formés des fonctions positives.

2. Etude dans le cas général.

PROPOSITION 1. - *Soit* V *une application linéaire de* $\mathcal{K}(X)$ *dans* $\mathcal{C}(X)$ (*resp.* $\mathcal{C}^0(X)$). *Les propriétés* (I) *et* (II) *sont équivalentes* :

(I) V *satisfait au principe classique du maximum, c'est-à-dire* :

$\forall f \in \mathcal{K}_+(X)$, $(Vf(x) \leqslant 1$ *pour tout* x *de* $\operatorname{Supp} f) \Longrightarrow (Vf(x) \leqslant 1$ *pour tout* $x)$;

(II) *Pour tout compact* F (*resp. pour tout fermé* F), *et pour toute mesure* μ *positive et bornée sur* X, *il existe une mesure* ν *positive et bornée, telle que* :

(1) $\mathrm{Supp}(\nu) \subset F$,

(2) $\nu(1) \leq \mu(1)$,

(3) $\forall\ f \in \mathcal{K}_+(X)$, $(\mathrm{Supp}\ f \subset F) \implies \left(\int Vf\ d\mu \leq \int Vf\ d\nu\right)$.

Démonstration. - La démonstration utilise la technique du balayage par rapport à un cône de fonctions (cf. [6]).

Supposons (I). Soit F un compact (resp. un fermé), et soit μ une mesure positive bornée. Notons

$$C_F = \{a - Vf\ ;\ a \in \mathbb{R}_+\ ,\ f \in \mathcal{K}_+(X)\ ,\ \mathrm{Supp}\ f \subset F\}\ ,$$

et posons $H = \mathcal{C}(F)$ (resp. $H = \mathcal{C}^0(F)$).

Pour tout φ appartenant à H , on note

$$p(\varphi) = \inf\{\int v\ d\mu\ ;\ v \in C_F\ \text{ et }\ v \geq \varphi\ \text{ sur }\ F\}\ .$$

D'après (I), p est une forme positivement sous-linéaire finie sur H . [En effet, si $a - Vf$ est supérieur ou égal à φ sur F , f appartenant à $\mathcal{K}_+(X)$, $\mathrm{Supp}\ f \subset F$ et $a \geq 0$, on a $Vf \leq a + \|\varphi\|_\infty$ sur F , donc sur le support de f , et par conséquent partout. Il en résulte que $p(\varphi) \geq - \|\varphi\|_\infty \int d\mu$.] D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe donc une forme linéaire sur H majorée par p . Or, si φ est ≤ 0 , on a $p(\varphi) \leq 0$. Donc une telle forme linéaire est positive, et se représente donc par une mesure positive bornée portée par F . Notons ν cette mesure. On a

$$\forall\ v \in C_F\ , \qquad \int v\ d\nu \leq \int v\ d\mu\ .$$

[En effet, si F est compact, $v|F$ appartient à H , donc $\int v\ d\nu$ est inférieur ou égal à $p(v|F)$, et donc à $\int v\ d\mu$. Si F est fermé, et v appartient à C_F , alors $v = a - Vf$, et

$$\int v\ d\nu = \sup\{\int \varphi\ d\nu\ ;\ \varphi \in H\ \text{ et }\ \varphi \leq v\ \text{ sur }\ F\}$$

$$\leq \sup\{p(\varphi)\ ;\ \varphi \in H\ \text{ et }\ \varphi \leq v\ \text{ sur }\ F\} \leq \int v\ d\mu\ .]$$

Il est clair alors que ν vérifie (1), (2), et (3).

Supposons (II). Soit f appartenant à $\mathcal{K}_+(X)$. "Balayons" ε_x sur $\mathrm{Supp}\ f$. On a

$$Vf(x) \leq \int Vf(y)\ d\nu(y)\ ,$$

où ν est la balayée de ε_x . Si $Vf(y)$ est inférieur ou égal à 1 sur le support de f , on a donc $Vf(x)$ inférieur ou égal à 1 pour tout x .

Remarque. - La même méthode permettrait d'étendre les divers théorèmes de [1] sans hypothèse de positivité ni de continuité sur V .

PROPOSITION 2. - Soient V une application linéaire de $\mathcal{K}(X)$ dans $\mathcal{C}^0(X)$, A_1 un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur X , R^1_λ la famille résolvante associée, A_2 un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs positifs sur $\mathcal{C}^0(X)$. Soit D un sous-espace de

$$\mathcal{K}(X) \cap V^{-1}(D(A_1)) \cap D(A_2)$$

tel que, pour tout f de D , $A_1 Vf = A_2 f$, et $\lambda R^1_\lambda Vf$ tend vers 0 uniformément sur tout compact de X quand λ tend vers 0 . Alors,

$$\forall f \in D \cap \mathcal{K}_+(X) , \qquad (Vf(x) \leq 1 \text{ pour tout } x \text{ de } \operatorname{Supp} f) \implies (Vf \leq 1) .$$

Démonstration. - Pour tout f de D ,

$$(I - \lambda R^1_\lambda)Vf = - R^1_\lambda A_2 f = \lim_{t\to 0} \frac{R^1_\lambda}{t} (f - P^2_t f)$$

(P^2_t représentant le semi-groupe engendré par A_2 , et la limite étant au sens de la norme de $\mathcal{C}^0(X)$).

Mais, R^1_λ vérifiant le principe complet du maximum (cf. par exemple [5]), et P^2_t étant un opérateur positif, l'opérateur $\dfrac{R^1_\lambda(I - P_t)}{t}$ vérifie le principe classique du maximum.

Il en résulte que $(I - \lambda R^1_\lambda)V$ vérifie le principe classique du maximum sur $D \cap \mathcal{K}_+(X)$, et donc aussi V .

Remarque. - On peut trouver dans [3] une proposition analogue, sous des hypothèses un peu différentes.

La proposition 1 va maintenant nous permettre d'établir une réciproque de la proposition 2, dans certains cas particuliers.

3. Noyaux de convolution par des mesures sur $\mathbb{R}$ à support dans $\mathbb{R}_+$.

(a) Rappels sur les fonctions de Bernstein (cf. [2]).

1° Une fonction de Bernstein est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0 , \infty[$, qui vérifie :

$$F \geqslant 0 \ , \quad F' \geqslant 0 \ , \quad F'' \leqslant 0 \ , \quad \ldots \ , \quad (-1)^P F^{(P)} \leqslant 0 \ , \quad \ldots \ .$$

Une telle fonction se prolonge par continuité en 0 .

2° Si F est une fonction de Bernstein, il existe deux constantes positives a et b , et une mesure positive μ sur $]0 , \infty[$ vérifiant

$$\int_{]0,\infty[} \frac{t}{1+t} \, d\mu(t) < \infty \quad ,$$

telles que

$$F(u) = a + bu + \int_{]0,\infty[} (1 - e^{-tu}) \, d\mu(t) \quad .$$

Les constantes a et b et la mesure μ sont uniques.

3° Soit F une fonction définie sur $]0 , \infty[$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) F est une fonction de Bernstein ;

(ii) e^{-tF} est complètement monotone pour tout $t \geqslant 0$, et

$$\lim_{u \to 0_+} F(u) \geqslant 0 \quad .$$

Il en résulte que, de toute suite de fonctions de Bernstein simplement bornée, on peut extraire une suite qui converge vers une fonction de Bernstein.

4° Soit F une fonction de Bernstein. F est la transformée de Laplace d'une distribution T de $\mathcal{D}'_{L^1}(\underset{\sim}{R})$, avec $\mathrm{Supp}\ T \subset [0 , \infty[$.

Il existe un semi-groupe vaguement continu de mesures $\geqslant 0$ et de masse $\leqslant 1$, à supports dans $[0 , \infty[$, tel que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mu_t - \delta}{t} = T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'_{L^1}(\underset{\sim}{R}) \quad .$$

Soit

$$P_t : \ f \in \mathcal{C}^0(\underset{\sim}{R}) \ \to \ \left(x \in \underset{\sim}{R} \ \to \int f(x+y) \, d\mu_t(y)\right) \in \mathcal{C}^0(\underset{\sim}{R}) \quad .$$

$(P_t)_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe de Feller sur $\mathcal{C}^0(\underset{\sim}{R})$, avec pour générateur $(A , D(A))$, où $D(A)$ contient $\dot{\mathcal{B}}(\underset{\sim}{R})$ (ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $\underset{\sim}{R}$, qui tendent, ainsi que toutes leurs dérivées, vers 0 à l'infini), et

$$\forall\ f \in \dot{\mathcal{B}}(\underset{\sim}{R}) \ , \quad \forall\ x \in \underset{\sim}{R} \ , \qquad Af(x) = - \langle f(x + \cdot) \ , \ T \rangle \quad .$$

Soit

$$Q_t : \ f \in \mathcal{C}^0(\underset{\sim}{R}_+) \ \to \ \left(x \in \underset{\sim}{R}_+ \ \to \int f(x+y) \, d\mu_t(y)\right) \in \mathcal{C}^0(\underset{\sim}{R}_+) \quad .$$

$(Q_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de Feller sur $C^0(\underset{\sim}{R}_+)$, avec pour générateur $(B , D(B))$, où $D(B)$ contient $\dot{\mathcal{B}}(\underset{\sim}{R})|\underset{\sim}{R}_+$, et

$$\forall\ f \in \dot{\mathcal{B}}(\underset{\sim}{R})\ ,\quad \forall\ x \in \underset{\sim}{R}_+\ ,\qquad Bf(x) = - \langle f(x + .)\ ,\ T\rangle\ .$$

(b) Principe classique du maximum sur $[0 , \infty[$.

Dans ce paragraphe, k représente une mesure sur $\underset{\sim}{R}$, à support dans $[0 , \infty[$, et telle que la transformée de Laplace de k , soit $K(z)$, existe pour $\mathrm{Re}\ z > 0$. V_k désigne l'application linéaire de l'espace $\mathcal{K}([0 , \infty[)$ dans lui-même, définie par

$$f \to (x \to \int f(x + y)\ dk(y))\ .$$

THÉORÈME 3. - Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) V_k vérifie le principe classique du maximum,

$$\lim_{x\to\infty} K(x) \geq 0 \qquad \underline{\text{et}} \qquad \limsup_{x\to 0_+} K(x) \geq 0\ ;$$

(ii) Il existe deux fonctions de Bernstein F_1 et F_2 , non identiquement nulles, telles que

$$\forall\ x > 0\ ,\qquad K(x)\ F_1(x) = F_2(x)\ .$$

Démonstration. - Supposons (i). Balayons, au sens de la proposition 1, δ sur le fermé $[\varepsilon , \infty[$. Soit σ_ε une mesure balayée,

$$\sigma_\varepsilon \geq 0\ ;\qquad \mathrm{Supp}\ \sigma_\varepsilon \subset [\varepsilon\ ,\ \infty[\ ;\qquad \int d\sigma_\varepsilon \leq 1\ ,$$

et

$$\forall\ f \in \mathcal{K}_+([0 , \infty[)\ ,\qquad (\mathrm{Supp}\ f \subset [\varepsilon , \infty[) \implies \langle f\ ,\ k \star \sigma_\varepsilon\rangle \geq \langle f\ ,\ k\rangle\ .$$

Décomposons la mesure $k \star (\delta - \sigma_\varepsilon)$ en parties positive et négative :

$$k \star (\delta - \sigma_\varepsilon) = \alpha_\varepsilon - \beta_\varepsilon\ .$$

On a $\mathrm{Supp}\ \alpha_\varepsilon \subset [0 , \varepsilon]$ et $\alpha_\varepsilon \leq k^+ + k^-\ \sigma_\varepsilon$. Donc

$$\int d\alpha_\varepsilon = \int 1_{[0,\varepsilon]}\ d\alpha_\varepsilon \leq \int 1_{[0,\varepsilon]}\ d|k| \leq \int 1_{[0,1]}\ d|k| = M \qquad (\varepsilon \leq 1)\ .$$

Notons S_ε , A_ε , B_ε les transformés de Laplace de σ_ε , α_ε , β_ε (définies pour $\mathrm{Re}\ z > 0$).

$$K(z)\ \frac{(1 - S_\varepsilon(z))}{(1 - S_\varepsilon(1))} = \frac{A_\varepsilon(0) - B_\varepsilon(z)}{1 - S_\varepsilon(1)} - \frac{A_\varepsilon(0) - A_\varepsilon(z)}{1 - S_\varepsilon(1)}\ .$$

Soit $x \geqslant 0$,

$$\frac{1 - S_\varepsilon(x)}{1 - S_\varepsilon(1)} = \frac{1 - \int e^{-tx}\, d\sigma_\varepsilon(t)}{1 - \int e^{-t}\, d\sigma_\varepsilon(t)} = \frac{\int (a_\varepsilon - e^{-tx})\, d\sigma_\varepsilon(t)}{\int (a_\varepsilon - e^{-t})\, d\sigma_\varepsilon(t)} ,$$

où $a_\varepsilon = \left(\int d\sigma_\varepsilon\right)^{-1} \geqslant 1$ (on peut évidemment se ramener au cas où $\int d\sigma_\varepsilon \neq 0$),
$\frac{a_\varepsilon - e^{-tx}}{a_\varepsilon - e^{-t}} \leqslant f(x)$, où f est une fonction positive ne dépendant ni de t ni de ε .

Donc la famille des fonctions $\frac{1 - S_\varepsilon(x)}{1 - S_\varepsilon(1)}$ est simplement bornée, et il existe donc une suite ε_n tendant vers zéro, telle que $\frac{1 - S_{\varepsilon_n}(x)}{1 - S_{\varepsilon_n}(1)}$ tende vers une fonction de Bernstein F_1 .

D'autre part, $(1 - S_\varepsilon(1)) \geqslant (1 - e^{-\varepsilon})$, et

$|A_\varepsilon(z) - A_\varepsilon(z')| \leqslant \int |e^{-tz} - e^{-tz'}|\, d\alpha_\varepsilon(t) \leqslant M\varepsilon |z - z'|$, pour Re z et Re z' positifs.

Donc la famille des fonctions $\frac{A_\varepsilon(0) - A_\varepsilon(z)}{1 - S_\varepsilon(1)}$ est équicontinue sur $\{\mathrm{Re}\, z \geqslant 0\}$, et uniformément majorée par $M'|z|$ sur cet ensemble. On peut donc extraire de $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ une suite $(\varepsilon_{n_r})_{r\geqslant 0}$, telle que $\frac{A_{\varepsilon_{n_r}}(0) - A_{\varepsilon_{n_r}}(z)}{1 - S_{\varepsilon_{n_r}}(1)}$ converge uniformément, sur tout compact de $\{\mathrm{Re}\, z \geqslant 0\}$, vers une fonction $H(z)$ holomorphe sur $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$, et majorée par $M'|z|$ sur cet ensemble.

H est transformée de Laplace d'une distribution T , limite dans $\mathcal{D}'$ de $\frac{A_{\varepsilon_{n_r}}(0)\delta - \alpha_{\varepsilon_{n_r}}}{1 - S_{\varepsilon_{n_r}}(1)}$, et donc portée par l'origine.

Il en résulte que T est proportionnel à δ' , et donc il existe a réel tel que $H(z) = az$.

Notons alors

$$G(z) = \lim_{r\to\infty} (A_{\varepsilon_{n_r}}(0) - B_{\varepsilon_{n_r}}(z)) \frac{1}{1 - S_{\varepsilon_{n_r}}(1)} .$$

$$\forall\, x > 0 , \qquad K(x)\, F_1(x) = G(x) - ax .$$

Pour tout $t \geqslant 0$, e^{-tG} est une fonction complètement monotone sur $]0 , \infty[$, et puisque $\limsup_{x\to 0} K(x) \geqslant 0$, $\lim_{x\to 0} G(x) \geqslant 0$. Donc G est une fonction de Bernstein.

Enfin, puisque $\lim\limits_{x\to\infty} K(x) \geqslant 0$, on a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x} \geqslant a$. Alors, d'après la représentation intégrale des fonctions de Bernstein, $G(x) - ax$ est une fonction de Bernstein $F_2(x)$.

Supposons maintenant (ii). Soit $(B_i , D(B_i))$ $(i = 1 , 2)$ les générateurs associés à F_i (générateurs de semi-groupes de Feller sur $\underset{\sim}{R}_+$).

On est dans les conditions de la proposition 2, avec $X = \underset{\sim}{R}_+$, $V = V_k$, et $D = \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}_+)$. En effet, soit ζ_λ^1 la mesure associée à R_λ^1 ; la transformée de Laplace de ζ_λ^1 est $\frac{1}{\lambda + F_1}$. Alors $\frac{\lambda}{\lambda + F_1}$ tend vers 0 sur $]0 , \infty[$, en restant majoré par 1 (en effet, si F_1 n'est pas identiquement nulle, F_1 est strictement positive sur $]0 , \infty[$). Donc $\lambda\zeta_\lambda^1$ tend vers 0 au sens des distributions, quand λ tend vers 0 . Il en résulte que, pour tout f de $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R}_+)$, $\lambda R_\lambda^1 f$ converge vers 0 uniformément sur tout compact, quand λ tend vers 0 .

D'après la proposition 2, on a donc que V_k vérifie le principe classique du maximum sur $\mathcal{D}_+(\underset{\sim}{R}_+)$.

Il en résulte facilement, par régularisation, que V_k , comme application linéaire de $\mathcal{K}(\underset{\sim}{R}_+)$ dans lui-même, vérifie le principe classique du maximum.

(c) Principe classique du maximum sur $\underset{\sim}{R}$.

On suppose maintenant que k représente une mesure sur $\underset{\sim}{R}$, à support dans $[0 , \infty[$, et tendant vers 0 à l'infini (c'est-à-dire telle que toutes les régularisées soient dans $\mathcal{C}^0(\underset{\sim}{R})$). Ceci entraîne que la transformée de Laplace K existe pour $\operatorname{Re} z > 0$.

On note W_k l'application linéaire de $\mathcal{K}(\underset{\sim}{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\underset{\sim}{R})$, définie par

$$f \in \mathcal{K}(\underset{\sim}{R}) \rightarrow (x \in \underset{\sim}{R} \rightarrow \int f(x + y)\, dk(y)) \in \mathcal{C}^0(\underset{\sim}{R}) \quad .$$

THÉORÈME 4. - Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) W_k vérifie le principe classique du maximum,

$$\lim_{x\to\infty} K(x) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \limsup_{x\to 0_+} K(x) \geqslant 0 \quad ;$$

(ii) Il existe deux fonctions de Bernstein F_1 et F_2 , non identiquement nulles, telles que

$$\forall\, x > 0 , \qquad K(x)\, F_1(x) = F_2(x) \quad .$$

Démonstration. - Supposons (i). "Balayons" δ sur le fermé $[\varepsilon , \infty[$. On obtient comme précédemment

$$k \star (\delta - \sigma_\varepsilon) = \alpha_\varepsilon - \beta_\varepsilon \quad .$$

Le premier membre ayant son support dans $[0 , \infty[$, il en résulte que

$$\mathrm{Supp}\ \alpha_\varepsilon \subset [0 , \varepsilon] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Supp}\ \beta_\varepsilon \subset [0 , \infty[\quad .$$

On peut alors faire le même raisonnement qu'au théorème 3.

Supposons (ii). Soit $(A_i , D(A_i))$ $(i = 1 , 2)$ les générateurs infinitésimaux associés aux F_i (générateurs de semi-groupes de Feller sur $\underset{\sim}{R}$).

$$W_k(\mathcal{D}(\underset{\sim}{R})) \subset \dot{\mathcal{B}}(\underset{\sim}{R}) \subset D(A_i) \quad .$$

On en déduit alors (i), comme dans le théorème 3, à l'aide de la proposition 2.

<u>Remarque</u>. - Sous les hypothèses du début de ce paragraphe, considérons W_k ainsi que le noyau V_k introduit en (b). Alors on peut démontrer directement que, si $\langle 1_{\{0\}} , k\rangle \geqslant 0$, pour que W_k vérifie le principe classique du maximum sur $\underset{\sim}{R}$, il faut et il suffit que V_k vérifie le principe classique du maximum sur $\underset{\sim}{R}_+$.

4. Noyaux de convolution par des mesures symétriques sur le tore à une dimension.

(a) <u>Rappels sur les fonctions définies négatives sur</u> $\underset{\sim}{Z}$.

1° Une suite $(\psi(n))_{n\in \underset{\sim}{Z}}$ est définie négative si, pour tout r-uple d'entiers $n_1 , n_2 , \dots , n_r$, la forme hermitienne

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} (\psi(n_i) + \overline{\psi(n_j)} - \psi(n_i - n_j))\ \zeta_i\ \overline{\zeta_j}$$

est positive.

2° Les suites définies négatives paires sont les suites de la forme

$$\psi(n) = an^2 + b + \int \sin^2 \pi nt\ d\sigma(t) \quad ,$$

avec $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, σ mesure positive symétrique sur $\underset{\sim}{T} \setminus \{0\}$ ($\underset{\sim}{T}$ désignant le tore), telle que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2\ d\sigma(t) < \infty \qquad \text{(formule de Lévy-Khinčin)} \quad .$$

3° ψ est définie négative si, et seulement si, $\psi(0) \geqslant 0$, et $e^{-t\psi}$ est définie positive pour tout $t \geqslant 0$ (théorème de Schönberg).

4° Si $\psi(0) \neq 0$, $\frac{1}{\psi}$ est définie positive.

5° Si ψ est paire, $\psi(n) \leqslant n^2\ \psi(1)$, $\psi(n) \geqslant \psi(0)$, et $\psi(1) > \psi(0)$, sauf si ψ est constante.

6° Les fonctions définies négatives sont transformées de Fourier de distributions sur $\underset{\sim}{T}$, qui sont les opposés de générateurs infinitésimaux de semi-groupes de Feller sur $\underset{\sim}{T}$, dont le domaine contient $\mathcal{D}(\underset{\sim}{T})$.

(b) Principe classique du maximum sur $\underset{\sim}{T}$.

Les résultats de ce paragraphe sont empruntés à J.-P. KAHANE [4]. Ils sont cependant démontrés ici sous des hypothèses un peu plus générales.

THÉORÈME 5. - *Soit* k *une mesure symétrique sur* $\underset{\sim}{T}$, *telle que le noyau de convolution associé* V_k $(f \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{T}) \to k \star f \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{T}))$ *vérifie le principe classique du maximum. On suppose que*

$$\int dk \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to\infty} \hat{k}(n) \geqslant 0$$

(*ces deux inégalités sont automatiquement vérifiées si* k *est une mesure positive*).

Alors il existe deux fonctions définies négatives paires ψ_1 *et* ψ_2, *telles que*

$$\psi_1(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \underset{\sim}{Z}\,, \quad \hat{k}(n)\, \psi_1(n) = \psi_2(n) \quad .$$

Démonstration. - "Balayons" δ sur $\underset{\sim}{T} \setminus]-\varepsilon\,,\,\varepsilon[$. Soit σ_ε une balayée.

$$k \star (\delta - \sigma_\varepsilon) = \alpha_\varepsilon - \beta_\varepsilon\,, \qquad \text{avec } \alpha_\varepsilon = [k \star (\delta - \sigma_\varepsilon)]^+ \text{ et } \beta_\varepsilon = [k \star (\delta - \sigma_\varepsilon)]^- .$$

$$\operatorname{Supp} \sigma_\varepsilon \subset \underset{\sim}{T} \setminus]-\varepsilon\,,\,\varepsilon[\qquad \text{et} \qquad \operatorname{Supp} \alpha_\varepsilon \subset [-\varepsilon\,,\,\varepsilon] \quad .$$

D'autre part, on peut supposer σ_ε, α_ε, et β_ε symétriques. On a évidemment $\widehat{\sigma_\varepsilon}(1) \neq 1$. Donc

$$\hat{k}\,\frac{(1 - \widehat{\sigma_\varepsilon})}{1 - \widehat{\sigma_\varepsilon}(1)} = \frac{\widehat{\alpha_\varepsilon}(0) - \widehat{\beta_\varepsilon}}{1 - \widehat{\sigma_\varepsilon}(1)} - \frac{\widehat{\alpha_\varepsilon}(0) - \widehat{\alpha_\varepsilon}}{1 - \widehat{\sigma_\varepsilon}(1)} \quad ;$$

$\dfrac{1 - \widehat{\sigma_\varepsilon}}{1 - \widehat{\sigma_\varepsilon}(1)}$ est définie négative, paire, et on a

$$\frac{1 - \widehat{\sigma_\varepsilon}(0)}{1 - \widehat{\sigma_\varepsilon}(1)} \leqslant 1\,, \qquad \frac{1 - \widehat{\sigma_\varepsilon}(n)}{1 - \widehat{\sigma_\varepsilon}(1)} \leqslant n^2 \quad (n \geqslant 1) \quad .$$

On peut donc trouver une suite ε_n tendant vers 0, telle que $\dfrac{1 - \widehat{\sigma_{\varepsilon_n}}}{1 - \widehat{\sigma_{\varepsilon_n}}(1)}$ converge vers une fonction définie négative paire ψ_1, telle que $\psi_1(1) = 1$.

D'autre part,

$$1 - \widehat{\sigma}_\varepsilon(1) \geqslant 1 - \cos 2\pi\varepsilon = 2 \sin^2 \pi\varepsilon \quad ,$$

et

$$\widehat{\alpha}_\varepsilon(0) - \widehat{\alpha}_\varepsilon(1) \leqslant 2(\sin^2 \pi\varepsilon)\ \widehat{\alpha}_\varepsilon(0) \leqslant 2 \sin^2 \pi\varepsilon \int d|k| \quad .$$

Par un raisonnement analogue à celui fait au paragraphe 3 (b), on voit alors qu'il existe $a \geqslant 0$, et une fonction ξ telle que

$$\hat{k}(n)\ \psi_1(n) = \xi(n) - an^2 \quad ,$$

où ξ est limite d'une suite extraite de la suite $\dfrac{\widehat{\alpha_{\varepsilon_n}}(0) - \widehat{\beta_{\varepsilon_n}}}{1 - \widehat{\sigma_{\varepsilon_n}}(1)}$.

On achève la démonstration comme dans le paragraphe 3 (b), en utilisant la formule de Lévy-Khinčin et le théorème de Schönberg.

THÉORÈME 6. - Soient k une mesure sur $\underset{\sim}{T}$, et ψ_1 et ψ_2 deux fonctions définies négatives. On suppose que,

$$\forall\ n \in \underset{\sim}{Z} \ , \qquad \hat{k}(n)\ \psi_1(n) = \psi_2(n) \quad ,$$

et

$$\hat{k}(n) = \int dk \ , \qquad \text{pour tout } n \text{ tel que } \psi_1(n) = 0 \quad .$$

Alors le noyau de convolution V_k , associé à k , vérifie le principe classique du maximum sur $\underset{\sim}{T}$.

Démonstration.

$$\hat{k}(n) = \lim_{\lambda \to 0_+} \frac{\lambda \int dk + \psi_2(n)}{\lambda + \psi_1(n)} \quad .$$

Or $\dfrac{\lambda \int dk + \psi_2}{\lambda + \psi_1}$ est la transformée de Fourier d'une distribution T_λ , telle que le noyau de convolution associé vérifie, d'après la proposition 2, le principe classique du maximum sur $\mathcal{O}_+(\underset{\sim}{T})$.

T_λ convergeant au sens des distributions vers k , on peut achever le raisonnement comme dans le paragraphe 3.

On peut donner un théorème un peu plus général.

THÉORÈME 7. - Soient k une mesure sur $\underset{\sim}{T}$, et V_k le noyau de convolution associé. On suppose qu'il existe des fonctions définies négatives ψ_1 , ψ_2 , ψ'_1 , ψ'_2 , et une constante réelle a , tels que ψ'_1 ne s'annule pas sur l'ensemble des zéros de ψ_1 , et

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}\,, \qquad \hat{k}(n)\, \psi_1(n) = \psi_2(n)\quad ,$$

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}\,, \qquad \psi_1(n) = 0 \implies \hat{k}(n)\, \psi_1'(n) = \psi_2'(n) + a\quad .$$

<u>Alors</u> V_k <u>vérifie le principe classique du maximum</u>.

(Le théorème 6 en est un cas particulier, avec $\psi_1' = 1$, $\psi_2' = 0$, $a = \int dk$.)

La démonstration est analogue à celle du théorème 6, en remarquant que

$$\hat{k} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda(\psi_2' + a) + \psi_2}{\lambda\psi_1' + \psi_1}\quad .$$

Ajoutons, pour terminer, la remarque évidente suivante :

Soient X un groupe discret, et k une fonction tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies. Si le noyau de convolution associé à k vérifie le principe classique du maximum sur X , il existe $\sigma \geqslant 0$ et de masse $\leqslant 1$, $\sigma \neq \delta$, il existe $\beta \geqslant 0$, et il existe λ appartenant à $\mathbb{R}_+$, tels que

$$k \star (\delta - \sigma) = \lambda\delta - \beta\quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] DENY (J.). - Les principes du maximum en théorie du potentiel, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 6e année, 1961/62, n° 10, 8 p.

[2] FARAUT (J.). - Puissances fractionnaires d'un noyau de Hunt, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 10e année, 1965/66, n° 7, 12 p.

[3] HIRSCH (F.). - Sur le principe classique du maximum et le quotient de deux fonctions de Bernstein, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, 1968, Série A, p. 795-798.

[4] KAHANE (J.-P.). - Quotients de fonctions définies négatives (d'après Beurling et Deny), Séminaire Bourbaki, 19e année, 1966/67, n° 315, 11 p.

[5] LION (G.). - Familles d'opérateurs et frontières en théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, fasc. 2, p. 389-453 (Thèse Sc. math. Paris, 1966).

[6] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du potentiel, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 6e année, 1966/67, n° 5, 35 p.

(Texte reçu le 30 mai 1970)

Francis HIRSCH
M. Ass. ENSET
1 avenue du Parc
91 - RIS-ORANGIS