Claude Dellacherie

Ensembles minces associés à une capacité

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 13 (1969-1970), exp. n° 2, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1969-1970__13__A1_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
13e année, 1969/70, n° 2, 19 p.

6 novembre 1969

ENSEMBLES MINCES ASSOCIÉS À UNE CAPACITÉ

par Claude DELLACHERIE

Soient E un espace métrisable compact, et $\mathcal{H}$ une classe de parties de E stable pour les réunions dénombrables et héréditaire (i. e. contenant toutes les parties de tout ensemble qui lui appartient). Nous nous sommes intéressés au problème suivant :

"Si un borélien A n'appartient pas à $\mathcal{H}$, est-ce que A contient un compact K qui n'appartient pas à $\mathcal{H}$?"

Sous cette forme très générale, la réponse est évidemment négative. Prenons en effet pour $\mathcal{H}$ la classe des ensembles de 1re catégorie de Baire (i. e. les ensembles contenus dans une réunion dénombrable de compacts d'intérieur vide). Il résulte de la propriété de Baire que le complémentaire d'un ensemble de 1re catégorie n'est pas de 1re catégorie. Prenons alors pour A le complémentaire d'une suite partout dense dans E (supposé sans points isolés) : A n'appartient pas à $\mathcal{H}$, tandis que tout compact inclus dans A y appartient. Voici par contre un exemple où le problème a toujours une solution positive : soit μ une mesure de Radon sur E, et supposons que $\mathcal{H}$ contienne tous les ensembles μ-négligeables. Comme tout borélien est la réunion d'une suite dénombrable de compacts et d'un ensemble négligeable, il est clair qu'un borélien A, qui n'appartient pas à $\mathcal{H}$, contient un compact qui n'appartient pas à $\mathcal{H}$.

Voici un dernier exemple qui nous servira d'introduction à la suite : prenons pour $\mathcal{H}$ la classe des parties dénombrables de E. Un théorème de Alexandrov et Hausdorff assure qu'un borélien non dénombrable contient un compact non dénombrable (l'extension de ce résultat aux ensembles analytiques est due à SOUSLIN). Nous allons traduire ce résultat de quatre manières différentes, ce qui nous donnera quatre possibilités d'extension de ce théorème :

1° Soit M l'ensemble des mesures ponctuelles ε_x, où $x \in E$: c'est un compact pour la topologie vague. On obtient alors l'énoncé suivant : si $\mu(A) > 0$ pour une infinité non dénombrable de mesures μ appartenant au compact vague M, l'ensemble A contient un compact ayant la même propriété.

2° Soit Λ la mesure de comptage des points : c'est une mesure de Hausdorff qui n'est pas σ-finie en général. On a alors : si A n'est pas σ-fini pour la mesure de Hausdorff Λ, A contient un compact ayant la même propriété.

3° Prenons pour E un compact de la droite, et considérons le semi-groupe (P_t) de la translation uniforme de vitesse $+1$. Les boréliens dénombrables sont alors les boréliens semi-polaires pour la théorie du potentiel attaché au semi-groupe. On a alors : si A n'est pas semi-polaire pour le semi-groupe (P_t), A contient un compact qui n'est pas semi-polaire.

4° Considérons enfin la fonction d'ensemble $C(.)$ qui vaut 0 sur l'ensemble vide, et 1 sur les autres ensembles : $C(.)$ est alors une capacité de Choquet (la descente sur les compacts résulte de la propriété d'intersection des compacts). Un borélien A qui contient une famille <u>non dénombrable</u> (B_i) de boréliens disjoints tels que $C(B_i) > 0$ pour tout i, contient un compact ayant la même propriété.

L'extension du 2° aux mesures de Hausdorff quelconques est due à DAVIES [2], SION et SJERVE [14]. L'extension du 3° aux ensembles semi-polaires d'un semi-groupe de Hunt se trouve dans DELLACHERIE [7]. Nous allons démontrer ici l'extension du 4° qui contiendra comme cas particuliers les extensions des 1°, 2°, et 3°. Dans un premier temps, nous exposerons les résultats en les illustrant (ils seront énoncés pour des boréliens, mais ils sont encore valables pour les analytiques). Puis nous indiquerons les méthodes de démonstration : elles sont essentiellement fondées sur les "rabotages de Sierpinski", dont on trouvera une exposition dans DELLACHERIE [7]. Enfin nous dirons quelques mots sur le cas "abstrait".

I. Ensembles minces associés à une capacité.

Soient E un espace métrisable compact, et $\mathcal{K}$ la classe des parties compactes de E. On se donne une capacité positive $C(.)$ sur $(E, \mathcal{K})$, c'est-à-dire une fonction d'ensembles définie sur les parties de E et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant les conditions suivantes :

(a) $C(\emptyset) = 0$;

(b) $C(.)$ est monotone : si A contient B, $C(A) \geq C(B)$;

(c) C monte sur les suites croissantes : si (A_n) est une suite croissante de parties de E,

$$C(\cup A_n) = \sup C(A_n) \quad ;$$

(d) C descend sur les suites décroissantes de compacts : si (K_n) est une suite décroissante de compacts,

$$C(\cap K_n) = \inf C(K_n) \quad .$$

Nous supposerons en outre que C vérifie la condition suivante :

(e) Si $C(A) = 0$ et $C(B) = 0$, alors $C(A \cup B) = 0$ (condition vérifiée dès que $C(.)$ est sous-additive).

Nous dirons qu'une partie A de E est négligeable (pour C), si A est contenue dans un borélien de capacité nulle, et nous désignerons par $\mathfrak{N}$ la classe des ensembles négligeables : il est clair que $\mathfrak{N}$ est héréditaire et stable pour les réunions dénombrables. Rappelons d'autre part que le théorème de capacitabilité de Choquet entraîne, en particulier, qu'un borélien non négligeable contient un compact non négligeable (ce qui résoud le problème énoncé, lorsque $\mathcal{H} = \mathfrak{N}$).

1. DÉFINITION. - Un borélien F de E est dit épais (pour C), s'il contient les éléments d'une famille non dénombrable (F_i) de boréliens disjoints non négligeables. Un borélien est dit mince, s'il n'est pas épais. Une partie quelconque de E est dite mince, si elle est contenue dans un borélien mince.

La proposition suivante donne des définitions "positives" d'un borélien mince. Elle exprime qu'un borélien M est mince si, et seulement si, toute famille (M_i) de parties boréliennes de M admet un "ess sup" (resp. "ess inf") par rapport à la capacité C.

2. PROPOSITION. - Soit M un borélien de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) M est mince ;

(b) Si (M_i) est une famille de parties boréliennes de M, il existe un sous-ensemble dénombrable J de l'ensemble des indices I, tel que l'ensemble

$$M_i - \left(\bigcup_{j\in J} M_j\right)$$

soit négligeable pour tout i ;

(c) Si (M_i) est une famille de parties boréliennes de M, il existe un sous-ensemble dénombrable J de l'ensemble des indices I, tel que l'ensemble

$$\left(\bigcap_{j\in J} M_j\right) - M_i$$

soit négligeable pour tout i.

Démonstration. - (b) est équivalent à (a), par passage au complémentaire relativement à M. (b) entraîne (a), d'après la définition des ensembles épais. Nous allons montrer que non(b) entraîne non(a). Supposons qu'il existe une famille (M_i)

de parties boréliennes de M telle que, pour chaque sous-ensemble dénombrable J de l'ensemble des indices I, il existe un indice i_J tel que l'ensemble

$$M_{i_J} - \left(\bigcup_{j\in J} M_j\right)$$

ne soit pas négligeable. Soit alors $\mathfrak{F}$ l'ensemble des familles (F_α) de parties boréliennes disjointes de M et non négligeables, telles que chaque F_α soit de la forme

$$M_{i_\alpha} - \left(\bigcup_{j\in J_\alpha} M_j\right) ,$$

où i_α est un élément de I, et J_α est une partie dénombrable de I. L'ensemble $\mathfrak{F}$ n'est pas vide, et est inductif pour la relation d'ordre d'inclusion. Soit (F_β) un élément maximal de $\mathfrak{F}$: il est facile de voir que l'ensemble des indices β n'est pas dénombrable. En effet, dans le cas contraire, il existerait un indice i tel que l'ensemble

$$M_i - \left(\bigcup_\beta M_{i_\beta}\right)$$

soit non négligeable. Comme cet ensemble est disjoint des F_β, il pourrait être adjoint à la famille (F_β). Il est alors clair que M est épais.

La proposition suivante montre que la classe des ensembles minces est la plus petite classe héréditaire et stable, pour les réunions dénombrables, contenant les compacts minces et les ensembles négligeables.

3. PROPOSITION. - Un ensemble borélien est mince si, et seulement s'il est la réunion d'une suite dénombrable de compacts minces et d'un ensemble négligeable.

Démonstration. - Soit M un borélien mince, et soit (K_i) la famille des compacts contenus dans M. D'après 2 (b), il existe une réunion dénombrable de compacts L, telle que $C(K_i - L) = 0$ pour tout i. Si $C(M - L) \neq 0$, il existerait, d'après la forme faible du théorème de capacitabilité cité plus haut, un compact non négligeable K contenu dans $M - L$, ce qui contredirait la définition de L : d'où la condition nécessaire. Réciproquement, soient (K_n) une suite de compacts minces, et K_∞ un borélien négligeable. Si $F = (\bigcup K_n) \cup K_\infty$ était épais, il contiendrait les éléments d'une famille non dénombrable (F_i) de boréliens disjoints non négligeables. Comme l'ensemble $\mathfrak{N}$ des parties négligeables est stable pour les réunions dénombrables, il existerait alors une application de I dans $\mathbb{N}$ tel que l'ensemble $F_i \cap K_{n(i)}$ ne soit pas négligeable, et donc un indice n tel que $F_i \cap K_n$ ne soit pas négligeable pour une infinité non dénombrable d'indices i : cela contredirait le fait que K_n est mince.

4. - Nous dirons qu'une classe $\mathcal{H}$ de parties de E est une horde, si $\mathcal{H}$ contient les ensembles négligeables, si tout élément de $\mathcal{H}$ est contenu dans un borélien appartenant à $\mathcal{H}$, et si $\mathcal{H}$ est héréditaire et stable pour les réunions dénombrables. La classe $\mathcal{N}$ des ensembles négligeables est la plus petite des hordes. Les ensembles minces forment, d'après le § 3, une horde que nous désignerons par $\mathcal{M}$. Les ensembles σ-finis (pour C), que nous allons définir maintenant, forment encore une horde d'ensembles minces (la vérification est laissée au lecteur).

5. DÉFINITION. - Un borélien M est dit σ-fini (pour C), s'il existe une mesure σ-finie μ sur E (muni de sa tribu borélienne) vérifiant la condition suivante : les ensembles μ-négligeables contenus dans M sont C-négligeables. Une partie quelconque de E est dite σ-finie, si elle est contenue dans un borélien σ-fini.

Nous allons reprendre maintenant les exemples exposés dans l'introduction. Comme nous les retrouverons plus loin, leur numérotation sera conservée par la suite.

6. EXEMPLES.

(0) Prenons pour C(.) la capacité qui vaut 0 sur l'ensemble vide, et 1 sur les autres ensembles. L'ensemble vide est le seul ensemble négligeable. Les ensembles minces sont les ensembles dénombrables (et ce sont aussi les ensembles σ-finis).

(1) Soit M un ensemble de mesures de Radon (positives) sur E , compact pour la topologie vague, et posons, pour toute partie A de E ,

$$C(A) = \sup_{\mu \in M} \mu^*(A) \quad ,$$

où μ^* est la mesure extérieure associée à μ . Il est facile de voir que C(.) vérifie les conditions (a), (b), (c), et (e) du début du chapitre I. D'autre part, pour tout compact K de E , l'application $\mu \to \mu(K)$ est semi-continue supérieurement pour la topologie vague. Il résulte alors du théorème du minimax (voir par exemple MEYER [10], X, 6) que C(.) vérifie aussi la condition (d). Un borélien est négligeable, s'il est μ-négligeable pour toutes les mesures $\mu \in M$. Un borélien A , tel que l'ensemble $\{\mu \in M : \mu(A) > 0\}$ soit dénombrable, est un ensemble mince ; la classe des boréliens, vérifiant cette propriété, est stable pour les réunions dénombrables, contient les boréliens négligeables, et est héréditaire pour les boréliens.

(2) Supposons que E soit un espace métrique compact, et soit h une fonction monotone, croissante, continue de $\underset{\sim}{R}_+$ dans $\underset{\sim}{R}_+$. Pour tout $\varepsilon > 0$, et toute partie non vide A de E, posons

$$\Lambda_\varepsilon^h(A) = \inf_{\Phi_\varepsilon} \sum_n h[\delta(F_n)] \quad ,$$

où $\delta(.)$ est le diamètre associé à la métrique, (F_n) un recouvrement de A par des compacts F_n de diamètre $\delta(F_n) \leq \varepsilon$, et Φ_ε l'ensemble de ces recouvrements ; posons d'autre part $\Lambda_\varepsilon^h(\emptyset) = 0$. Soit alors, pour toute partie A de E,

$$\Lambda^h(A) = \sup_\varepsilon \Lambda_\varepsilon^h(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Lambda_\varepsilon^h(A) \quad .$$

La fonction d'ensemble Λ^h est appelée la h-mesure de Hausdorff. C'est une mesure extérieure régulière (au sens de Caratheodory), et on sait que tous les boréliens sont Λ^h-mesurables (voir par exemple FEDERER [8]). D'autre part, si d désigne le diamètre de E, Λ_d^h est une capacité qui vérifie les conditions (a), ..., (e) énoncées plus haut, et les ensembles Λ_d^h-négligeables sont identiques aux ensembles Λ^h-négligeables (l'établissement de ces propriétés est simple, sauf celui de (c) qui résulte d'une analyse fine des mesures de Hausdorff, cf. SION et SJERVE [14]). Les ensembles boréliens σ-finis pour la mesure de Hausdorff Λ^h sont alors des ensembles σ-finis pour la capacité Λ_d^h, et ils forment une classe stable pour les réunions dénombrables, héréditaire pour les boréliens, qui contient les ensembles négligeables.

(3) Soit (P_t) un semi-groupe de Hunt sur E vérifiant l'hypothèse de continuité absolue, i. e. il existe une mesure de Radon λ sur E telle que les ensembles de potentiel nul soient les ensembles λ-négligeables. Soit $(\Omega, (X_t), P^\cdot)$ la réalisation canonique de (P_t) : Ω est l'ensemble des applications continues à droite de $\underset{\sim}{R}_+$ dans E ; X_t est l'application coordonnée d'indice t ; P^μ est la loi de probabilité sur Ω pour laquelle (X_t) est un processus fortement markovien admettant (P_t) pour semi-groupe de transition, et μ pour loi initiale. Si A est un borélien de E, et si T_A désigne le temps d'entrée dans A $(T_A(\omega) = \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \in A\})$, posons

$$C(A) = P^\lambda\{T_A < +\infty\} \quad .$$

On peut alors étendre la définition de $C(.)$ à toutes les parties de E, de telle sorte que $C(.)$ soit une capacité vérifiant les conditions (a), ..., (e) (cf. MEYER [11]). Les ensembles C-négligeables sont alors les ensembles polaires. Les ensembles semi-polaires forment une horde d'ensembles minces (cf. DELLACHERIE [6], p. 113).

La proposition suivante permet d'identifier deux hordes d'ensembles minces.

7. PROPOSITION. - Soient M un ensemble borélien mince, et $\mathcal{H}$ une horde de parties quelconques de E. Pour que M appartienne à $\mathcal{H}$, (il faut et) il suffit que tout compact non négligeable contenu dans M contienne un borélien non négligeable de $\mathcal{H}$.

Démonstration. - La condition nécessaire est triviale. La démonstration de la condition suffisante est analogue à la première partie de la démonstration de la proposition 3.

Voici en particulier un cas dans lequel on peut affirmer que les ensembles minces sont σ-finis.

8. PROPOSITION. - Supposons que tout borélien μ-négligeable pour toute mesure de Radon μ sur E ne chargeant pas les boréliens C-négligeables, soit C-négligeable. Alors tout ensemble mince est σ-fini pour C.

Démonstration. - Soient M un ensemble borélien mince, et μ une mesure de Radon chargeant M et ne chargeant pas les boréliens négligeables. On peut supposer que M porte μ. Soit (M_i) la famille des boréliens minces contenus dans M et portant μ. D'après la proposition 2 (c), il existe un sous-ensemble dénombrable J de l'ensemble des indices I, tel que l'ensemble $\left(\bigcap_{j\in J} M_j\right) - M_i$ soit C-négligeable et μ-négligeable pour tout $i \in I$. Cet ensemble porte encore μ, et il est clair que c'est un ensemble σ-fini pour C. Il résulte alors de la proposition précédente que M est σ-fini.

EXEMPLES (avec la numérotation précédente).

(2) Lorsque E est un compact de $\mathbb{R}^n$, il résulte d'un théorème de Frostman que la capacité Λ_d^h vérifie les conditions de la proposition 8. En fait, on a un résultat beaucoup plus fin, dû à BESICOVITCH et DAVIES : tout borélien non négligeable contient un compact de Λ^h-mesure finie non nulle. Les ensembles σ-finis pour la mesure de Hausdorff Λ^h sont alors les ensembles minces pour la capacité Λ_d^h (pour les théorèmes de Frostman, Besicovitch et Davies, cf. CARLESON [1]). Lorsque E est quelconque, il peut exister une fonction h pour laquelle il n'existe pas de borélien σ-fini non négligeable (cf. DAVIES et ROGERS [5]). On ne sait pas si, dans le cas général, il y a identité entre les ensembles σ-finis pour Λ^h et les ensembles minces pour Λ_d^h.

(3) Dans le cas d'un processus de Hunt, les conditions de la proposition 8 sont également vérifiées : si $P^{\lambda}(T_A) > 0$, il existe un temps d'arrêt T strictement positif et non P^{λ}-p.-s. infini, tel que X_T appartienne à A P^{λ}-p.-s. sur $\{T < \infty\}$ (cela résulte du théorème de section de Meyer [10], VIII, 21). La mesure de Radon μ , définie par $\mu(f) = E^{\lambda}[f \circ X_T \, I_{\{T<\infty\}}]$, est alors portée par A , et ne charge pas les ensembles polaires. Il y a donc identité entre les ensembles minces et les ensembles σ-finis. Les ensembles semi-polaires sont σ-finis. La réciproque n'est pas vraie s'il existe des points réguliers pour eux-mêmes. Dans le cas où les points sont semi-polaires, je ne sais pas si les ensembles σ-finis sont semi-polaires (comme la définition des ensembles minces ne fait intervenir que les ensembles polaires, la réponse positive entraînerait que deux semi-groupes ayant les mêmes ensembles polaires ont les mêmes ensembles semi-polaires, lorsque les points sont semi-polaires).

Voici enfin le théorème d'approximation annoncé. Les formulations (a) et (b) que nous en donnons sont évidemment équivalentes.

9. THÉORÈME.

(a) Soient M un borélien, et $\mathcal{H}$ une horde de parties minces de E . Pour que M appartienne à $\mathcal{H}$, (il faut et) il suffit que tout compact inclus dans M appartienne à $\mathcal{H}$.

(b) Soient A un borélien, et $\mathcal{H}$ une horde de parties minces de E . Si A n'appartient pas à $\mathcal{H}$, alors A contient un compact qui n'appartient pas à $\mathcal{H}$.

Démonstration. - Soient $\mathcal{H}$ une horde d'ensembles minces, et F un borélien n'appartenant pas à $\mathcal{H}$. Supposons d'abord que F soit mince : il résulte de la proposition 3 que F est la réunion d'une suite de compacts et d'un ensemble négligeable. Etant donnée la définition d'une horde, il est clair que F contient dans ce cas un compact qui n'appartient pas à $\mathcal{H}$. Comme les ensembles minces forment eux-mêmes une horde, il suffit donc de démontrer le théorème lorsque $\mathcal{H}$ est la horde de tous les ensembles minces. Nous devons donc montrer qu'un borélien épais contient un compact épais. C'est ce que nous établirons à la fin du paragraphe suivant. En fait, nous pourrons démontrer un résultat plus précis : un borélien épais contient un compact qui est lui-même la réunion de $2^{\mathbb{N}}$ compacts épais disjoints.

Nous terminerons ce premier paragraphe en appliquant le théorème d'approximation aux différents exemples énumérés plus haut (cf. § 6).

EXEMPLES.

(0) On retrouve le théorème de Alexandrov et Hausdorff : tout borélien non dénombrable contient un compact non dénombrable. C'est en fait pour donner une nouvelle démonstration de ce théorème que SIERPINSKI a introduit, dans [12], les rabotages (la terminologie n'est pas de SIERPINSKI), dont l'étude est l'objet du deuxième paragraphe.

(1) Si M est un ensemble de mesures de Radon sur E compact pour la topologie vague, et si un borélien A n'est pas μ-négligeable pour une infinité non dénombrable de mesures $\mu \in M$, il existe un compact, contenu dans A, ayant la même propriété. Ce résultat me semble nouveau.

(2) Si un borélien A n'est pas σ-fini pour une mesure de Hausdorff Λ^h, il contient un compact qui n'est pas σ-fini pour Λ^h. Ce théorème est dû à DAVIES [2], dans le cas où E est un compact de $\underset{\sim}{R}^n$, et $h(t) = t^s$. Le théorème général est dû à SION et SJERVE [14]. Signalons aussi que DAVIES a obtenu récemment des résultats très intéressants sur les rapports entre mesures de Hausdorff et capacités, lorsque E est un espace polonais (cf. DAVIES [4]).

(3) Si un borélien A n'est pas semi-polaire pour un semi-groupe de Hunt (vérifiant l'hypothèse de continuité absolue), alors A contient un compact qui n'est pas semi-polaire (cf. DELLACHERIE [7]). En fait, ce résultat est encore vrai, lorsque E est un borélien d'un espace métrisable compact, et que (P_t) est un semi-groupe fortement markovien. Le théorème est alors obtenu par l'intermédiaire de théorèmes sur les ensembles aléatoires, dont l'étude nécessite une formulation abstraite du théorème d'approximation.

II. Rabotages et capacitances scissipares.

Nous allons reprendre ici l'exposé sur les rabotages de Sierpinski, fait au Séminaire de probabilités de Strasbourg (cf. DELLACHERIE [7]), auquel nous renvoyons pour la démonstration des deux théorèmes fondamentaux : le théorème sur les rabotages et le théorème sur les capacitances scissipares. (Je suis actuellement en train d'écrire une monographie sur la théorie générale des processus, dont le premier chapitre est consacré à la technique des rabotages : on pourra donc aussi consulter ce premier chapitre dont une première version circule plus ou moins clandestinement.)

Nous travaillons toujours sur un espace métrisable compact E, et nous allons définir successivement les notions de capacitance, rabotage, enveloppe, et ensemble lisse.

A. Capacitances et rabotages.

La notion de capacitance, due à SION [13], correspond intuitivement à celle de classe de gros ensembles.

10. DÉFINITION. - Une classe $\mathcal{C}$ de parties de E est une capacitance, si elle vérifie les conditions suivantes :

(a) Si A appartient à $\mathcal{C}$, et B contient A, alors B appartient à $\mathcal{C}$;
(b) Si (A_n) est une suite croissante de parties de E, et si $\cup A_n$ appartient à $\mathcal{C}$, il existe un entier k tel que A_k appartienne à $\mathcal{C}$.

Voici quelques exemples de capacitance :

1° Si $C(.)$ est une capacité, pour tout $\varepsilon \geqslant 0$, l'ensemble des parties de A telles que $C(A) > \varepsilon$ est une capacitance, notée $\mathcal{C}_\varepsilon$ (seules les conditions (b) et (c) du début du chapitre I interviennent en fait).

2° Soit $\mathcal{H}$ une classe héréditaire stable pour les réunions dénombrables : les ensembles, qui n'appartiennent pas à $\mathcal{H}$, forment une capacitance (qui est en plus douée d'une certaine propriété d'additivité). En particulier, les ensembles qui n'appartiennent pas à une horde associée à une capacité forment une capacitance.

On remarquera aussi que, si $\mathcal{C}$ est une capacitance, la fonction d'ensemble définie par $C(A) = 1$ si $A \in \mathcal{C}$, et $C(A) = 0$ sinon, vérifie les conditions (a), (b), et (c) du chapitre I.

Dans ce paragraphe, on se donne une fois pour toutes une capacitance $\mathcal{C}$ sur E.

11. DÉFINITION. - Un rabotage (par rapport à $\mathcal{C}$) est une suite d'applications $(f_n)_{n\geqslant 1}$, où f_n est une fonction à n variables dont les n arguments sont des parties de E, à valeurs dans les parties de E, telle que :

(a) $f_n(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ soit inclus dans P_n,
(b) $f_n(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ appartienne à $\mathcal{C}$, si P_n appartient à $\mathcal{C}$.

La propriété (a) exprime que "l'on rabote P_n", la propriété (b) que "l'on n'enlève pas de trop gros copeaux à P_n".

Il n'est pas facile de donner d'exemples de rabotages en dehors du rabotage identique

$$f_n(P_1, P_2, \ldots, P_n) = P_n \quad .$$

Cependant, cet exemple est important puisqu'il assure l'existence d'un rabotage, et il permet de construire d'autres rabotages.

12. DÉFINITION. - Soit (f_n) un rabotage. Une suite (P_n) de parties de E est dite rabotée (par (f_n)), si :

(a) P_{n+1} est contenu dans $f_n(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, pour tout n,
(b) P_n appartient à $\mathcal{C}$, pour tout n.

Une telle suite est évidemment décroissante, d'après la définition d'un rabotage. A tout rabotage (f_n), et à tout élément A de $\mathcal{C}$, on peut faire correspondre une suite rabotée définie par récurrence de la manière suivante :

$$P_1 = A , \quad P_2 = f_1(P_1) , \quad \ldots , \quad P_{n+1} = f_n(P_1 , P_2 , \ldots , P_n) , \quad \ldots .$$

Cette suite sera appelée la suite rabotée déduite de A.

B. Enveloppes et ensembles lisses.

Nous dirons qu'un ensemble A est une enveloppe de la suite décroissante (A_n) de parties de E, si A contient l'ensemble $\bigcap \overline{A_n}$, intersection des adhérences des A_n.

13. DÉFINITION. - Un rabotage (f_n) est compatible avec une partie A de E, si A est une enveloppe de toute suite (P_n) rabotée par (f_n), dont A contient le premier élément P_1. On dit qu'une partie A de E est lisse, s'il existe un rabotage compatible avec A.

On remarquera que tout compact est compatible avec le rabotage identique : donc tout compact est lisse. Tout ensemble A qui n'appartient pas à $\mathcal{C}$ est également compatible avec le rabotage identique, puisqu'il n'existe pas de suite rabotée dont le premier terme est inclus dans A. Par contre, si A appartient à $\mathcal{C}$ et est lisse, il existe toujours une suite rabotée dont A est une enveloppe : en effet, si (f_n) est un rabotage compatible avec A, la suite rabotée par (f_n) déduite de A admet A pour enveloppe.

C. Enoncé du théorème sur les rabotages, et applications.

Voici le premier théorème fondamental :

14. THÉORÈME. - La classe des parties lisses de E est stable pour les intersections dénombrables et les réunions de suites monotones croissantes.

Comme tout compact est lisse, et que la plus petite classe de parties de E, contenant les compacts, et stable pour les intersections dénombrables et les réunions de suites monotones croissantes, est la classe des parties boréliennes de E , on a pour corollaire :

15. COROLLAIRE. - Tout ensemble borélien est lisse.

On peut aussi démontrer que tout ensemble analytique est lisse.

Afin d'illustrer ce théorème, nous allons en déduire le théorème d'approximation de SION [13] (pour les boréliens), dont le théorème de capacitabilité de Choquet est une conséquence immédiate :

16. THÉORÈME. - Soit A un borélien appartenant à la capacitance $\mathcal{C}$. Il existe une suite décroissante de compacts (K_n) appartenant à $\mathcal{C}$, telle que A contienne $\cap K_n$.

Démonstration. - Soient (f_n) un rabotage compatible avec A , et (P_n) la suite rabotée par (f_n) déduite de A . Il suffit alors de prendre pour K_n l'adhérence de P_n .

17. COROLLAIRE. - Soit $C(.)$ une capacité sur E . Tout borélien A est capacitable, i. e.

$$C(A) = \sup C(K) , \qquad K \text{ compact inclus dans } A .$$

Démonstration. - Il suffit de montrer que si $C(A) > \varepsilon$, il existe un compact K inclus dans A , tel que $C(K) \geqslant \varepsilon$. Comme la classe $\mathcal{C}_\varepsilon$ formée par les ensembles de capacité $> \varepsilon$ est une capacitance, cela résulte immédiatement du théorème précédent et de la propriété de descente sur les compacts (propriété (d) du début du chapitre I).

On notera que le théorème de Sion ne permet pas d'obtenir directement le théorème d'approximation voulu. Par exemple, soit B un borélien non dénombrable, et prenons pour capacitance la classe $\mathcal{C}$ formée par les ensembles A tels que $A \cap B$ ne soit pas dénombrable. Il existe alors une suite décroissante de compacts (K_n) , tels que $B \cap K_n$ ne soit pas dénombrable pour tout n , et que $\cap K_n$ soit contenu dans B . Mais comme on n'a pas ici de condition analogue au (d) du chapitre I, on ne peut rien dire sur la cardinalité de $\cap K_n$, en dehors du fait que $\cap K_n$ ne peut être vide. Cependant cette capacitance $\mathcal{C}$ a une propriété remarquable : si A appartient à $\mathcal{C}$, il existe deux compacts disjoints L_0 et L_1 , tels que $A \cap L_0$ et $A \cap L_1$ appartiennent encore à $\mathcal{C}$. C'est ce type particulier de capacitance que nous allons étudier maintenant.

D. Capacitances scissipares.

18. DÉFINITION. - La capacitance $\mathcal{C}$ est dite scissipare si, pour tout borélien $A \in \mathcal{C}$, il existe deux compacts disjoints K_0 et K_1, tels que les ensembles $A \cap K_0$ et $A \cap K_1$ appartiennent à $\mathcal{C}$.

Comme tout ouvert est la réunion d'une suite croissante de compacts, il suffit en fait qu'il existe un compact K (dépendant de A), tel que $A \cap K$ et $A \cap K^c$ appartiennent à $\mathcal{C}$.

Avant de donner des exemples de capacitances scissipares, nous rappellerons quelques notions topologiques élémentaires : soit X un espace topologique à base dénombrable. On dit qu'un point $x \in X$ est un point de condensation de la partie A de X, si tout voisinage $V(x)$ de x rencontre A suivant un ensemble non dénombrable (i. e. $A \cap V(x)$ n'est pas dénombrable). Un argument simple de recouvrement montre que les points de A qui ne sont pas des points de condensation de A forment un ensemble dénombrable : en particulier, un ensemble non dénombrable A a une infinité non dénombrable de points de condensation qui lui appartiennent.

EXEMPLES.

(1) Reprenons d'abord l'exemple cité ci-dessus. La capacitance $\mathcal{C}$ est formée par les ensembles A tels que $A \cap B$ ne soit pas dénombrable (où B est un borélien non dénombrable). Si $A \in \mathcal{C}$, soient x_0 et x_1 deux points de condensation distincts de $A \cap B$. Il suffit alors de prendre pour K_0 et K_1 deux voisinages compacts de x_0 et x_1 respectivement, séparant ces deux points.

(2) Soit μ une mesure de Radon diffuse sur E. La capacitance formée par les ensembles qui ne sont pas μ-négligeables est scissipare.

(3) En théorie du potentiel, lorsque les points sont polaires, les ensembles qui ne sont pas polaires forment une capacitance scissipare.

(La vérification pour (2) et (3) est laissée au lecteur. On peut d'ailleurs traîter les trois exemples à la fois en définissant les points de condensation par rapport à une capacité.)

Voici maintenant le deuxième théorème fondamental. Nous en esquisserons la démonstration pour montrer où interviennent les rabotages.

19. THÉORÈME. - Supposons que la capacitance $\mathcal{C}$ soit scissipare, et soit A un borélien appartenant à $\mathcal{C}$. Il existe une famille non dénombrable (K_i) de compacts disjoints contenus dans A, vérifiant les conditions suivantes :

(a) <u>Pour chaque</u> i , K_i <u>est l'intersection d'une suite décroissante de compacts</u> $(K_{i,n})$ <u>appartenant à</u> $\mathcal{C}$;

(b) <u>La réunion des</u> K_i <u>est un compact</u> K (<u>inclus dans</u> A).

<u>Démonstration</u>. - Il existe un rabotage (f_n) compatible avec A , et la démonstration du théorème sur les rabotages montre que l'on peut supposer que "chaque f_n est borélienne", i. e. que $f_n(P_1 , P_2 , \ldots , P_n)$ est borélien si $P_1 , \ldots , P_n$ sont boréliens. Si A était compact, on voit très bien comment on pourrait obtenir, à l'aide de la définition 18, un découpage dyadique de plus en plus fin de A ; on prend alors pour ensemble des indices i l'ensemble des mots dyadiques infinis, et $K_{i,n}$ serait le compact obtenu dans le découpage associé au mot dyadique de longueur n commençant le mot dyadique infini i . Si A est borélien, on peut procéder à un découpage analogue, mais rien n'assure que l'intersection des adhérences de la suite décroissante de découpes de A , correspondant au mot dyadique infini i , sera incluse dans A . A chaque stade du découpage, on procédera alors à un rabotage par (f_n) des découpes afin d'assurer cette propriété. Enfin le fait que la réunion K des K_i soit compacte résulte d'une simple application de la distributivité entre réunion et intersection.

<u>Remarque</u>. - Un raffinement de la démonstration (non publié, mais inspiré de DAVIES [3]) permet de montrer que A contient $2^{\aleph}$ compacts K de la forme indiquée, disjoints, et dont la réunion est encore compacte.

Revenons alors au commentaire précédant le paragraphe D : on notera qu'ici encore, au (a) du théorème, on ne peut affirmer que les K_i appartiennent à $\mathcal{C}$. Cependant, lorsque l'on a une "information" sur la "grosseur" de l'intersection d'une suite dénombrable de compacts appartenant à $\mathcal{C}$, on peut, dans certains cas, en conclure que le compact K du (b) appartient à $\mathcal{C}$. Reprenons les trois exemples de capacitances scissipares cités plus haut, dans leur ordre initial :

EXEMPLES.

(1) Dès que la capacitance $\mathcal{C}$ du théorème n'est pas triviale (i. e. ne contient pas $\emptyset$), les K_i ne sont pas vides, et donc K n'est pas dénombrable. On en conclut qu'un borélien non dénombrable contient un compact non dénombrable.

(2) La mesure μ étant bornée, chaque K_i est μ-négligeable : on ne peut rien dire a priori sur la mesure de K .

(3) Dans ce dernier cas, on ne sait même pas si les K_i sont polaires ou non. En particulier, je ne sais pas si, dans le cas de la théorie du potentiel newtonien,

un borélien qui n'est pas polaire contient une infinité non dénombrable de boréliens non polaires disjoints (c'est un cas particulier du problème d'identification des ensembles semi-polaires et des ensembles σ-finis posé dans le § 8).

Nous allons maintenant donner la démonstration du théorème d'approximation des ensembles épais. Nous reprenons les définitions et notations du premier paragraphe. Ici aussi, on peut montrer que les ensembles épais forment une capacitance scissipare. Mais l'application directe du théorème 19 à cette capacitance ne donnerait rien, car on n'aurait aucune information sur la "grosseur" des K_i . Il faudra introduire une autre capacitance scissipare intermédiaire.

E. Démonstration du théorème d'approximation.

Soit A un ensemble borélien épais. Par définition, il existe une famille non dénombrable $(F_j)_{j \in J}$ de boréliens disjoints, non négligeables, et contenus dans F . Il existe alors un $\varepsilon > 0$, tel que l'ensemble $\{j \in J : C(F_j) > \varepsilon\}$ ne soit pas dénombrable. Nous désignerons par $\mathcal{C}$ la classe des parties B de E , telles que l'ensemble $\{j \in J : C(B \cap F_j) > \varepsilon\}$ ne soit pas dénombrable. Supposons démontré que $\mathcal{C}$ est une capacitance scissipare. Comme A appartient à $\mathcal{C}$, on peut lui appliquer le théorème 19, dont nous gardons les notations : chaque $K_{i,n}$ appartenant à $\mathcal{C}$, on a, a fortiori, $C(K_{i,n}) > \varepsilon$, et donc $C(K_i) \geqslant \varepsilon$. Il est alors clair que le compact K , réunion des K_i , est épais, et donc A contient un compact épais (le raffinement du théorème 19 permet de montrer que A contient un compact qui est lui-même la réunion de $2^{\underset{\sim}{N}}$ compacts épais). Il nous reste donc à montrer que $\mathcal{C}$ est une capacitance scissipare.

LEMME. - La classe $\mathcal{C}$ est une capacitance.

Démonstration. - Soit (B_n) une suite croissante de parties de E dont la réunion B appartient à $\mathcal{C}$, et désignons par J_B l'ensemble $\{j \in J : C(B \cap F_j) > \varepsilon\}$: cet ensemble n'est pas dénombrable par définition. Il existe une application de J_B dans $\underset{\sim}{N}$, telle que, pour tout $j \in J_B$, on ait $C(B_{n(j)} \cap F_j) > \varepsilon$; il existe alors un entier n tel que l'ensemble $\{j \in J_B : C(B_n \cap F_j) > \varepsilon\}$ ne soit pas dénombrable, ce qui signifie que B_n appartient à $\mathcal{C}$. Il est clair, d'autre part, que tout ensemble contenant un élément de $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{C}$. La classe $\mathcal{C}$ est donc une capacitance.

Pour démontrer que $\mathcal{C}$ est scissipare, nous allons encore employer la notion de point de condensation, mais en l'appliquant cette fois-ci à la topologie de Hausdorff sur les parties compactes de E . Rappelons d'abord la définition de cette topologie. Soit d une distance sur E compatible avec sa topologie, et désignons par X l'ensemble des compacts non vides de E . La distance de Hausdorff δ sur X est alors définie de la manière suivante :

$$\delta(K\ ,\ L) = \inf\{\alpha > 0\ :\ K \subset L^{\alpha}\ \text{ et }\ L \subset K^{\alpha}\}\ ,$$

où K^{α} (resp. L^{α}) désigne le voisinage d'ordre α du compact K (resp. L) pour la distance d . Muni de cette distance δ , X est un espace métrique compact (cf. KURATOWSKI [9]). On remarquera que si K est un compact de E , et V un voisinage de K dans E , les parties compactes de E contenues dans V forment un voisinage de K dans X .

LEMME. - <u>La capacitance</u> $\mathcal{C}$ <u>est scissipare</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soient B un borélien appartenant à $\mathcal{C}$, et

$$J_B = \{j \in J\ :\ C(B \cap F_j) > \varepsilon\}\ .$$

D'après le théorème 17, il existe, pour chaque $j \in J_B$, un compact K_j inclus dans $B \cap F_j$, tel que $C(K_j) > \varepsilon$. La famille $(K_j)_{j\in J_B}$ étant un ensemble non dénombrable de l'espace X , elle contient deux compacts disjoints K_{j_0} et K_{j_1} , qui sont des points de condensation de cette famille pour la topologie de Hausdorff sur X . Soient K_0 et K_1 deux voisinages compacts, disjoints, de K_{j_0} et K_{j_1} respectivement dans E ; comme chacun d'eux contient une infinité non dénombrable d'éléments de la famille (K_j) , $K_0 \cap B$ et $K_1 \cap B$ appartiennent à $\mathcal{C}$. Donc $\mathcal{C}$ est scissipare.

III. Le cas abstrait.

Maintenant, E est un ensemble quelconque. On distingue une classe $\mathcal{E}$ de parties de E contenant $\emptyset$ et E , et stable pour les réunions finies et les intersections dénombrables : les éléments de $\mathcal{E}$ sont destinés à jouer le rôle des compacts du cas topologique. Nous allons étendre successivement le théorème sur les rabotages (cf. § 14), le théorème sur les capacitances scissipares (cf. § 19), et le théorème d'approximation (cf. § 9).

A. Rabotages.

La seule notion à redéfinir est celle d'enveloppe, car on ne dispose pas ici de la notion d'adhérence. On dit que A est une enveloppe de la suite décroissante (A_n) , s'il existe une suite décroissante (B_n) d'éléments de $\mathcal{E}$, tels que A_n

soit contenu dans B_n pour chaque n, et que A contienne l'intersection des B_n. La formulation du théorème 14 est inchangée. Son corollaire devient :

"Les éléments de la classe $\hat{\mathcal{E}}$, stabilisée de $\mathcal{E}$ pour les réunions et intersections dénombrables, sont lisses".

On obtient alors une version abstraite des théorèmes de Sion et Choquet (cf. § 16, § 17) pour les éléments de $\hat{\mathcal{E}}$ (qui jouent le rôle des boréliens du cas topologique). Les trois théorèmes s'étendent aussi aux ensembles $\mathcal{E}$-analytiques.

B. Capacitances scissipares.

La démonstration du théorème 19 faisant intervenir essentiellement l'existence de l'adhérence d'un ensemble, nous supposerons, de plus, que $\mathcal{E}$ vérifie la condition suivante : l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ qui contiennent un élément A de $\hat{\mathcal{E}}$ a un plus petit élément $\bar{A}$, appelé l'adhérence de A. Le théorème 19 s'applique encore à cette situation, les éléments de $\mathcal{E}$ jouant le rôle des compacts, et ceux de $\hat{\mathcal{E}}$ le rôle des boréliens.

C. Ensembles minces et théorème d'approximation.

On suppose enfin que le complémentaire d'un élément de $\mathcal{E}$ est la réunion d'une suite d'éléments de $\mathcal{E}$ (que l'on peut supposer croissante). Il en résulte, en particulier, que $\hat{\mathcal{E}}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{E}$.

On se donne alors une capacité positive $C(.)$ sur $(E, \mathcal{E})$, vérifiant les conditions (a), ..., (d) du chapitre I, et une condition un peu plus forte que la condition (e) :

(e') Si $C(A) = 0$ et B est quelconque, $C(A \cup B) = C(B)$ (condition qui est encore vérifiée dès que $C(.)$ est sous-additive).

Toutes les définitions et tous les théorèmes du chapitre I s'étendent alors à cette situation. Le seul point non évident (et c'est le point essentiel) est qu'un ensemble épais $A \in \hat{\mathcal{E}}$ contient un ensemble épais $K \in \mathcal{E}$: en effet, nous n'avons plus à notre disposition l'analogue d'une topologie de Hausdorff. Nous allons donc reprendre à son début la démonstration de II-E.

D. Démonstration du théorème d'approximation.

On se donne un ensemble épais $A \in \hat{\mathcal{E}}$: par définition, il contient les éléments d'une famille non dénombrable $(F_j)_{j \in J}$ d'éléments de $\hat{\mathcal{E}}$ disjoints, non négligeables. Il existe alors un $\varepsilon > 0$, tel que l'ensemble $\{j \in J : C(F_j) > \varepsilon\}$ ne soit pas dénombrable. Nous désignerons par $\mathcal{C}$ la classe des parties B de E, telles que l'ensemble $J_B = \{j \in J : C(B \cap F_j) > \varepsilon\}$ ne soit pas dénombrable. On démontre alors que $\mathcal{C}$ est une capacitance, comme dans le premier lemme de II-E. Si la capacitance $\mathcal{C}$ était scissipare, on pourrait alors achever la démonstration comme plus haut en utilisant l'extension du théorème 19, et montrer ainsi que A contient un ensemble épais $K \in \mathcal{E}$. Mais comme il ne semble pas possible de démontrer que $\mathcal{C}$ est scissipare en général, nous allons contourner cette difficulté de la manière suivante (inspirée de DAVIES [2]) : nous allons montrer que $\mathcal{C}$ est scissipare, si tout élément de $\mathcal{E}$ contenu dans A est mince. Nous obtiendrons ainsi le théorème d'approximation par un raisonnement par l'absurde (mais nous n'obtiendrons pas son raffinement).

LEMME. - <u>Si tout élément de</u> $\mathcal{E}$ <u>contenu dans</u> A <u>est mince, la capacitance</u> $\mathcal{C}$ <u>est scissipare.</u>

<u>Démonstration</u>. - Soit $B \in \hat{\mathcal{E}} \cap \mathcal{C}$, et désignons par $\mathcal{C}_B$ la classe des parties D telles que $B \cap D$ appartienne à $\mathcal{C}$: nous devons montrer que $\mathcal{C}_B$ contient deux éléments disjoints E_0 et E_1 de $\mathcal{E}$ (cf. définition 18). Comme $A \cap B$ appartient encore à $\hat{\mathcal{E}} \cap \mathcal{C}$, nous pouvons supposer que B est contenu dans A, et donc que tout élément de $\mathcal{E}$ contenu dans B est mince. Comme B appartient à $\mathcal{C}_B$ et que $\mathcal{C}_B$ est une capacitance, il existe, d'après le théorème 16, une suite décroissante (K_n) d'éléments de $\mathcal{E} \cap \mathcal{C}_B$, tels que $K = \bigcap K_n$ soit contenu dans B. Donc K est mince, et l'ensemble $\{j \in J : C(B \cap K \cap F_j) > 0\}$ est au plus dénombrable. Etant donnée la condition (e') vérifiée par la capacité $C(.)$, cela entraîne que l'ensemble $\{j \in J : C(B \cap K^c \cap F_j) > \varepsilon\}$ n'est pas dénombrable, autrement dit que K^c appartient à $\mathcal{C}_B$. Comme K^c est la réunion de la suite croissante (K_n^c), il existe un entier p tel que K_p^c appartienne à $\mathcal{C}_B$, et comme K_p^c est lui-même la réunion d'une suite croissante (L_n) d'éléments de $\mathcal{E}$, il existe un entier q tel que L_q appartienne à $\mathcal{C}_B$. Il suffit alors de poser $E_0 = K_p$ et $E_1 = L_q$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARLESON (L.). - Selected problems on exceptional sets. - Princeton, D. Van Nostrand, 1967 (Van Nostrand mathematical Studies, 13).

[2] DAVIES (R. O.). - Non σ-finite closed subsets of analytic sets, Proc. Phil. Soc. Cambridge, t. 52, 1956, p. 174-177.

[3] DAVIES (R. O.). - A theorem on the existence of non σ-finite subsets, Mathematika, London, t. 15, 1968, p. 60-62.

[4] DAVIES (R. O.). - Increasing sequences of sets and Hausdorff measure, Proc. London math. Soc., t. 20, 1970, p. 222-236.

[5] DAVIES (R. O.) and ROGERS (C. A.). - The problem of subsets of finite positive measure, Bull. London math. Soc., t. 1, 1969, p. 47-54.

[6] DELLACHERIE (C.). - Ensembles aléatoires, I., Séminaire de probabilités, III. - Berlin, Springer-Verlag, 1969 (Lecture Notes in Mathematics, 88).

[7] DELLACHERIE (C.). - Ensembles aléatoires, II., Séminaire de probabilités, III. - Berlin, Springer-Verlag, 1969 (Lecture Notes in Mathematics, 88).

[8] FEDERER (H.). - Geometric measure theory. - Berlin, Springer-Verlag, 1969 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 153).

[9] KURATOWSKI (C.). - Topologie, Vol. 2. 3e édition. - Warszawa, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1961 (Polska Akademia Nauk. Monografie matematyczne, 21).

[10] MEYER (P.-A.). - Probabilités et potentiel. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1318 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 14).

[11] MEYER (P.-A.). - Processus de Markov. - Berlin, Springer-Verlag, 1967 (Lecture Notes in Mathematics, 26).

[12] SIERPINSKI (W.). - Sur la puissance des ensembles mesurables (B), Fund. Math., Warszawa, t. 5, 1924, p. 166-171.

[13] SION (M.). - On capacitability and measurability, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 88-99.

[14] SION (M.) and SJERVE (D.). - Approximation properties of measures generated by continuous set functions, Mathematika, London, t. 9, 1962, p. 145-156.

(Texte reçu le 18 mars 1970)

Claude DELLACHERIE
Institut mathématique
Rue René Descartes
67 - STRASBOURG