Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

JEAN-MICHEL BONY

Principe du maximum et inégalité de Harnack pour les opérateurs elliptiques dégénérés

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. nº 10, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A9_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
12e année, 1967/68, n° 10
15 et 22 février 1968

PRINCIPE DU MAXIMUM ET INÉGALITE DE HARNACK POUR LES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉS

par Jean-Michel BONY

Les opérateurs elliptiques dégénérés (dits aussi elliptiques-paraboliques) ont été considérés sous de multiples aspects. Nous nous intéressons ici aux propriétés intervenant en théorie classique du potentiel, c'est-à-dire essentiellement à la résolution du problème de Dirichlet et aux diverses formes du principe du maximum et de l'inégalité de Harnack.

Nous considérons des opérateurs de la forme

$$Lu = \sum_{k=1}^{r} X_k^2 u + Yu + au ,$$

où les X_k et Y sont des opérateurs différentiels du premier ordre, identifiés à des champs de vecteurs. Les résultats les plus importants sont obtenus sous l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes :

(1) L'algèbre de Lie engendrée par $X_1 , \ldots , X_r$ et Y est en tout point de rang n ;

(2) L'algèbre de Lie engendrée par $X_1 , \ldots , X_r$ est en tout point de rang n .

Sous l'hypothèse (1), HÖRMANDER [5] a démontré que l'opérateur L est hypoelliptique. Nous montrons ici la résolubilité du problème de Dirichlet et l'existence d'une fonction de Green. Nous démontrons, de plus, l'existence d'une forme affaiblie de l'inégalité de Harnack. Ces opérateurs, très semblables aux opérateurs paraboliques, sont presque caractérisés par le fait que les solutions de $Lu = 0$ satisfont à l'axiomatique de Bauer.

Sous l'hypothèse (2), nous montrons que de plus toute solution de $Lu = 0$, qui atteint son maximum en un point, est constante, ainsi que la forme classique de l'inégalité de Harnack. Si de plus les coefficients sont analytiques, toute solution de $Lu = 0$, nulle au voisinage d'un point, est identiquement nulle. Ces opérateurs, très semblables aux opérateurs elliptiques, sont presque caractérisés par le fait que les solutions de $Lu = 0$ satisfont à l'axiomatique de Brelot.

Tous ces résultats sont conséquence de théorèmes sur la propagation des maximums et l'unicité du problème de Cauchy, valables pour des opérateurs L généraux, et dont la démonstration repose sur des considérations de géométrie infitésimale directe.

1. Rappels et notations.

Dans toute la suite, Ω désignera un ouvert connexe de $\underset{\sim}{R}^n$ et l'opérateur L possédera les propriétés énoncées en (b). Nous commençons par quelques rappels sur les champs de vecteurs.

(a) A tout champ de vecteurs $X(x) = (\alpha_1(x) , \dots , \alpha_n(x))$ défini sur Ω, nous associerons l'opérateur différentiel du premier ordre noté Xu :

$$Xu(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \quad .$$

Si $X = (\alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ et $Y = (\beta_1 , \dots , \beta_n)$ sont deux champs de vecteurs de classe C^1, leur crochet $Z = [X , Y]$ est défini par

$$Zu = [X , Y]u = Y(Xu) - X(Yu)$$

$$Z = (\sum_i (\beta_i \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i} - \alpha_i \frac{\partial \beta_1}{\partial x_i}) , \dots , \sum_i (\beta_i \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_i} - \alpha_i \frac{\partial \beta_n}{\partial x_i})) \quad .$$

Etant donnée une famille $X_1 , \dots , X_r$ de champs de vecteurs C^∞, nous désignerons par $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r)$ le plus petit C^∞-module, stable par l'opération crochet, qui contienne $X_1 , \dots , X_r$. Pour que Z appartienne à $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r)$, il faut et il suffit qu'il soit une somme finie de termes de la forme

$$\lambda[X_{i_1} , [X_{i_2} , \dots , [X_{i_{\ell-1}} , X_{i_\ell}]]] \quad ,$$

où $\lambda \in C^\infty(\Omega)$ et où $i_k = 1 , \dots , r$.

Le rang de $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r)$ en un point x est la dimension de l'espace vectoriel formé par les vecteurs $Z(x)$ lorsque Z parcourt $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r)$. Si le rang de $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r)$ est constamment égal à p au voisinage d'un point, on peut, d'après le théorème de Frobenius, trouver des coordonnées locales $y_1 , \dots , y_p , \dots , y_n$ telles que $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r)$ soit identique à l'ensemble des champs de vecteurs dont les composantes suivant $y_{p+1} , \dots , y_n$ sont nulles. Si le rang de $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r)$ est égal à n en tout point, tout champ de vecteurs appartient à $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r)$.

(b) Nous désignons par L un opérateur différentiel du second ordre

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + a(x)\, u(x) \quad ,$$

possédant les trois propriétés suivantes :

(α) La forme quadratique $(a_{ij}(x))$ est positive pour chaque x, mais non nécessairement définie positive (L est elliptique dégénéré)

$$\forall\, x \in \Omega\ ,\quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\ ,\quad \sum a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geqslant 0\ .$$

(β) On a $a(x) \leqslant 0$ dans Ω ; $a(x) \in C^\infty$.

(γ) Il existe des champs de vecteurs $X_1, \dots, X_r$ et Y de classe C^∞ tels que

$$Lu = \sum_{k=1}^{r} X_k^2\, u + Yu + au\ .$$

Remarquons qu'un opérateur à coefficients C^∞ et possédant la propriété (α) ne possède pas nécessairement la propriété (γ). On peut, en effet, décomposer la forme quadratique $(a_{ij}(x))$ en somme de carrés, mais on ne peut pas toujours trouver une telle décomposition dépendant de x de manière C^∞ . Il en est cependant ainsi si le rang de la matrice $(a_{ij}(x))$ est constant, ce qui est toujours vrai sur un ouvert dense.

Nous ferons fréquemment par la suite une hypothèse supplémentaire (L est N. T. D., voir définition 5.1) qui permet dans tout les cas de se ramener localement au cas ou (β) est réalisée.

PROPOSITION 1.1. - Si une fonction u de classe C^2 atteint en un point x un maximum local positif, on a $Lu(x) \leqslant 0$. Si ce maximum est strictement positif et si $a(x) < 0$, on a $Lu(x) < 0$.

En effet, la forme quadratique $(u''_{ij}(x))$ est négative au point x , d'où $\sum a_{ij}(x)\, u''_{ij}(x) \leqslant 0$. D'autre part, $u'_i(x) = 0$, d'où la proposition.

(c) Nous appellerons L^* l'adjoint formel de L

$$L^* u = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}(a_{ij}\, u) - \sum \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i\, u) + au\ ,$$

$$L^* u = \sum X_k^2\, u + Y'u + a'u\ .$$

En remarquant que $Y + Y'$ est combinaison linéaire des X_k , on voit que $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r, Y) = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_r, Y')$.

Si u et v sont deux fonctions de classe C^2 dont l'une est à support compact, on a l'égalité suivante (formule de Green) :

$$\int uL^* v - \int vLu = 0\ .$$

2. Quelques résultats de géométrie infinitésimale directe.

Dans le cas particulier où les ensembles fermés considérés sont limités par des surfaces régulières, les deux théorèmes démontrés dans ce paragraphe sont des résultats élémentaires bien connus de géométrie différentielle. Pour souligner cette analogie et simplifier les énoncés, nous introduisons les deux définitions suivantes dans lesquelles F désigne un sous-ensemble fermé quelconque de l'ouvert Ω.

DÉFINITION 2.1. - Un vecteur n est normal à F en un point $x_0 \in F$, s'il existe une boule ouverte, contenue dans $\Omega \setminus F$, centrée en x_1, telle que x_0 soit adhérent à cette boule et que les vecteurs $x_1 - x_0$ et n soient parallèles.

DÉFINITION 2.2. - Un champ de vecteurs $X(x)$ est tangent à F si, pour tout point $x_0 \in F$ et tout vecteur n normal à F en x_0, les vecteurs $X(x_0)$ et n sont orthogonaux.

THÉORÈME 2.1. - Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et F un fermé de Ω. Soit $X(x)$ un champ de vecteurs lipschitzien dans Ω et tangent à F. Alors toute courbe intégrale de X qui rencontre F en un point est entièrement contenue dans F.

La démonstration est analogue à celle du théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz. S'il existe une courbe $x(t)$ vérifiant

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(x(t)) \quad ,$$

rencontrant F et non contenue dans F, on peut trouver un intervalle $[t_0 , t_1]$ tel que

$$x(t_0) = x_0 \in F \quad \text{et} \quad x(t) \notin F \qquad \text{pour} \quad t \in]t_0 , t_1] \quad .$$

Démontrons les deux lemmes suivants :

LEMME 2.1. - Soit $\delta(t)$ la distance de $x(t)$ à F. Il existe une constante K_0 telle que, pour $t \in]t_0 , t_1]$

$$\liminf_{h \to 0} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{|h|} \geq - K_0\, \delta(t) \quad .$$

Soit h_n une suite tendant vers 0 et soient $x = x(t)$ et $x_n = x(t + h_n)$. Pour chaque n, soit y_n une projection de x_n sur F. En extrayant au besoin une sous-suite, on peut supposer que y_n converge vers un point y de F qui est une projection de x. On a

$$\frac{1}{|h_n|} |\delta(t + h_n) - \delta(t)| \geq \frac{1}{h_n}(|y_n - x_n| - |y_n - x|) \quad ,$$

d'où

$$\liminf \frac{\delta(t+h)-\delta(t)}{|h|} \geqslant - |X(x)|\,|\cos\alpha| \quad ,$$

où α désigne l'angle des vecteurs $X(x)$ et $(y - x)$. Par hypothèse, les vecteurs $(y - x)$ et $X(y)$ sont orthogonaux. D'où, X étant lipschitzien,

$$|\cos\alpha| \leqslant |\sin(X(x)\ ,\ X(y))| \leqslant K_1\ \delta(t)\ ,$$

ce qui démontre le lemme.

LEMME 2.2. - <u>Soit</u> $\varphi(t)$ <u>une fonction numérique continue sur l'intervalle</u> $[t_0\ ,\ t_1]$ <u>et vérifiant</u>

$$\liminf_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{|h|} \geqslant -M \qquad \text{pour} \quad t \in \,]t_0\ ,\ t_1[\quad .$$

<u>Alors</u> φ <u>est lipschitzienne de rapport</u> M <u>sur</u> $[t_0\ ,\ t_1]$.

En effet, supposons qu'il existe deux points s_1 et s_2 tels que

$$\frac{\varphi(s_1)-\varphi(s_2)}{s_1 - s_2} = N \qquad \text{avec} \quad |N| > M \quad .$$

Formons alors $\Phi(t) = \varphi(t) - N(t - s_1)$. Cette fonction admet un maximum sur l'intervalle $[s_1\ ,\ s_2]$ et, au point où ce maximum est atteint, on aboutit facilement à une contradiction en considérant la quantité $\liminf \frac{\Phi(t+h)-\Phi(t)}{|h|}$.

<u>Fin de la démonstration du théorème 2.1.</u> - Posons

$$\theta = \inf[(t_1 - t_0)\ ,\ \frac{1}{2K_0}]$$

et

$$\varepsilon = \sup\ \delta(t) \qquad \text{pour} \quad t \in [t_0\ ,\ t_0 + \theta]\ .$$

D'après les deux lemmes précédents, la fonction δ est, dans cet intervalle, lipschitzienne de rapport $K_0\ \varepsilon$. D'où $\sup \delta(t) \leqslant \theta K_0\ \varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour $t \in [t_0\ ,\ t_0 + \theta]$, ce qui est la contradiction cherchée.

PROPOSITION 2.1. - <u>Soient</u> $X_1\ ,\ \dots\ ,\ X_r$ <u>des champs de vecteurs de classe</u> C^∞ <u>et soit</u> $Z \in \mathcal{L}(X_1\ ,\ \dots\ ,\ X_r)$. <u>Toute courbe intégrale de</u> Z <u>peut être approchée uniformément par des courbes différentiables par morceaux telles que chaque arc différentiable soit une courbe intégrale de l'un des champs de vecteurs</u> $X_1\ ,\dots,\ X_r$.

En raisonnant par récurrence, il suffit de démontrer la proposition dans l'un des deux cas suivants : $Z = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ et $Z = [X_1 , X_2]$. On utilisera le lemme suivant, dont on trouvera une démonstration dans [6] (chapitre V, § 4).

LEMME 2.3. - Soit $x(t)$ la solution de

$$x'(t) = Z(x(t)) \ ; \qquad x(0) = x_0 \ ,$$

et soit d'autre part $y(t)$ vérifiant

$$y'(t) = Z(y(t)) + \omega(t) \ ; \qquad y(0) = x_0 \ .$$

Alors $|x(t) - y(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}(e^{Mt} - 1)$, où $\varepsilon = \sup|\omega(t)|$ et où M est la constante de Lipschitz de Z.

1er cas : $Z(x) = \lambda_1(x)\, X_1(x) + \lambda_2(x)\, X_2(x)$.

Considérons la courbe différentiable par morceaux Γ décrite par le point $x(t)$ et définie de la manière suivante, θ désignant un nombre positif :

$$\begin{aligned} & x(0) = x_0 \\ & x'(t) = \lambda_1(2k\theta)\, X_1[x(t)] \qquad \text{pour} \quad t \in [2k\theta \ , \ (2k+1)\theta) \\ & x'(t) = \lambda_2(2k\theta)\, X_2[x(t)] \qquad \text{pour} \quad t \in [(2k+1)\theta \ , \ (2k+2)\theta) \ . \end{aligned}$$

Soit d'autre part Γ_1 la ligne brisée formée de segments joignant les points $x(2k\theta)$ et $x[(2k+2)\theta]$, chacun d'eux étant parcouru d'un mouvement uniforme pendant un intervalle de temps θ. D'après le lemme 2.3, lorsque $\theta \to 0$, la courbe Γ_1 converge uniformément vers la courbe intégrale de Z issue de x_0. D'autre part, la distance entre Γ et Γ_1 tend vers 0 avec θ ce qui démontre la proposition dans le 1er cas.

2e cas : $Z(x) = [X_1 , X_2](x)$.

Considérons la courbe différentiable par morceaux Γ décrite par le point $x(t)$ et définie par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} & x(0) = x_0 \\ & x'(t) = X_1(x(t)) \qquad \text{pour} \quad t \in [4k\theta \ , \ (4k+1)\theta) \\ & x'(t) = X_2(x(t)) \qquad \text{pour} \quad t \in [(4k+1)\theta \ , \ (4k+2)\theta) \\ & x'(t) = -X_1(x(t)) \qquad \text{pour} \quad t \in [(4k+2)\theta \ , \ (4k+3)\theta) \\ & x'(t) = -X_2(x(t)) \qquad \text{pour} \quad t \in [(4k+3)\theta \ , \ (4k+4)\theta) \ . \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire montre que

$$x[(4k+4)\theta] - x[4k\theta] = \theta^2\, Z(4k\theta) + O(\theta^3) \ ,$$

où la majoration du terme $O(\theta^3)$ ne dépend que d'une borne des dérivées secondes de X_1 et X_2.

Soit alors Γ_1 la ligne brisée formée des segments joignant les points $x(4k\theta)$ et $x[(4k+4)\theta]$, chacun d'eux étant parcouru d'un mouvement uniforme pendant un intervalle de temps θ^2. D'après le lemme 2.3, la courbe Γ_1 converge uniformément vers la courbe intégrale de Z issue de x_0. La distance entre Γ et Γ_1 tendant vers 0 avec θ, la proposition est démontrée.

THÉORÈME 2.2. - Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et F un fermé de Ω. Soient $X_1, \dots, X_r$ des champs de vecteurs de classe C^∞ dans Ω, chacun d'entre eux étant tangent à F. Soit d'autre part $Z \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_r)$. Alors Z est tangent au fermé F et toute courbe intégrale de Z qui rencontre F est entièrement contenue dans F.

En effet, soit Γ une courbe intégrale de Z passant par le point $x_0 \in F$. On peut l'approcher par des courbes différentiables par morceaux dont chaque arc est une courbe intégrale de l'un des champs X_i. D'après le théorème 2.1, ces courbes sont contenues dans F, et à la limite, $\Gamma \subset F$. Le champ de vecteurs Z est alors nécessairement tangent à F. En effet, s'il existait une sphère extérieure à F et le rencontrant uniquement en x_1, la normale en ce point n'étant pas orthogonale à $Z(x_1)$, la courbe intégrale de Z, passant par x_1 pénètrerait à l'intérieur de la sphère et sortirait de F.

3. Propagation des maximums.

Rappelons que l'opérateur L possède les propriétés énoncées au § 1 (b)

$$Lu = \sum_{k=1}^{r} X_k^2 u + Yu + au = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u''_{ij} + \sum_{i=1}^{n} a_i\, u'_i + au \quad .$$

PROPOSITION 3.1. - Soit u une fonction de classe C^2 dans Ω, telle que $Lu \geqslant 0$. Supposons que le maximum de u soit positif et qu'il soit atteint en au moins un point de Ω. Soit F l'ensemble des points où u atteint ce maximum. Alors, chacun des champs de vecteurs X_k est tangent à F.

Soit en effet $B(x_0, \rho)$ une boule fermée de centre x_0, de rayon ρ, rencontrant F en un unique point x_1. Nous allons montrer que le nombre α

$$\alpha = \sum a_{ij}(x_1)(x_0^i - x_1^i)(x_0^j - x_1^j)$$

est nul, ce qui démontre la proposition.

Supposons au contraire $\alpha > 0$. Considérons la fonction suivante, où k est un nombre positif

$$v(x) = e^{-k|x-x_0|^2} - e^{-k\rho^2}$$

$$Lv(x_1) = e^{-k\rho^2}[4k^2\alpha - 2k(a_{ii} + a_i(x_1^i - x_0^i))] \quad .$$

Si k est choisi suffisamment grand, Lv est strictement positif en x_1 et donc aussi dans un voisinage convenable V de x_1 .

Formons la fonction suivante, où λ est un nombre strictement positif

$$w(x) = u(x) + \lambda v(x) \ .$$

On a

$$w(x_1) = \sup u \quad ;$$

$$w(x) \leqslant \sup u \qquad \text{pour} \quad x \in \partial V \cap \complement B(x_0 \ , \ \rho)$$

la fonction v étant négative hors de $B(x_0 \ , \ \rho)$;

$$w(x) \leqslant \sup u \qquad \text{pour} \quad x \in \partial V \cap B(x_0 \ , \ \rho)$$

par raison de compacité, à condition d'avoir choisi λ suffisamment petit.

La fonction w doit atteindre un maximum positif en un point de V , ce qui, d'après la proposition 1.1, est en contradiction avec le fait que $Lw(x) > 0$ dans V .

THÉORÈME 3.1. - Soit u une fonction de classe C^2 dans Ω , vérifiant $Lu \geqslant 0$. Soit Z un champ de vecteurs appartenant à $\mathfrak{L}(X_1 \ , \ \ldots \ , \ X_r)$ et soit Γ une courbe intégrale de Z . Supposons que le maximum de u soit positif et qu'il soit atteint en un point de Γ . Ce maximum est alors atteint en tout point de Γ .

Ce résultat se déduit simplement de la proposition précédente et du théorème 2.2. Il en résulte le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.1. - Supposons que $\mathfrak{L}(X_1 \ , \ \ldots \ , \ X_r)$ soit en tout point de rang n . Une fonction u de classe C^2 dans Ω et vérifiant $Lu \geqslant 0$ ne peut atteindre son maximum positif en un point sans être constante.

Remarque 3.1. - Un opérateur vérifiant l'hypothèse du corollaire 3.1 peut être "très dégénéré". Il en est ainsi, par exemple de l'opérateur ci-dessous, défini dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (les variables étant notées $y \ , \ x_1 \ , \ \ldots \ , \ x_n$) :

$$L = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(y \frac{\partial}{\partial x_1} + y^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + y^n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \quad .$$

<u>Remarque 3.2.</u> - Les résultats précédents sont presque les meilleurs possibles. Supposons en effet que dans un sous-ouvert non vide, le rang de $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r)$ soit égal à $p < n$. D'après le théorème de Frobenius, on peut trouver des coordonnées locales $y_1 , \dots , y_n$ telles que les composantes des vecteurs X_k selon $y_{p+1} , \dots , y_n$ soient nulles. L'opérateur L peut se mettre sous la forme suivante :

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{p} b_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \, \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + au \ .$$

Enfin, en changeant au besoin y_n en $-y_n$, on peut trouver un sous-ouvert V non vide où $b_n \leqslant 0$. On peut supposer que l'origine appartienne à V . Considérons la fonction suivante :

$$\begin{aligned} v(y) &= 0 && \text{pour } y_n \leqslant 0 \\ v(y) &= -y_n^3 && \text{pour } y_n \geqslant 0 \end{aligned} \quad .$$

On a $Lv \geqslant 0$ et la fonction v atteint un maximum positif sans être constante au voisinage.

On ne connaît pas de résultat général lorsque le rang de $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r)$ est constamment égal à n , sauf aux points d'un ensemble d'intérieur vide.

On peut démontrer de la même manière que le théorème 3.1 est (presque) le meilleur résultat possible, dans le cas où Y appartient à $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r)$. Le rôle de Y est précisé par le théorème suivant que nous nous bornons à énoncer.

THÉORÈME 3.2. - <u>Soit</u> u <u>une fonction de classe</u> C^2 <u>dans</u> Ω , <u>vérifiant</u> $Lu \geqslant 0$. <u>Soit</u> Z <u>un champ de vecteurs appartenant à</u> $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r)$ <u>et soit</u> $x(t)$ <u>une courbe intégrale de</u> $Z + \lambda Y$ <u>où</u> λ <u>est une fonction positive de classe</u> C^∞ . <u>Supposons que le maximum de</u> u <u>soit positif et qu'il soit atteint au point</u> $x(t_0)$. <u>Ce maximum est alors atteint au point</u> $x(t)$ <u>pour</u> $t \geqslant t_0$.

4. Unicité du problème de Cauchy et quasi-analyticité.

Outre les hypothèses faites au paragraphe 1, nous supposerons dans ce paragraphe que les coefficients de L sont analytiques.

Rappelons qu'une surface définie au voisinage de x , par $\varphi(x) = \varphi(x_1)$, où φ est une fonction de classe C^1 telle que $\operatorname{grad} \varphi(x_1) \neq 0$ est dite <u>caractéristique</u> au point x_1 , si

$$\sum a_{ij}(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_1) = 0 \quad .$$

Il est équivalent de dire que le vecteur grad $\varphi(x_1)$ est orthogonal aux vecteurs $X_k(x_1)$.

Rappelons le théorème d'unicité de Holmgren.

THÉORÈME 4.1. - <u>Soit</u> $\varphi(x) = \varphi(x_1)$ <u>une surface non caractéristique en</u> x_1. <u>Soit</u> u <u>une distribution vérifiant</u> $Lu = 0$. <u>Supposons qu'on ait</u> $u = 0$ <u>pour</u> $\varphi(x) < \varphi(x_1)$. <u>Alors</u> u <u>est nulle au voisinage de</u> x_1.

Pour une démonstration, voir [4] (théorème 5.3.1).

DÉFINITION 4.1. - <u>Nous dirons que la surface</u> $\varphi(x) = \varphi(x_1)$ <u>est</u> fortement caractéristique <u>au point</u> x_1 <u>si le vecteur</u> grad $\varphi(x_1)$ <u>est orthogonal à</u> $Z(x_1)$ <u>pour tout</u> Z <u>appartenant à</u> $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r)$.

THÉORÈME 4.2. - <u>Soit</u> $\varphi(x) = \varphi(x_1)$ <u>une surface non fortement caractéristique en</u> x_1. <u>Soit</u> u <u>une distribution vérifiant</u> $Lu = 0$. <u>Supposons qu'on ait</u> $u = 0$, <u>pour</u> $\varphi(x) < \varphi(x_1)$. <u>Alors</u> u <u>est nulle au voisinage de</u> x_1.

Soit F le support de u. Supposons démontré que les champs de vecteurs X_k sont tangents à F. Soit alors $Z \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_r)$ tel que $Z(x_1)$ ne soit pas orthogonal à grad $\varphi(x_1)$. D'après le théorème 2.2, si x_1 appartenait à F, la courbe intégrale de Z passant par x_1 serait contenue dans F. Or celle-ci traverse la surface $\varphi(x) = \varphi(x_1)$ ce qui serait contradictoire avec le fait que u est nulle d'un côté de la surface. Le point x_1 n'appartient donc pas au support de u, ce qui démontre le théorème.

Montrons maintenant que les champs de vecteurs X_k sont tangents à F. Soit $B(x_0, \rho)$ une boule fermée rencontrant F en un unique point y_1. La distribution u est nulle à l'intérieur de la boule. Si la sphère n'était pas caractéristique au point y_1, u serait nulle au voisinage de y_1 d'après le théorème 4.1, ce qui contredit le fait que y_1 appartient au support de u. La sphère est donc nécessairement caractéristique au point y_1. Cela prouve que les champs de vecteurs X_k sont tangents à F.

COROLLAIRE 4.1. - <u>Supposons que</u> $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r)$ <u>soit en tout point de rang</u> n. <u>Soit</u> u <u>une distribution vérifiant</u> $Lu = 0$. <u>Si</u> u <u>est nulle au voisinage d'un point,</u> u <u>est identiquement nulle</u>.

<u>Remarque 4.1</u>. - On peut montrer que si l'hypothèse du corollaire 4.1 n'est pas réalisée en tous les points d'un ouvert non vide, on peut construire une fonction u nulle sur un sous-ouvert non vide sans être identiquement nulle.

Remarque 4.2. - Les méthodes de ce paragraphe peuvent s'appliquer à des opérateurs différentiels à coefficients analytiques d'ordre quelconque. Dans le cas particulier où les directions caractéristiques en chaque point x forment une variété linéaire qui dépend régulièrement de x, la définition 4.1 et la démonstration du théorème 4.1 s'étendent immédiatement.

5. Problème de Dirichlet.

Rappelons le résultat suivant, dû à HÖRMANDER [5].

THÉORÈME 5.1. - Supposons que $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$ soit en tout point de rang n. L'opérateur L est alors hypoelliptique, c'est-à-dire que toute distribution u est de classe C^∞ dès que Lu est de classe C^∞.

Le corollaire suivant résulte immédiatement du théorème du graphe fermé.

COROLLAIRE 5.1. - Si $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$ est en tout point de rang n, sur l'espace des solutions u de $Lu = 0$, la topologie induite par $C^\infty(\Omega)$ coïncide avec la topologie induite par $\mathcal{D}'(\Omega)$.

La condition ci-dessus est moins restrictive que celle qui intervenait aux paragraphes 3 et 4. Jointe à une condition supplémentaire très faible, elle va nous permettre de construire de bonnes solutions du problème de Dirichlet.

DÉFINITION 5.1. - L'opérateur L est dit non totalement dégénéré (N. T. D.) si en tout point x, la matrice $(a_{ij}(x))$ n'est pas nulle. Cette condition est équivalente à la non nullité en chaque point de l'un au moins des vecteurs $X_k(x)$.

Remarquons que si $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ est de rang n en tout point, l'opérateur L est N. T. D.

PROPOSITION 5.1. - Supposons que L soit N. T. D. Posons

$$L_1 u = (1 - M|x - x_0|^2)\, L[u(1 - M|x - x_0|^2)] .$$

Pour M suffisamment grand et x suffisamment voisin de x_0, on a

$$L_1 u = \sum a^1_{ij} u''_{ij} + a^1_i u'_i + a^1 u$$

où $a^1 < 0$. Son adjoint L_1^* possède la même propriété.

La démonstration est immédiate, il suffit de développer les coefficients de l'opérateur L_1.

Cette proposition légitime l'hypothèse que nous ferons fréquemment par la suite : $a(x) \leqslant a_0 < 0$. En effet, sous l'hypothèse N. T. D., nous pourrons toujours construire localement un opérateur L_1.

Résoudre le problème de Dirichlet :

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{dans } \omega \\ u &= \varphi \quad \text{sur } \partial\omega \end{aligned}$$

dans un ouvert ω assez petit revient à résoudre, en posant $v = u(1 - M|x - x_0|^2)$

$$\begin{aligned} L_1 v &= f[1 - M|x - x_0|^2]^{-1} \quad \text{dans } \omega \\ v &= \varphi[1 - M|x - x_0|^2] \quad \text{sur } \partial\omega \quad . \end{aligned}$$

La multiplication ou la division par $1 - M|x - x_0|^2$ ne modifie ni la régularité, ni la positivité des fonctions envisagées.

THÉORÈME 5.2. - <u>Supposons que</u> $\mathfrak{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$ <u>soit en tout point de rang</u> n <u>et que</u> $a(x) \leqslant a_0 < 0$. <u>Soit</u> ω <u>un ouvert tel que</u> $\overline{\omega} \subset \Omega$ <u>et possédant la propriété suivante : en tout point</u> x <u>de</u> $\partial\omega$, <u>il existe une normale</u> ν <u>à</u> $\overline{\omega}$ <u>(définition 2.1) telle que</u>

$$\sum a_{ij} \nu_i \nu_j > 0 \ .$$

<u>Alors, pour toute fonction</u> f <u>continue sur</u> $\overline{\omega}$ <u>et pour toute fonction</u> φ <u>continue sur</u> $\partial\omega$, <u>il existe une, et une seule, fonction</u> u <u>continue sur</u> $\overline{\omega}$ <u>telle que</u>

$$\begin{aligned} Lu &= -f \quad \text{au sens des distributions dans } \omega \\ u &= \varphi \quad \text{sur } \partial\omega \quad . \end{aligned}$$

<u>Si, de plus,</u> f <u>et</u> φ <u>sont positives,</u> u <u>l'est aussi.</u>

1° Démontrons d'abord l'unicité. Soit u vérifiant $Lu = 0$ et nulle sur $\partial\omega$. D'après l'hypoellipticité, u est de classe C^∞ dans ω. Si elle atteignait un maximum strictement positif (resp. un minimum strictement négatif), on aurait $Lu < 0$ (resp. $Lu > 0$) d'après la proposition 1.1, ce qui est absurde.

2° Démontrons l'existence dans le cas où $f \in C^\infty(\overline{\omega})$ et où $\varphi = 0$. Soit u_ε la solution de

$$\begin{aligned} Lu_\varepsilon + \varepsilon \, \Delta u_\varepsilon &= -f \quad \text{dans } \omega \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \partial\omega \quad . \end{aligned}$$

On a $\|u_\varepsilon\| \leqslant \dfrac{\|f\|}{|a_0|}$.

Les fonctions u_ε ont donc une valeur d'adhérence faible u dans L^∞ et celle-ci vérifie $Lu = -f$ au sens des distributions. La fonction u est donc de classe C^∞ dans ω.

Nous allons démontrer la continuité au bord par un argument classique utilisant les fonctions barrières. Pour tout point $x_1 \in \partial\omega$, construisons une sphère centrée au point $x_0 = x_1 + \lambda\nu$ qui ne remontre $\overline{\omega}$ qu'au point x_1. Soit

$$w(x) = e^{-k|x-x_0|^2} - e^{-k|x_1-x_0|^2} .$$

Un calcul analogue à celui de la proposition 3.1 prouve que, pour k choisi suffisamment grand, on a $\varepsilon\Delta w(x) + Lw(x) \geqslant \alpha > 0$ dans un voisinage V de x_1, la constante α ne dépendant pas de ε. Soit $M > 0$ tel que

$$Mw \leqslant -\frac{\|f\|}{|a_0|} \qquad \text{dans} \quad \omega \setminus V$$

$$M\alpha \geqslant \|f\| .$$

On a

$$(\varepsilon\Delta + L)(Mw \pm u_\varepsilon) \geqslant 0 \qquad \text{dans} \quad V \cap \omega$$

$$Mw \pm u_\varepsilon \leqslant 0 \qquad \text{au bord de} \quad V \cap \omega .$$

Il en résulte que $|u_\varepsilon| \leqslant M|w|$ et, à la limite $|u| \leqslant M|w|$. Cela entraîne que $u(x) \to 0$ pour $x \to x_0$.

3° Dans le cas où $f \in C^\infty(\overline{\omega})$ et $\varphi \in C^\infty(\partial\omega)$ ([1]), on se ramène aisément au cas précédent. Soit Φ une fonction de $C^\infty(\overline{\omega})$ prolongeant φ et posons $u - \Phi = v$. La fonction v est la solution de $Lv = -f - L\Phi$; $v = 0$ sur $\partial\omega$. D'après la proposition 1.1, si f et φ sont positives, u l'est aussi. Cela entraîne que si f et φ tendent uniformément vers 0, il en est de même pour u.

4° Si f et φ sont simplement continues, on les approche par des fonctions f_n et φ_n appartenant respectivement à $C^\infty(\overline{\omega})$ et $C^\infty(\partial\omega)$. Les solutions u_n associées convergent uniformément vers une fonction u. Par passage à la limite, celle-ci vérifie $Lu = -f$ au sens des distributions et est égale à φ sur $\partial\omega$.

<u>Remarque 5.1</u>. - La conclusion du théorème 5.2 est encore valable si on ne suppose pas l'hypoellipticité de l'opérateur L. On en trouvera une démonstration dans [2].

([1]) Si F est un fermé, $C^\infty(F)$ désigne l'espace des restrictions à F de fonctions de classe C^∞ au voisinage.

La preuve est ici considérablement simplifiée, la continuité de la solution à l'intérieur étant automatiquement réalisée lorsque $f \in C^\infty$.

COROLLAIRE 5.2. - Supposons que L soit N. T. D. et que $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r, Y)$ soit en tout point de rang n . Il existe une base d'ouverts de la topologie de Ω pour lesquels on a existence et unicité de la solution du problème de Dirichlet.

Compte tenu de la proposition 5.1, on peut supposer $a(x) \leqslant a_0 < 0$. Pour chaque point x de Ω, soit ξ un vecteur unitaire tel que $a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j > 0$. L'ouvert, intersection de deux boules de rayon $M + \varepsilon$, centrées respectivement aux points $x + M\xi$ et $x - M\xi$, vérifie les hypothèses du théorème 5.2, pourvu que M soit assez grand et ε assez petit.

Remarque 5.2. - Pour obtenir une telle base d'ouverts réguliers, on ne peut pas se contenter, comme dans le cas elliptique, d'ouverts à frontière différentiable. Il est nécessaire de considérer des ouverts à frontière différentiable par morceaux.

6. Opérateur harmonique et fonction de Green.

Nous supposerons dans tout ce paragraphe que L est N. T. D., que $a(x) \leqslant a_0 < 0$ (ainsi que la propriété correspondante pour L^*) et que $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r, Y)$ est en tout point de rang n . On désigne par ω un ouvert satisfaisant aux conditions du théorème 5.2.

DÉFINITION 6.1. - On appelle opérateur harmonique (ou noyau de Poisson), l'opérateur positif H de $C(\partial\omega)$ dans $C(\overline{\omega}) \cap C^\infty(\omega)$ qui à toute fonction φ fait correspondre la solution $u = H\varphi$ de

$$Lu = 0 \quad \text{dans} \quad \omega \ ; \qquad u = \varphi \quad \text{sur} \quad \partial\omega \ .$$

DÉFINITION 6.2. - On appelle opérateur de Green l'opérateur positif G de $C(\overline{\omega})$ dans $C(\overline{\omega})$ qui à toute fonction f fait correspondre la solution $u = Gf$ de

$$Lu = - f \quad \text{dans} \quad \omega \ ; \qquad u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega \ .$$

Si f est de classe C^∞ dans $U \subset \omega$, la fonction Gf est de classe C^∞ dans U .

THÉORÈME 6.1. - Il existe une fonction $g(x, y)$ positive, intégrable dans $\omega \times \omega$, de classe C^∞ en dehors de la diagonale, telle que, pour toute fonction $f \in C(\overline{\omega})$, on ait

$$Gf(x) = \int_\omega g(x, y)\, f(y)\, dy \ .$$

<u>On a de plus</u> $g(x\,,\,y) = g^*(y\,,\,x)$ <u>en désignant par</u> g^* <u>la fonction de Green de l'opérateur</u> L^* .

1° L'opérateur G étant positif, il existe, pour tout point x de ω , une mesure positive g_x sur $\bar{\omega}$ telle que

$$Gf(x) = \int_{\bar{\omega}} f(y)\, g_x(dy) \quad .$$

Si f est de classe C^∞ et à support compact dans ω , on a $GLf = -f$. Il en résulte que

$$L^* g_x = -\delta_x \ .$$

La mesure g_x possède donc, dans $\omega \setminus \{x\}$ une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrons que g_x ne charge ni $\{x\}$, ni $\partial\omega$.

2° Si on avait $g_x = C\delta_x + h(y)$, la fonction h appartenant à L^1 , on aurait

$$CL^* \delta_x = -\delta_x - L^* h \ .$$

L'opérateur L^* étant N. T. D., cela entraîne la nullité de C (on peut le voir par exemple, en remarquant que la tranformée de Fourier du second membre est $O(|\xi|^2)$ à l'infini, alors que $L^* \delta_x$ est un polynôme de degré exactement 2).

3° Pour montrer que g_x ne charge pas $\partial\omega$, considérons l'ensemble D_ε des points dont la distance à $\partial\omega$ est inférieure à ε . Soit φ continue, comprise entre 0 et 1 , à support dans D_ε , égale à 1 sur $\partial\omega$.

$$G\varphi(x) = \int \varphi(y)\, g_x(dy) \leqslant \int g_x(dy) = G1(x) \quad .$$

La fonction positive $G\varphi$ vérifiant $LG\varphi = 0$ hors de D_ε atteint son maximum sur D_ε .

$$\sup_{x\in\bar{\omega}} G\varphi(x) \leqslant \sup_{x\in D_\varepsilon} G1(x) \quad .$$

La fonction $G1(x)$ tendant vers 0 au bord de ω , il en résulte que $\int_{\partial\omega} g_x(dy) = 0$

4° Il existe donc une fonction $g(x\,,\,y)$ positive, qui pour chaque x est de classe C^∞ dans $\omega \setminus \{x\}$, telle que

$$Gf(x) = \int g(x\,,\,y)\, f(y)\, dy \quad .$$

Soient U et V deux sous-ouverts disjoints de ω . Pour toute distribution T à support compact dans U , posons, pour x appartenant à V ,

$$GT(x) = \langle T_y\,,\, g(x\,,\,y)\rangle \quad .$$

Si une suite φ_n de fonctions régulières converge vers T, les fonctions $G\varphi_n$ restent bornées dans V et convergent simplement vers GT. On a donc à la limite $LGT = 0$ dans V, et GT est de classe C^∞. Il résulte alors du théorème des noyaux (voir [8]) que $g(x , y)$ est de classe C^∞ dans $U \times V$.

5° Soit G^* l'opérateur de Green relatif à L^*. Il résulte facilement du principe du maximum que pour toute fonction φ positive, de classe C^∞ et à support compact, la fonction $G^* \varphi$ est la plus petite des fonctions positives Φ vérifiant $L^* \Phi = - \varphi$. Posons

$$\Phi(x) = \int g(y , x) \varphi(y) dy .$$

Pour toute fonction ψ de $\mathcal{D}(\omega)$, on a

$$\int \Phi(x) L\psi(x) = \iint g(y , x) \varphi(y) L\psi(x) = \int \varphi(y) GL\psi(y)$$

$$\int \Phi(x) L\psi(x) = - \int \varphi(y) \psi(y) .$$

Il en résulte que $L^* \Phi = - \varphi$ et donc

$$\int g(y , x) \varphi(y) dy \geqslant \int g^*(x , y) \varphi(y) dy .$$

Cette inégalité étant valable pour toute fonction positive φ, en inversant les rôles de L et L^*, on obtient $g(x , y) = g^*(y , x)$.

Remarque 6.1. - La condition $\mathcal{L}(X_1 , \ldots , X_r , Y)$ de rang n n'est pas nécessaire pour résoudre le problème de Dirichlet (cf. remarque 5.1), mais elle est indispensable pour l'existence d'une fonction de Green. En effet, si on peut, à l'aide du théorème de Frobenius, trouver des coordonnées locales telles que

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial\eta_i \partial\eta_j} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial\eta_i} + au ,$$

il existe encore un opérateur de Green, mais la mesure $g_x(dy)$ est portée par la variété

$$\eta_i(y) = \eta_i(x) \quad \text{pour } i = p + 1 , \ldots , n .$$

7. Inégalité de Harnack.

Dans ce paragraphe, nous démontrons pour les opérateurs hypoelliptiques une forme affaiblie de l'inégalité de Harnack (connue sous le nom d'axiome de Doob en théorie axiomatique du potentiel), classique pour les opérateurs paraboliques. Nous démontrons ensuite que la forme habituelle de l'inégalité de Harnack, valable pour les opérateurs elliptiques, est encore valable si $\mathcal{L}(X_1 , \ldots , X_r)$ est de rang n en tout point.

PROPOSITION 7.1. - Soit u une fonction positive vérifiant $Lu = 0$ au voisinage d'un ouvert ω satisfaisant aux conditions du théorème 5.2. Pour $\beta > 0$, soit g_β la fonction de Green relative à l'opérateur $L - \beta$. On a alors

$$u(x) \geqslant \beta \int_\omega g_\beta(x , y)\, u(y)\, dy \quad .$$

Pour toute fonction v , on a en effet

$$v = G_\beta(\beta - L)v + H_\beta\, \gamma^0\, v$$

en appelant $\gamma^0 v$ la restriction de v à $\partial\omega$. La fonction u étant positive, on a $H_\beta\, \gamma^0\, u \geqslant 0$. La proposition résulte alors immédiatement du fait que $Lu = 0$.

THÉORÈME 7.1. - Supposons que L soit N. T. D. et que $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r , Y)$ soit de rang n en tout point. Pour tout compact K de Ω , pour tout ensemble D dense dans Ω et pour tout multi-entier p , il existe un ensemble fini $\{y_1 , \dots , y_m\} \subset D$ et une constante C tels que, pour toute fonction u positive dans Ω et vérifiant $Lu = 0$, on ait

$$\sup_{x\in K} \left|\frac{\partial^p u(x)}{\partial x^p}\right| \leqslant C[u(y_1) + \dots + u(y_m)] \quad .$$

Nous allons montrer que pour tout point x_0 , il existe un voisinage V de x_0 , un point y de D et une constante C tels que

$$\sup_{x\in V} \left|\frac{\partial^p u(x)}{\partial x^p}\right| \leqslant Cu(y) \quad .$$

Le théorème en résultera par un argument de compacité. D'après le corollaire 5.1, il existe un ouvert $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$, contenant x et vérifiant les hypothèses du théorème 5.2. La fonction $g^*_\beta(x_0 , y)$ n'étant pas identiquement nulle et étant continue en dehors de la diagonale, on peut trouver un point y de D et un voisinage W de x tels que

$$\sup_{x\in W} g^*_\beta(x , y) \geqslant \alpha > 0 \ .$$

D'après la proposition 7.1, et compte tenu du fait que $g^*_\beta(x , y) = g_\beta(y , x)$, on a

$$u(y) \geqslant \alpha \int_W u(x)\, dx \quad .$$

D'autre part, pour les solutions de $Lu = 0$, la topologie de l'espace C^∞ coïncide avec la topologie de la convergence dans L^1 sur tout compact d'après le corollaire 5.1. Si V est un ouvert relativement compact dans W , on a

$$\sup_{x\in V} \left|\frac{\partial^p u(x)}{\partial x^p}\right| \leqslant C_1 \int_W u(x)\, dx \ .$$

Le théorème résulte immédiatement des deux inégalités précédentes.

THÉORÈME 7.2. - Supposons que $\mathcal{L}(X_1 , \ldots , X_r)$ soit en tout point de rang n . Pour tout compact K de Ω , pour tout point y_0 de Ω , et pour tout multi-entier p , il existe une constante C telle que, pour toute fonction u positive dans Ω et vérifiant $Lu = 0$, on ait

$$\sup_{x\in K} \left|\frac{\partial^p u(x)}{\partial x^p}\right| \leqslant Cu(y_0) \ .$$

Par un argument de connexité, on se ramène au cas où K et y_0 sont contenus dans un ouvert ω satisfaisant aux hypothèses du théorème 5.2. La démonstration est alors tout-à-fait analogue à celle du théorème précédent, compte tenu du fait que $g_\beta(x , y) > 0$. En effet, $L_y^* g_\beta(x , y) = 0$ dans $\omega \setminus \{x\}$ et, si g_β s'annulait en un point, elle y atteindrait un minimum négatif et serait donc identiquement nulle d'après le corollaire 3.1.

8. Application aux théories axiomatiques du potentiel (2).

DÉFINITION 8.1. - Une axiomatique de théorie du potentiel sur Ω est la donnée d'un faisceau $\mathcal{H}$ de fonctions continues (dites fonctions harmoniques) tel que les ouverts réguliers forment une base de la topologie de Ω .

Un ouvert relativement compact ω est dit régulier, si pour toute fonction φ continue sur $\partial\omega$, il existe une, et une seule, fonction u continue sur $\overline{\omega}$, harmonique dans ω et égale à φ sur $\partial\omega$, et si de plus u est positive dès que φ est positive.

DÉFINITION 8.2. - On dit que $\mathcal{H}$ vérifie l'axiome de Brelot (resp. l'axiome de Doob) si, pour toute famille filtrante croissante u_i de fonctions harmoniques dans un ouvert ω telle que $\sup u_i$ soit fini en un point (resp. sur un ensemble dense), $\sup u_i$ est fini et harmonique dans Ω .

---

(2) Nous renvoyons à [3] où l'on trouvera une étude de l'axiomatique de Brelot ainsi que des indications sur les autres théories axiomatiques.

Nous avons démontré dans un travail antérieur les résultats suivants :

THÉORÈME 8.1. - Soit $\mathcal{H}$ une axiomatique de théorie du potentiel dans Ω , dont les fonctions harmoniques sont de classe C^∞ . Il existe alors un ouvert Ω_0 dense dans Ω et un opérateur L , unique à un facteur de proportionnalité près, défini et N. T. D. dans Ω_0 , à coefficients C^∞ , tel que les fonctions harmoniques dans Ω_0 soient exactement les solutions u de $Lu = 0$.

De plus $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r , Y)$ est de rang n en tout point d'un ouvert dense. Si $\mathcal{H}$ vérifie l'axiome de Brelot, $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r)$ est de rang n en tout point d'un ouvert dense.

La première partie du théorème est démontrée dans [1] (théorèmes 3.1 et 4.2). La seconde partie n'y est pas énoncée sous cette forme, mais se déduit facilement du résultat de [1] (proposition 7.1) et du théorème de Frobenius.

Remarque 8.1. - Le fait d'avoir supposé que toutes les fonctions harmoniques sont de classe C^∞ masque un peu la nature des choses. Si on suppose seulement qu'il y a "suffisamment" de fonctions harmoniques C^∞ , on peut encore trouver un opérateur L comme ci-dessus, mais on n'a plus nécessairement $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r , Y)$ de rang n en tout point. Cette dernière propriété est cependant vraie si l'axiome de Doob est vérifié.

Le théorème suivant montre que les résultats précédents sont presque les meilleurs possibles.

THÉORÈME 8.2. - Supposons que L soit N. T. D. et que $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r , Y)$ soit de rang n en tout point. Alors le faisceau $\mathcal{H}$ des solutions de $Lu = 0$ forme une axiomatique de théorie du potentiel, dont les fonctions harmoniques sont C^∞ et qui vérifie l'axiome de Doob.

Si de plus $\mathcal{L}(X_1 , \dots , X_r)$ est de rang n en tout point, $\mathcal{H}$ vérifie l'axiome de Brelot.

L'existence d'une base d'ouverts réguliers est assurée par le corollaire 5.1. Nous avons démontré, dans les théorèmes 7.1 et 7.2 que, sous les hypothèses ci-dessus, l'une ou l'autre forme de l'inégalité de Harnack était vérifiée. Cela implique facilement que l'axiome de Doob ou de Brelot est vérifié.

Remarque 8.2. - L'axiomatique de Bauer exige, outre l'axiome de Doob, un axiome de séparation. Celui-ci est toujours réalisé localement si L est N. T. D.

Remarque 8.3. - A l'aide d'arguments classiques, on peut déduire des théorèmes

3.1 et 3.2 des informations précises sur le support de la mesure harmonique d'un point et sur la structure des ensembles absorbants.

En conclusion, pour les opérateurs tels que $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ est de rang n en tout point, qui, on l'a vu (remarque 3.1), peuvent être très dégénérés, on peut appliquer tous les résultats de l'axiomatique de Brelot, c'est-à-dire que la plupart des résultats de théorie du potentiel connus pour les opérateurs elliptiques sont encore valables : résolution du problème de Dirichlet par la méthode de Perron-Wiener-Brelot, effilement, représentation intégrale, frontière de Martin, processus de Markov associé, etc.

De même, pour les opérateurs N. T. D. tels que $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$ est de rang n, la plupart des résultats de théorie du potentiel connus pour les opérateurs paraboliques sont encore valables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BONY (Jean-Michel). - Détermination des axiomatiques de théorie du potentiel dont les fonctions harmoniques sont différentiables, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 17, 1967, fasc. 1, p. 353-382.

[2] BONY (Jean-Michel). - Sur la régularité des solutions du problème de Dirichlet pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, 1968, Série A, p. 691-693.

[3] BRELOT (Marcel). - Axiomatique des fonctions harmoniques. - Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1966 (Séminaire de Mathématiques supérieures, Eté 1965, 14).

[4] HÖRMANDER (Lars). - Linear partial differential operators. - Berlin, Göttingen Heidelberg, Springer-Verlag, 1963 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).

[5] HÖRMANDER (Lars). - Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math., Uppsala, t. 119, 1967, p. 147-171.

[6] LA VALLÉE POUSSIN (Charles de). - Cours d'analyse infinitésimale. T. 2, 8e édition. - Louvain, Librairie universitaire ; Paris, Gauthier-Villars, 1949.

[7] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des noyaux, Proceedings of the International congress of mathematicians [11. 1950. Cambridge], Vol. 1, p. 220-230. - Providence, American mathematical Society, 1952.