Michèle Dehen

Décomposition en somme directe de l'espace des fonctions affines sur un simplexe de Choquet

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. nº 9, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A8_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
12e année, 1967/68, n° 9

8 février 1968

DÉCOMPOSITION EN SOMME DIRECTE DE L'ESPACE DES FONCTIONS AFFINES SUR UN SIMPLEXE DE CHOQUET

par Michèle DEHEN

(d'après F. JELLETT [6])

1. Introduction.

Si $\mathcal{C}(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles sur un espace compact Ω , un théorème d'Eilenberg montre que, pour toute décomposition de $\mathcal{C}(\Omega)$ en une somme directe $\mathcal{C}(\Omega) = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$ de sous-espaces vectoriels, il existe une décomposition $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ de Ω en deux fermés disjoints tels que $\mathcal{C}_i$ soit isomorphe à $\mathcal{C}(\Omega_i)$ $(i = 1 , 2)$.

Dans cet exposé, on désire faire une généralisation de ce résultat à l'espace de Banach $\mathcal{A}(X)$, qui sera aussi noté $\mathcal{A}$, des fonctions affines continues à valeurs réelles sur un simplexe de Choquet compact X . $\mathcal{A}$ est muni de la norme de la convergence uniforme et de l'ordre partiel habituel.

2. Fonctions affines sur deux faces fermées complémentaires dans X .

Définitions. - Une face d'un ensemble convexe K est un sous-ensemble convexe $F \subset K$ tel que, si $\lambda x + (1 - \lambda)y \in F$ pour $0 < \lambda < 1$ et $x , y \in K$, alors x et y appartiennent à F .

On dit que les faces F_1 et F_2 de K sont complémentaires, si $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, et si l'enveloppe convexe $\text{conv}(F_1 \cup F_2) = K$.

La proposition suivante résulte du théorème d'Edwards, et fut démontrée par LAZAR:

LEMME 1. - Si F_1 et F_2 sont deux faces fermées complémentaires du simplexe X , et si $f_i \in \mathcal{A}(F_i)$ $(i = 1 , 2)$, alors il existe une fonction $f \in \mathcal{A}(X)$ unique telle que

$$\begin{cases} f/F_i \equiv f_i & (i = 1 , 2) , \\ f/F_j \equiv 0 & (j \neq i) . \end{cases}$$

Ce résultat permet de définir une injection croissante, isométrique,

$$i : \mathcal{A}(F_1) \to \mathcal{A} \quad ,$$

en posant, pour $f \in \mathcal{A}(F_1)$: $i(f)(x) = f(x)$ si $x \in F_1$, $i(f)(x) = 0$ si $x \in F_2$. On identifiera $\mathcal{A}(F_1)$ avec son image dans $\mathcal{A}$, ainsi que $\mathcal{A}(F_2)$.

Définition. - Si B est un espace de Banach, et si B_1 et B_2 sont deux sous-espaces vectoriels de B , on dit que B est somme directe de B_1 et B_2 : $B = B_1 \oplus B_2$ si, $\forall\, b \in B$, il existe une décomposition unique de b en $b = b_1 + b_2$ avec $b_i \in B_i$, et si de plus $\|b\| = \sup(\|b_1\| , \|b_2\|)$.

PROPOSITION 1. - Si F_1 et F_2 sont deux faces fermées complémentaires dans X , alors $\mathcal{A}(X)$ s'écrit comme somme directe $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ où $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}(F_i)$ pour $i = 1 , 2$.

Démonstration. - Si $f \in \mathcal{A}$, on définit $f_1 \in \mathcal{A}_1$ par $f_1(x) = f(x)$ si $x \in F_1$, et $f_1(x) = 0$ si $x \in F_2$, et on définit de même $f_2 \in \mathcal{A}_2$. D'après le lemme 1, la décomposition de f est $f = f_1 + f_2$. La propriété des normes se déduit du principe du minimum de Bauer.

La réciproque de cette proposition est aussi vraie, c'est-à-dire :

Pour toute décomposition de $\mathcal{A}(X)$ en somme directe $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, il existe deux faces fermées F_1 et F_2 complémentaires de X , telles que l'on puisse identifier $\mathcal{A}_1$ à $\mathcal{A}(F_1)$ et $\mathcal{A}_2$ à $\mathcal{A}(F_2)$.

Elle sera démontrée dans le paragraphe suivant.

3. Décomposition de $\mathcal{A}$ en somme directe.

Soient $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}(X)$ l'ensemble des points extrémaux de X , $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$. $\underset{\sim}{1}$ désigne l'élément de $\mathcal{A}$ qui est identiquement égal à 1 sur le simplexe X .

LEMME 2 (Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{A}$). - Les points extrémaux de $\mathcal{B}$ sont les points f de $\mathcal{A}$ tels que, $\forall\, x \in \mathcal{E}(X)$, on ait $|f(x)| = +1$.

Démonstration. - Si on suppose que $f \in \mathcal{A}$ vérifie $|f(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathcal{E}(X)$, le principe du minimum de Bauer implique que f appartient à $\mathcal{B}$. Si on suppose $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ où $f_i \in \mathcal{B}$, alors, pour tout x de $\mathcal{E}(X)$,

$$|f(x)| = \frac{1}{2}|f_1(x) + f_2(x)| = 1 \qquad \text{et} \qquad |f_i(x)| \leqslant |f(x)| = 1 \quad \text{pour } i = 1 , 2 \ ;$$

par suite, pour tout $x \in \mathcal{E}(X)$, $f_1(x) = f_2(x) = f(x) = \pm 1$. Les trois fonctions sont continues et affines, et elles sont égales sur $\mathcal{E}(X)$; elles sont donc égales sur tout X. Par suite, $f \in \mathcal{E}(\mathcal{B})$.

Réciproquement, si $f \in \mathcal{B}$, et s'il existe $x_0 \in \mathcal{E}(X)$ tel que $|f(x_0)| < 1$, la fonction $|f|$ est convexe et continue sur X, par suite $v = 1 - |f|$ est concave et continue sur X, de plus elle vérifie $0 \leqslant v \leqslant 1$ et $v(x_0) = b > 0$. On peut définir une fonction $u : X \to \underset{\sim}{R}$ par $u(x) = 0$ si $x \neq x_0$ et $u(x_0) = b$. u est alors convexe, semi-continue supérieurement, et on a $u \leqslant v$. D'après le théorème d'Edwards, il existe $h \in \mathfrak{A}$ vérifiant $u \leqslant h \leqslant v$. Par suite, les fonctions $(f + h)$ et $f - h$ appartiennent à $\mathcal{B}$, et f s'écrit $f = \frac{1}{2}[(f + h) + (f - h)]$, où h n'est pas nulle puisque $h(x_0) = b > 0$. Ce qui montre que $f \notin \mathcal{E}(\mathcal{B})$.

LEMME 3. - <u>Si</u> T <u>est une isométrie linéaire surjective</u> : $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, <u>alors il existe deux faces fermées complémentaires</u> F_1 <u>et</u> F_2 <u>de</u> X, <u>et une isométrie linéaire positive surjective</u> $P : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ <u>telle que</u>

$$\forall f \in \mathfrak{A}, \quad \forall x \in F_1, \qquad T(f)(x) = P(f)(x) ,$$

$$\forall f \in \mathfrak{A}, \quad \forall x \in F_2, \qquad T(f)(x) = - P(f)(x) .$$

<u>Démonstration</u>. - T étant linéaire isométrique et surjective, on en déduit que T transforme l'ensemble $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ en lui-même. Par suite $T(\underset{\sim}{1}) \in \mathcal{E}(\mathcal{B})$, et d'après le lemme 2, ceci équivaut à $|T(\underset{\sim}{1})(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathcal{E}(X)$. Si l'on pose

$$F_1 = \{x \ ; \ T(\underset{\sim}{1})(x) = 1\} , \qquad F_2 = \{x \ ; \ T(\underset{\sim}{1})(x) = -1\} ,$$

comme F_1 et F_2 sont les ensembles où la fonction affine continue $T(\underset{\sim}{1})$ prend son maximum et son minimum, ce sont des faces fermées complémentaires. Si on définit P comme indiqué dans le lemme, P est une isométrie linéaire de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}$, et vérifie $P(\underset{\sim}{1}) = \underset{\sim}{1}$. D'après un théorème d'Eilenberg, on peut alors déduire que P est positive.

On utilise ensuite un résultat dû à EDWARDS :

Il existe un homéomorphisme affine de X sur le sous-ensemble

$$\{y \in \mathfrak{A}' \ ; \ y \geqslant 0 , \ \|y\| = y(\underset{\sim}{1}) = 1\} ,$$

continu dans l'espace de Banach $\mathfrak{A}'$, dual topologique de $\mathfrak{A}$, lorsque $\mathfrak{A}'$ est muni de la topologie vague $\sigma(\mathfrak{A}', \mathfrak{A})$.

On désignera par la même lettre, X et son injection dans $\mathfrak{A}'$. On sait de plus que $\mathcal{E}(X) \cup [-\mathcal{E}(X)]$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de $\mathfrak{A}'$, qui sera notée $\mathcal{B}'$.

LEMME 4. - Si P est une isométrie linéaire positive surjective : $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ vérifiant $P(\underset{\sim}{1}) = \underset{\sim}{1}$, alors il existe un homéomorphisme affine $h : X \to X$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in X, \qquad \text{on ait } P(f)(x) = f[h(x)] .$$

Démonstration. - Si P' est le transposé de P , alors P' est une isométrie linéaire positive surjective de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}'$. D'après la caractérisation de X dans $\mathcal{A}'$, on déduit que $P'(X) = X$. Si l'on pose $h = P'/X$, le lemme est démontré.

PROPOSITION 2. - Si T est une isométrie linéaire surjective : $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, alors il existe deux faces fermées complémentaires F_1 et F_2 de X , et un homéomorphisme affine $h : X \to X$, tels que, $\forall f \in \mathcal{A}$,

$$\forall x \in F_1 , \qquad \text{on ait } T(f)(x) = + f[h(x)] ,$$

et

$$\forall x \in F_2 , \qquad \text{on ait } T(f)(x) = - f[h(x)] .$$

Démonstration. - Elle est immédiate, en utilisant les lemmes 3 et 4.

THÉORÈME. - Si $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ est une décomposition de $\mathcal{A}$ en somme directe, alors il existe deux faces fermées complémentaires F_1 et F_2 de X telles que $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}(F_i)$ (pour $i = 1 , 2$).

Démonstration. - Puisque $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, toute fonction f de $\mathcal{A}$ se décompose de manière unique en $f = f_1 + f_2$ où $f_i \in \mathcal{A}_i$. Si on définit l'application T de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ par $T(f) = T(f_1 + f_2) = f_1 - f_2$, T est une isométrie linéaire surjective. Par suite, il existe deux faces fermées complémentaires F_1 et F_2 de X , et un homéomorphisme h de X sur X , tels que

$$\forall f = f_1 + f_2 \in \mathcal{A} , \quad \forall x \in F_1 , \quad T(f)(x) = f_1(x) - f_2(x) = f_1[h(x)] + f_2[h(x)] ,$$

$$\forall x \in F_2 , \quad T(f)(x) = f_1(x) - f_2(x) = - f_1[h(x)] - f_2[h(x)] .$$

Si l'on démontre que, pour tout x de X , on a $h(x) = x$, on pourra en déduire que l'on peut identifier $\mathcal{A}_1$ à $\mathcal{A}(F_1)$, et $\mathcal{A}_2$ à $\mathcal{A}(F_2)$.

Comme h est affine et continue, il suffit de montrer que, $\forall x \in \mathcal{E}(X)$, on a $h(x) = x$. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathcal{E}(X)$ tel que $h(x_0) \neq x_0$. Alors, il existe un voisinage G de x_0 tel que $G \cap h(G) = \emptyset$. Puisque x_0 est un point extrémal de X , les tranches contenant x_0 forment un système fondamental de voisinages de x_0 , par suite on peut prendre G de la forme $G = \{x \in X ; \; g(x) > \alpha\}$, pour une fonction g de $\mathcal{A}$ et un réel α , et l'on peut supposer g positive vérifiant $\|g\| = 1$ et $0 < \alpha < g(x_0) \leqslant \|g\|$. Soit $g = g_1 + g_2$ la décomposition de g où $g_i \in \mathfrak{A}_i$. Comme $\|g\| = \sup(\|g_1\| , \|g_2\|)$, supposons que $\|g_1\| = \|g\| = 1$. D'après le principe du minimum de Bauer, il existe $x_1 \in \mathcal{E}(X)$ tel que $|g_1(x_1)| = 1$. Or

$$|g(x_1)| = |g_1(x_1) + g_2(x_1)| \leqslant 1 \quad ,$$

et

$$|Tg(x_1)| = |g_1(x_1) - g_2(x_1)| \leqslant 1 \quad .$$

Par suite

$$|g_2(x_1)| = 0 \quad ,$$

et donc

$$|g(x_1)| = |g_1(x_1)| = 1 \quad .$$

Puisque g est supposée positive, il en résulte que $g(x_1) = g_1(x_1) = 1$. Par suite, $x_1 \in G$. Or $g[h(x_1)] = Tg(x_1) = g_1(x_1) = 1$, et donc $h(x_1) \in G$. Il en résulte que $G \cap h(G) \neq \emptyset$. Ce qui est en contradiction avec la définition de G . On obtient un résultat analogue en supposant que $\|g\| = \|g_2\| = 1$. On peut donc en déduire que $h(x) = x$ pour tout x appartenant à X , et de plus, $\forall f \in \mathfrak{A}$, $Tf = f \iff f \in \mathfrak{A}_1 \iff f(x) = 0$, $\forall x \in F_2$. Il en résultera donc que $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}(F_1)$. De même $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}(F_2)$. Le théorème est donc démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (H.). - Konvexität in topologischen Vektorraümen. Vorlesung an der Universität Hamburg, 1965.

[2] DIXMIER (Jacques). - Les C^*-algèbres et leurs représentations. - Paris, Gauthier-Villars, 1964 (Cahiers scientifiques, 29).

[3] EDWARDS (David Albert). - On the homeomorphic affine embedding of a locally compact cone into a Banach dual space, Proc. London math. Soc., 3rd Series, t. 14, 1964, p. 399-414.

[4] EDWARDS (David Albert). - Séparation des fonctions réelles définies sur un simplexe de Choquet, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, p. 2798-2800.

[5] EILENBERG (Samuel). - Banach space methods in topology, Annals of Math., Series 2, t. 43, 1942, p. 568-579.

[6] JELLETT (F.). - On the direct sum decomposition of the affine space of a Choquet simplex, Quart. J. of Math., Series 2, t. 18, 1967, p. 233-237.

[7] LAZAR (A. J.). - Affine functions on simplexes (Thèse, Hebrew University, Jerusalem, 1966).