Alain Ancona

Sur une caractérisation des $C(X)$ à X stonien

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. nº 3, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A3_0>

2 décembre 1967

SUR UNE CARACTÉRISATION DES C(X) À X STONIEN

par Alain ANCONA

Introduction. - Soient E un espace normé sur $\underset{\sim}{R}$, φ une forme linéaire continue sur un sous-espace E_1 de E ; une des formes du théorème de Hahn-Banach dit qu'il existe alors une forme linéaire $\tilde{\varphi}$ sur E prolongeant φ, et de même norme que φ. Plus généralement, on peut se proposer de rechercher les espaces normés réels F qui ont la propriété suivante : Pour tout espace normé E, et toute application linéaire continue φ d'un sous-espace de E à valeurs dans F, il existe un prolongement $\tilde{\varphi}$ de φ, linéaire continu sur E (toujours à valeurs dans F), et ayant même norme que φ. De tels espaces normés seront dits de type ∞. D'après le théorème de Hahn-Banach, $\underset{\sim}{R}$ est de type ∞.

Le but de l'exposé est de montrer que tout espace normé de type ∞ est isomorphe à un banach de type $C(X)$ (où X est un compact stonien), et réciproquement. Nous montrerons, grâce à une caractérisation, due à NACHBIN, des espaces de type ∞, l'étroite corrélation entre espaces de type ∞, et espaces ordonnés complètement réticulés possédant une unité.

Les résultats exposés sont dus à divers auteurs, qu'on mentionnera au cours de l'exposé.

Remarque. - Il est clair que si E est un normé de type ∞, E est complet (car E est nécessairement facteur direct dans $\hat{E}$, donc fermé dans $\hat{E}$).

1. Caractérisation de Nachbin de la boule unité des espaces de type ∞.

Définition. - Soient X un ensemble, et $\mathfrak{F}$ une famille de parties de X. On dit que $\mathfrak{F}$ a la propriété d'intersection binaire si, pour toute sous-famille $\mathfrak{F}'$ de $\mathfrak{F}$, telle que deux à deux les éléments de $\mathfrak{F}'$ aient une intersection non vide, l'intersection de tous les éléments de $\mathfrak{F}'$ est non vide.

Voici un moyen simple de fabriquer de telles familles de parties :

PROPOSITION. - *Soit X un espace vectoriel réticulé tel que toute partie majorée (resp. minorée) non vide de X admette une borne supérieure (resp. une borne inférieure). Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des segments de X. Alors $\mathfrak{F}$ a la propriété d'intersection binaire.*

THÉORÈME 1. - Soit E un espace normé sur $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E est de type ∞ ;

(ii) Pour tout normé F , et toute injection linéaire isométrique $j : E \to F$, il existe un projecteur p continu de F sur $j(E)$ avec $\|p\| \leqslant 1$;

(iii) Pour tout normé F et toute injection linéaire isométrique $j : E \to F$, telle que $j(E)$ soit un hyperplan de F , il existe un projecteur continu p de F sur $j(E)$ avec $\|p\| \leqslant 1$;

(iv) $\mathfrak{F}(E)$ a la propriété d'intersection binaire ($\mathfrak{F}(E)$ désigne l'ensemble des boules fermées de E de centre quelconque, et de rayon positif ou nul quelconque).

Démonstration.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) , car $j(E)$, muni de la norme induite par F , est évidemment de type ∞ , d'où un prolongement de l'identité de E à F , c'est-à-dire un projecteur.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) , évidemment.

Montrons que (iii) $\Longrightarrow$ (iv) . Supposons donc que E norme possède la propriété décrite dans (iii). Désignons par $B(a , \rho)$ la boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon ρ positif. Soit $(B(a_i , \rho_i))_{i\in I}$ une famille de boules se rencontrant deux à deux . On va montrer que $\bigcap_{i\in I} B(a_i , \rho_i) \neq \emptyset$. On peut écarter évidemment le cas où l'un des ρ_i est nul. L'idée de la démonstration consiste à plonger E dans $E \times \mathbb{R} = F$, à prolonger la norme de E en une norme sur F qui soit telle que $\|(0 , 1) - (a_i , 0)\| \leqslant \rho_i$ pour tout $i \in I$. Alors, prenant un projecteur p de F sur $E \times \{0\}$ (qui existe d'après (iii)) avec $\|p\| \leqslant 1$, on aura $\|p(0 , 1) - (a_i , 0)\| \leqslant \rho_i$. Donc, on aura alors :

$$p(0 , 1) \in \bigcap_{i\in I} B(a_i , \rho_i) \quad .$$

Nous identifions E à $E \times \{0\}$, et nous posons $e = (0 , 1)$ (dans $E \times \mathbb{R}$).

Posons

$$\begin{cases} \alpha_i = \dfrac{e - a_i}{\rho_i} & \text{(on a supposé } \rho_i \neq e \text{)} , \\ \beta_i = - \alpha_i & . \end{cases}$$

Les α_i sont dans le demi-espace $E \times R_+$, et les β_i dans $E \times \mathbb{R}$, $\alpha_i \notin E$. Désignons par γ_{ij} la trace sur E du segment $[\alpha_i , \beta_j]$.

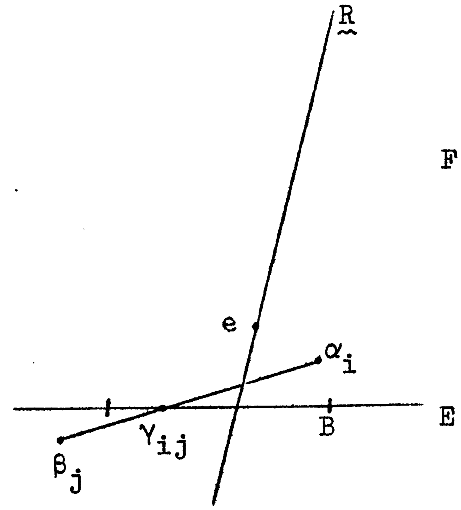
On a donc $\gamma_{ij} = t\alpha_i - (1-t)\alpha_j$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
Or $\gamma_{ij} \in E$,

$$\frac{t}{\rho_i} - (1-t)\frac{1}{\rho_j} = 0 \quad .$$

Soit

$$t = \frac{\rho_i}{\rho_i + \rho_j} , \qquad 1 - t = \frac{\rho_j}{\rho_i + \rho_j} ,$$

$$\gamma_{ij} = -\frac{ta_i}{\rho_i} + (1-t)\frac{a_j}{\rho_j} = \frac{a_j - a_i}{\rho_i + \rho_j} ,$$



et finalement

$$\|\gamma_{ij}\| \leqslant \frac{\|a_i - a_j\|}{\rho_i + \rho_j} \quad .$$

Comme $B(a_i , \rho_i) \cap B(a_j , \rho_j) \neq \emptyset$, on doit avoir $\|a_i - a_j\| \leqslant \rho_i + \rho_j$. Ce qui signifie que les γ_{ij} sont tous dans B (boule unité de E). Il est alors facile d'en déduire que l'enveloppe convexe C de $B \cup \{\alpha_i\}_{i\in I} \cup \{\beta_j\}_{j\in I}$ a pour trace sur E la boule unité B de E .

Munissons $E \times \underset{\sim}{R}$ de la jauge p_e de C . Comme C est symétrique,

$$p_e(-x) = p_e(x) , \qquad \forall\, x \in F \quad ;$$

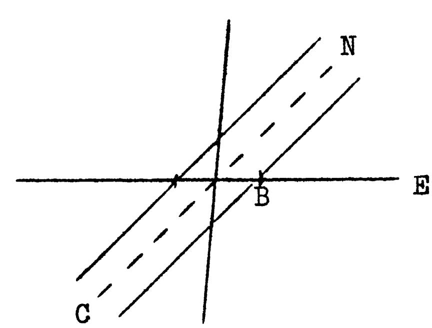
C est absorbant (il est toujours loisible de supposer $I \neq \emptyset$). Donc p_e est une semi-norme sur $\underset{\sim}{E} \times \underset{\sim}{R}$ avec

$$\forall\, x \in E , \qquad p_e(x) = \|x\| \qquad (\text{car } C \cap E = B) \quad .$$

Si p_e n'est pas une norme, alors $N = \{x \mid x \in F , \; p_e(x) = 0\}$ est un sous-espace de F non réduit à zéro, ne rencontrant pas E ailleurs qu'en 0 (hyperplan). Il est alors clair que N est une droite, et que l'on doit avoir

$$C = B + N \quad .$$

Soit q la projection de F sur E "parallèlement" à N : $q(C) = B$. Donc q est un projecteur continu, avec $q(C) \subseteq B$.



Si p_e est une norme, on trouve q en appliquant la propriété (iii). On aura encore : $q(C) \subset B$.

Alors on conclut facilement que :

$$\left(\frac{e - a_i}{\rho_i} \in C\right) \implies \left(\left\|\frac{q(e) - a_i}{\rho_i}\right\| \leqslant 1\right) .$$

D'où

$$q(e) \in \bigcap_{i\in I} B(a_i , \rho_i) .$$

Ceci achève de prouver que (iii) $\implies$ (iv) .

Montrons enfin que (iv) $\implies$ (i) . On suppose donc que $\mathfrak{F}(E)$ ait la propriété d'intersection binaire. Soit $\varphi : F_1 \to E$ une application linéaire continue où F_1 est un sous-espace de l'espace normé F . Soit $\mathfrak{M}$ la famille des couples (ψ , G) , où G est un sous-espace de F , avec $F_1 \subseteq G \subseteq F$ tels que $\psi|_{F_1} = \varphi$, et $\|\psi\| = \|\varphi\|$. On munit $\mathfrak{M}$ de la relation d'ordre $(\psi_1 , G_1) \leqslant (\psi_2 , G_2)$ si, et seulement si, $G_1 \subseteq G_2$ et $\psi_2/G_1 = \psi_1$. Il est clair que $\mathfrak{M}$ est inductif non vide. D'où un couple maximal (ψ_0 , G_0) . On va prouver que $G_0 = F$.

Raisonnons par l'absurde : Supposons que $G_0 \neq F$. Soit e un point de F qui ne soit pas dans $\underset{\sim}{E}$, et supposons $\|e\| = 1$. Soit $G = G_0 + \underset{\sim}{R}e$. Nous cherchons un prolongement linéaire ψ continu de ψ_0 , défini sur G , avec $\|\psi\| = \|\psi_0\|$. Ce qui évidemment contredira la maximalité de $(\underset{\sim}{G}_0 , \psi_0)$.

Soit ψ un prolongement linéaire de ψ_0 , défini sur G (il en existe !). Cherchons la condition à imposer à $\psi(e)$ pour que ψ soit telle que $\|\psi\| = \|\psi_0\|$.

<u>Posons</u> $\alpha = \psi(e)$. On veut que

$$(\forall\ x \in G_0) \quad (\forall\ \lambda \in R) \quad (\|x + \lambda e\| \leqslant 1) \implies (\|\psi_0(x) + \lambda\alpha\| \leqslant \|\psi_0\|)$$

(on peut supposer $\|\psi_0\| \neq 0$).

<u>Posons</u> $\mathfrak{A} = \{(x , \lambda) ;\ x \in G_0 ,\ \lambda > 0 ;\ \|x + \lambda e\| \leqslant 1\}$. La condition devient

$$(\forall\ (x , \lambda) \in \mathfrak{A}) \qquad \|\psi_0(x) + \lambda\alpha\| \leqslant \|\psi_0\| .$$

Soit

$$-\alpha \in B\left(\psi_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) , \frac{\|\psi_0\|}{\lambda}\right) \qquad (\forall\ (x , \lambda) \in \mathfrak{A}) .$$

La condition pour pouvoir prolonger ψ_0 à G , avec la même norme, est donc que

$$\bigcap_{(x,\lambda)\in\mathfrak{A}} B\left(\psi_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) , \frac{\|\psi_0\|}{\lambda}\right) \neq \emptyset .$$

Comme $\mathfrak{F}(E)$ a la propriété d'intersection binaire, il suffit de vérifier que, si $(x_1 , \lambda_1) \in \mathfrak{A}$ et si $(x_2 , \lambda_2) \in \mathfrak{A}$,

$$B(\psi_0(\frac{x_1}{\lambda_1}) , \frac{\|\psi_0\|}{\lambda_1}) \cap B(\psi_0(\frac{x_2}{\lambda_2}) , \frac{\|\psi_0\|}{\lambda_2}) \neq \emptyset \quad .$$

Cette dernière condition n'est autre que

$$\|\psi_0(\frac{x_1}{\lambda_1}) - \psi_0(\frac{x_2}{\lambda_2})\| \leqslant \|\psi_0\| \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) \quad .$$

Vérifions-la :

$$\|\psi_0(\frac{x_1}{\lambda_1}) - \psi_0(\frac{x_2}{\lambda_2})\| \leqslant \|\psi_0\| \ \|\frac{x_1}{\lambda_1} - \frac{x_2}{\lambda_2}\| \leqslant \|\psi_0\| \ (\|\frac{x_1}{\lambda_1} + e\| + \|\frac{x_2}{\lambda_2} + e\|) \quad .$$

Soit

$$\|\psi_0(\frac{x_1}{\lambda_1}) - \psi_0(\frac{x_2}{\lambda_2})\| \leqslant \|\psi_0\| \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) \quad .$$

On peut donc prolonger ψ_0 à G avec la norme, ce qui contredit la maximalité de G_0 . Donc on doit avoir $G = F$. Ce qui montre que E est de type ∞ .

2. Premiers exemples simples d'espaces de type ∞ .

Le théorème 1, ainsi que l'exemple que nous avons donné de familles de parties ayant la propriété d'intersection binaires, montre déjà une vague liaison entre treillis conditionnellement complet et espace de type (∞) .

Soit E un espace de Riesz archimédien ayant une unité e $(e \in E_+)$: c'est-à-dire

$$(\forall\ x \in E_+) \quad (\exists\ n > 0) \qquad x \leqslant ne \quad .$$

On munira E de la jauge du segment $[- e , + e]$ $((- e + C) \cap (e - C))$. Cette jauge est une norme (cela se vérifie aisément). Notons p_e cette norme. On a

$$\begin{cases} p_a(x) = p_a(|x|) \quad , \\ p_a(x \vee y) = p_a(x) \vee p_a(y) \ , \quad \text{pour} \quad x\ , y \in E_+ \end{cases}$$

(E muni de p_e , et de son ordre, est de type M). On vérifie que l'application $x \to |x|$ est uniformément continue, que par conséquent E_+ est fermé ; donc $[- e , + e]$ est fermé dans E ; c'est donc la boule unité de E .

(L'exemple le plus simple de tels espaces normés ordonnés est constitué par les $C(X , \mathbb{R})$ avec X compact, norme de la convergence uniforme, unité la fonction 1 .)

THÉORÈME 2. - Soit E un espace de Riesz archimédien ayant une unité $e \in E_+$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E muni de p_e est de type ∞ ;
(ii) E est complètement réticulé.

Démonstration. - Supposons E_{p_e} de type (∞). Cela signifie, d'après le théorème 1, que la famille

$$\mathfrak{F} = \{[x - \rho e , x + \rho e] ; \quad x \in E , \quad \rho \geqslant 0\}$$

a la propriété d'intersection binaire. Soient H un ensemble filtrant croissant de E, majoré dans E, et M l'ensemble (non vide) des majorants.

Envisageons la famille $\mathfrak{F}'$,

$$\mathfrak{F}' = \{[m - p_e(m - x)e , m] ; \quad m \in M , \quad x \in H\} .$$

Il est clair que $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$. Vérifions que les éléments de $\mathfrak{F}'$ se rencontrent deux à deux : en effet,

$$x_1 \vee x_2 \in [m_1 - p_e(m_1 - x_1)e , m_1] \cap [m_2 - p_e(m_2 - x_2)e , m_2]$$

(vérification facile). On en déduit un élément $\beta_0 \in E$,

$$\beta_0 \in \bigcap_{\substack{m \in M \\ x \in H}} [m - p_e(m - x)e , m] .$$

Il est clair que, $\forall\, m \in M$, $\beta_0 \leqslant m$.

D'autre part, soit $x \in H$, il existe $\rho > 0$ avec $m = x + \rho e \in M$; alors

$$[x , m] \in \mathfrak{F}' \qquad \text{donc} \qquad \beta_0 \in [x , m] \quad \text{et} \quad \beta_0 \geqslant x .$$

β_0 est donc le plus petit majorant de H. Cela prouve que E est complètement réticulé.

Réciproquement, si E est complètement réticulé, il est alors très clair que la famille $\mathfrak{F}(E)$, qui est une famille de segments de E, a la propriété d'intersection binaire. E_{p_e} est donc bien de type ∞.

COROLLAIRE 1. - Pour qu'un espace $C(X)$ (X compact, $C(X)$ muni de la norme uniforme) soit de type ∞, il faut et il suffit que $C(X)$ soit complètement réticulé (pour l'ordre naturel).

COROLLAIRE 2. - Soit X un ensemble (non $\emptyset$). Alors $\mathcal{B}(X)$, l'espace des fonctions numériques bornées dans X, muni de la norme uniforme, est de type ∞.

Le corollaire 2 nous donne déjà des exemples de normés de type ∞ , qui ne sont pas de dimension infinie. Nous allons étudier maintenant les compacts pour lesquels $C(X)$ est complètement réticulé (c'est-à-dire $C(X)$ de type ∞).

3. Compacts stoniens.

Soit X un espace compact. On dit que X est stonien, si l'adhérence de tout ouvert de X est encore un ouvert de X . Il est clair que tout compact stonien est totalement discontinu. La proposition suivante éclaircit la notion de compact stonien.

PROPOSITION 1. - Soit X un espace compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X est stonien ;

(ii) Le treillis des parties ouvertes de X est complètement réticulé, et X est discontinu ;

(iii) $C(X)$ est de type ∞ ;

(iv) $C(X)$ est complètement réticulé.

On a déjà montré l'équivalence de (iii) et (iv).

Nous allons d'abord montrer que (i) $\Longleftrightarrow$ (iv) . Soient X un espace compact, $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions continues sur X , majorées dans $C(X)$. Posons, pour $x \in X$,

$$\varphi(x) = \sup_{i\in I} \varphi_i(x) \quad ,$$

φ est s. c. i. bornée. Soit

$$\psi(x) = \inf\{f(x) \mid f \in C(X) \ , \ f \geqslant f_i \ , \ \forall\, i \in I\} \quad ,$$

ψ est s. c. s. bornée, et $\varphi \leqslant \psi$.

On vérifie **très facilement** que

$$\psi(x) = \limsup_{y\to x} \varphi(y)$$

(toute fonction s. c. s. étant la borne inférieure des fonctions continues qui la majore). Il est aussi très facile de voir que

$$((f_i)_{i\in I} \text{ a une borne supérieure dans } C(X)) \iff (\psi \text{ est continue}) \quad .$$

Ceci étant, vérifions que si X est stonien, alors, nécessairement, ψ est continue ; il suffit de voir que ψ est s. c. i. Soit A réel,

$$\{x \,,\, \psi(x) > A\} = \bigcup_{n\in N} \overline{\{x \mid \varphi(x) > A + \frac{1}{n}\}} \;,$$

φ étant s. c. i., $\{x \mid \varphi(x) > A + \frac{1}{n}\}$ est ouvert, donc son adhérence aussi, et $\{x \,,\, \psi(x) > A\}$ est ouvert. Ce qui prouve que ψ est continue. On a donc montré que (i) $\Longrightarrow$ (iv) .

Réciproquement, supposons $C(X)$ complètement réticulé ; Ω un ouvert de X ; soit φ la fonction caractéristique de Ω ; elle est s. c. i., et

$$\varphi(x) = \sup_{\substack{f\in\mathcal{C}(X)\\ f\geqslant 0\\ f\leqslant\varphi}} f(x) \;.$$

Comme $\mathcal{C}(X)$ est complètement réticulé, la fonction ψ avec

$$\psi(x) = \limsup_{y\to x} \varphi(y)$$

est continue. Cette fonction est la fonction caractéristique de $\overline{\Omega}$. $\overline{\Omega}$ est donc ouvert. X est donc stonien.

Montrons maintenant que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) . Si X est stonien, il est clair que X est totalement discontinu. Soit $\mathfrak{A}(X)$ l'algèbre de Boole des parties à la fois ouvertes et fermées de X . Il est immédiat que $\mathfrak{A}(X)$ est complètement réticulé ; on aura $\sup\limits_{i\in I} \Omega_i = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i}$.

<u>Réciproquement</u>, supposons X totalement discontinu, $\mathfrak{A}(X)$ l'algèbre des parties à la fois ouvertes et fermées de X , et supposons $\mathfrak{A}(X)$ complètement réticulée. Prenons Ω un ouvert de X ; X étant totalement discontinu, Ω est la réunion des parties à la fois ouvertes et fermées qu'il contient. Soit ω la borne supérieure de ces parties dans $\mathfrak{A}(X)$. Il est clair que l'on a $\overline{\Omega} \subset \omega$. D'autre part, si $x_0 \notin \overline{\Omega}$, il existe un voisinage V à la fois ouvert et fermé de x_0 , avec $V \cap \overline{\Omega} = \emptyset$. Mais alors

$$\Omega \subset \complement V \implies \omega \subset \complement V \;.$$

D'où $x_0 \notin \omega$. Enfin, $\overline{\Omega} = \omega$, donc $\overline{\Omega}$ est ouvert, et on a bien démontré que X est stonien.

<u>Remarque</u>. - On peut voir déjà que le compactifié V de Stone-Čech d'un espace discret X est un compact stonien, car $\mathcal{C}(\check{X})$, en tant qu'espace normé ordonné, est isomorphe à $\mathcal{B}(X)$ (espace normé ordonné des fonctions bornées sur X) dont on a déjà vu qu'il est de type ∞ .

Nous allons donner un résultat sur l'abondance des points extrémaux de la boule unité d'un $C(X)$, résultat que nous utiliserons plus loin.

PROPOSITION 2. - Soient X un espace compact, Σ la boule unité du normé $C(X)$. Alors

(Σ est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux)

$\Longleftrightarrow$ (X est totalement discontinu).

(Ceci se démontre en remplaçant Σ par le convexe fermé des fonctions continues à valeurs dans $[0, 1]$, dont les points extrémaux sont les fonctions caractéristiques d'ensembles à la fois ouverts et fermés.)

4. Théorème de représentation des espaces de type ∞ (KELLEY).

THÉORÈME 3. - Soit E un espace normé de type ∞. Alors E est isomorphe à un $C(X)$ où X est stonien (et réciproquement, évidemment).

L'idée de la démonstration est que l'ensemble des points extrémaux de la boule unité du dual de E doit être de la forme $X' \cup (-X')$, X' compact faible, et que l'application canonique $E \to C(X')$ devra être un isomorphisme de normés. On va procéder par étapes.

On désigne par B_0 la boule unité de E', qui est faiblement compact (pour $\sigma(E', E)$), et on désigne par Y l'adhérence faible de l'ensemble des points extrémaux de B_0. B_0 est l'enveloppe convexe fermée de Y, et pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \sup_{x' \in B_0} \langle x, x' \rangle = \sup_{y \in Y} \langle x, y \rangle .$$

On munira Y de la topologie faible.

LEMME 1. - Pour tout ouvert U de Y tel que

$$U \cap (-\overline{U}) = \emptyset ,$$

il existe un ouvert U_0 de Y tel que

$$U_0 \cap -\overline{U_0} = \emptyset , \qquad \overline{U_0} \cup -\overline{U_0} = Y \qquad \text{et} \qquad U \subset U_0 .$$

Soit en effet $\mathfrak{U}$ la famille des ouverts V de Y tels que

$$V \cap -\overline{V} = \emptyset \qquad \text{et} \qquad V \supset U .$$

On ordonne $\mathfrak{U}$ par inclusion. On vérifie que $\mathfrak{U}$ est inductif (vers le haut), car si $(V_i)_{i \in I}$ est une chaîne non vide de $\mathfrak{U}$, posons $V = \bigcup_{i \in I} U_i$, V est ouvert, et

$$V \cap -V = \emptyset ,$$

ce qui implique $V \cap -\overline{V} = \emptyset$. Prenons alors un élément maximal U_0 de $\mathcal{U}$; il faut vérifier que

$$\overline{V_0} \cup -\overline{U_0} = Y \quad .$$

S'il n'en était pas ainsi, on aurait $y_0 \in Y$, $y_0 \notin \overline{V_0} \cup -\overline{U_0}$, d'où un voisinage ouvert v_0 de y_0 avec $v_0 \cap (\overline{U_0} \cup -\overline{U_0}) = \emptyset$. On peut toujours supposer $y_0 \neq 0$, et prendre pour v_0 un ouvert contenu dans un demi-espace. Alors on aurait

$$(U_0 \cup v_0) \cap (-\overline{U_0} \cup -\overline{v_0}) = \emptyset \quad .$$

Ce qui contredirait la maximalité de U_0 . Donc le lemme est démontré.

Cela étant, nous allons montrer le lemme suivant.

LEMME 2. - Soit U_0 un ouvert de Y tel que

$$U_0 \cap -\overline{U_0} = \emptyset \ , \qquad \overline{U_0} \cup -\overline{U_0} = Y \quad .$$

Soit φ l'application canonique $\varphi : E \to C(\overline{U_0})$ ($\varphi(x)$ est la restriction à $\overline{U_0}$ de x , considéré comme forme linéaire sur E'). Alors φ est un isomorphisme d'espaces normés.

Il est très facile de voir que φ est un isomorphisme de E sur un sous-espace de $C(\overline{U_0})$. En effet,

$$\|\varphi(x)\| = \sup_{y'\in\overline{U_0}} |\langle x , y'\rangle| = \sup_{y'\in\overline{U_0}\cup-\overline{U_0}} |\langle x , y'\rangle| = \sup_{y'\in B_0} \langle x , y'\rangle = \|x\| \quad .$$

Comme E est un normé de type ∞ , on en déduit une application ψ linéaire de norme $\leqslant 1$,

$$\psi : C(\overline{U_0}) \to E \ , \qquad \text{avec } \psi \circ \varphi = \mathrm{id}_E \ ;$$

par transposition, on obtient

$$^t\psi : E' \to \mathcal{M}(\overline{U_0}) \quad ,$$

$$^t\varphi : \mathcal{M}(\overline{U_0}) \to E' \quad ,$$

avec $^t\varphi \circ {}^t\psi = \mathrm{id}_{E'}$. On s'assure aisément que $\|^t\varphi\| \leqslant 1$, $\|^t\psi\| \leqslant 1$.

D'autre part, $^t\varphi \circ {}^t\psi = \mathrm{id}_{E'}$ montre que $^t\psi$ est injective, et conserve la norme (sinon, on aurait $x' \in E'$, $\|^t\psi(x')\| < \|x'\|$, et a fortiori $\|^t\varphi\, {}^t\psi(x')\| < \|x'\|$, ce qui est absurde).

Nous considérons maintenant E' , $\mathcal{M}(\overline{U_0})$, munis de leurs topologies faibles $(\sigma(E', E)$, $\sigma(\mathcal{M}(\overline{U_0}), \mathcal{C}(\overline{U_0})))$. Il est clair que ${}^t\varphi$, ${}^t\psi$ sont continues pour ces topologies. Nous allons montrer que ${}^t\psi(B_0)$ est la boule unité de $\mathcal{M}(\overline{U_0})$. Notons Σ cette boule-unité. On sait que

$$\begin{cases} {}^t\psi(B_0) \subset \Sigma \ , \\ {}^t\varphi(\Sigma) = B_0 \ . \end{cases}$$

Pour cela, nous allons montrer que tout point extrémal de Σ est dans ${}^t\psi(B_0)$. Un tel point extrémal est de la forme ε_{u_0} ou $-\varepsilon_{+u_0}$ avec $u_0 \in \overline{U_0}$. Supposons d'abord $u_0 \in U_0$, envisageons

$$({}^t\varphi)^{-1}({}^t\varphi(\varepsilon_{u_0})) \cap \Sigma = ({}^t\varphi)^{-u}(u_0) \cap \Sigma \quad ,$$

c'est une face fermée de Σ , donc enveloppe convexe fermée des points extrémaux de Σ qu'elle contient. Cherchons les points extrémaux de Σ qui sont sur cette face:

On voit aisément que :

- S'il est de la forme ε_u , alors $u = u_0$ $({}^t\varphi(\varepsilon_u) = u)$,
- S'il est de la forme $-\varepsilon_u$, alors $-u = u_0$ avec $u \in \overline{U_0}$.

Or ceci est impossible, car $-\overline{U_0} \cap U_0 = \emptyset$ par hypothèse. Ainsi on a prouvé : $\forall\, u_0 \in U_0$,

$$({}^t\varphi)^{-1}(u_0) \cap \Sigma = \{\varepsilon_{u_0}\} \quad .$$

Cela montre en particulier que si $u_0 \in U_0$, alors

$${}^t\psi(u_0) \in {}^t\varphi^{-1}(u_0) \cap \Sigma \ , \qquad \text{donc} \qquad {}^t\psi(u_0) = \varepsilon_{u_0} \quad ,$$

mais ${}^t\psi$ étant continue pour $(\sigma(E', E)$, $\sigma(\mathcal{M}(\overline{U_0}), \mathcal{C}(\overline{U_0})))$.

On voit par passage à la limite que

$${}^t\psi(u) = \varepsilon_u \ , \qquad \forall\, u \in U_0 \quad .$$

Il s'ensuit que ${}^t\psi(B_0)$ est convexe compact, inclus dans Σ , et contenant tous les points extrémaux de Σ . Il s'ensuit que ${}^t\psi(B_0) = \Sigma$. Donc ${}^t\psi$ est en fait un isomorphisme de normés, dont ${}^t\varphi$ est l'isomorphisme réciproque.

Il est facile alors de voir que φ est surjective, et que par conséquent

$\varphi : E \to C(\overline{U_0})$ est un isomorphisme de normés. Cela montre alors que $C(\overline{U_0})$ est de type ∞, donc d'après un résultat antérieur que $\overline{U_0}$ est stonien. Ce qui achève la démonstration du théorème de Kelley.

On peut déduire du théorème de Kelley une représentation des espaces complètement réticulés ayant une unité.

PROPOSITION 3. - Soit E complètement réticulé ayant une unité e. Il existe alors un isomorphisme d'espaces ordonnés $\varphi : E \to C(X)$ où X est stonien, avec $\varphi(e) = 1_X$.

Munissons E de la norme p_e, jauge de $[-e, +e]$. On a vu que E est de type ∞, puisque complètement réticulé. Il est clair que E' n'est autre que l'espace des formes relativement bornées sur E. Posons

$$B_+^0 = \{\ell \in E'_+ , \ \ell(e) = 1\} .$$

Il est clair que B_+^0 est convexe faiblement compact de la boule unité de E'.

Montrons que tout point extrémal ℓ de la boule unité B_0 est dans $B_+^0 \cup - B_+^0$; supposons, en effet, que ℓ ne soit, ni dans B_0^+, ni dans $-B_0^+$. On aurait

$$\ell = \ell_+ - \ell_- , \qquad |\ell| = \ell_+ + \ell_- .$$

Il est clair que

$$\|\ell_+\| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant e} \ell(x) = \ell_+(e) ,$$

$$\|\ell_-\| = \inf_{0 \leqslant x \leqslant e} \ell(x) = \ell_-(e) ,$$

comme $\ell \notin B_+^0 \cup - B_+^0$. On voit que $\ell_+(e) \neq 0$, $\ell_-(e) \neq 0$. Alors

$$\ell = \ell_+(e)\left(\frac{\ell_+}{\ell_+(e)}\right) + \ell_-(e)\left(-\frac{\ell_-}{\ell_-(e)}\right) ,$$

et

$$\ell_+(e) + \ell_-(e) = |\ell|(e) = \|\ell\| = 1 .$$

Ce qui montre que ℓ est non extrémal.

Soit Y l'adhérence faible de l'ensemble des points extrémaux de B_0, posons $U_0 = Y \cap B_0^+$ (U_0 à la fois ouvert et fermé dans Y). Il est clair que

$$U_0 \cap (-\overline{U_0}) = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \overline{U_0} \cup -\overline{U_0} = Y .$$

On est dans les conditions du lemme 1. D'où

$$\varphi : \quad E \rightarrow \mathcal{C}(\overline{U_0}) = \mathcal{C}(U_0)$$

isomorphisme de normé avec U_0 stonien.

Vérifions que φ est un isomorphisme pour l'ordre. Si $x \in E_+$, et $\ell \in U_0$, on a évidemment $\langle x , \ell \rangle \geqslant 0$,

$$\varphi(E_+) \subset \mathcal{C}_+(U_0) \quad .$$

Réciproquement, si $\langle x , \ell \rangle \geqslant 0$, $\forall \ell \in U_0$, alors, on a (B_0^+ étant l'enveloppe convexe fermée de U_0)

$$\langle x , \ell \rangle \geqslant 0 , \qquad \forall \ell \in B_0^+ ,$$

et finalement

$$\langle x , e \rangle \geqslant 0 , \qquad \forall \ell \in E'_+ \quad .$$

Comme E_+ est fermé, on sait qu'alors $x \in E_+$. D'autre part,

$$\varphi(e)(\ell) = \langle e , \ell \rangle = \ell(e) = 1 , \qquad \forall \ell \in U_0 \quad .$$

φ est donc un isomorphisme pour l'<u>ordre,</u> avec $\varphi(e) = 1_{U_0}$. Ce qui établit la proposition.

Nous terminons l'exposé en donnant un théorème de Nachbin, donnant une classe de convexes fermés bornés qui sont enveloppes convexes fermées de leurs points extrémaux.

THÉORÈME 4 (NACHBIN). - *Soient* E *un espace localement convexe séparé,* F *un convexe fermé borné de* E *. On suppose que la famille*

$$\mathcal{F} = \{x + \lambda F \ ; \quad x \in E , \quad \lambda > 0\}$$

a la propriété d'intersection binaire. Alors F *est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.*

On montre d'abord que F admet un centre de symétrie : en effet,

$$\forall x , y \in F , \qquad \frac{x + y}{2} \in \frac{x + F}{2} \cap \frac{y + F}{2} \quad .$$

Donc la famille $\left(\frac{x + F}{2}\right)_{x \in F}$ a ses éléments qui se rencontrent deux à deux.

On en déduit que, la famille $\{a + \lambda F \ ; \ a \in E , \ \lambda > 0\}$ ayant la propriété d'intersection binaire,

$$\alpha \in \bigcap_{a \in F} \frac{a + F}{2} \quad .$$

On vérifie alors que α est un centre de symétrie (α est unique, car F est linéairement borné). On peut donc se ramener au cas où F est centré en zéro. Soit E_F l'espace engendré par F muni de la jauge de F. L'injection canonique $\varphi : E_F \to E$ est continue. La boule unité de E_F est F. Donc E_F est de type ∞ ; sa boule unité F est enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux, et la continuité de la fonction linéaire φ montre que F est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux dans l'espace E.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARONSZAJN (N.) and PANITCHPAKDI (P.). - Extension of uniformity continuous transformations and hyperconvexe metric spaces, Pacific J. of Math., t. 6, 1956, p. 405-439.

[2] HASUMI (Morisuke). - The extension property of complex Banach spaces, Tôhoku math. J., t. 10, 1958, p. 135-142.

[3] KELLEY (J. L.). - Banach spaces with the extension property, Trans. Amer. math. Soc., t. 72, 1952, p. 323-326.

Pour avoir une vue générale des divers problèmes d'extensions, de factorisations, d'applications linéaires, on lira utilement les quelques pages de l'exposé de NACHBIN au Symposium sur les espaces linéaires :

[4] NACHBIN (Leopoldo). - Some problems in extending and lifting continuous linear transformations, Proceedings of the International symposium on linear spaces [1960. Jérusalem], p. 340-350. - Jérusalem, Jerusalem Academic Press ; Oxford, New York, Pergamon Press, 1961.