SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

MARC ROGAISKI

# Étude du quotient d'un simplexe par une face fermée et application à un théorème de Alfsen ; quotient par une relation d'équivalence

*Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel*, tome 12 (1967-1968), exp. nº 2, p. 1-25

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A2_0>

30 novembre 1967

# ÉTUDE DU QUOTIENT D'UN SIMPLEXE PAR UNE FACE FERMÉE ET APPLICATION À UN THÉORÈME DE ALFSEN ; QUOTIENT PAR UNE RELATION D'ÉQUIVALENCE

par Marc ROGALSKI

## 1. Définitions et notations.

Soient $X$ un simplexe de Choquet [4], et $F$ une face fermée de $X$, distincte de $X$, et non vide [1]. On appelle $\mathcal{E}(X)$ l'ensemble des points extrémaux de $X$. On note $A(X)$ l'espace des fonctions affines continues sur $X$, et $A_F(X)$ le sous-espace de $A(X)$ formé des fonctions nulles sur $F$.

$A'_F$ (resp. $A'$) désignera le dual topologique de $A_F$ (resp. $A$) muni de la topologie faible $\sigma(A'_F, A_F)$ (resp. $\sigma(A', A)$). On peut toujours supposer que $X$ est plongé dans $A'$, c'est-à-dire que toute fonction affine continue sur $X$ est la restriction d'une fonction affine continue sur un espace localement convexe séparé "ambiant".

Soit $Y = \{\ell \in A'_F \mid \ell \geqslant 0 \text{ sur } A_F^+, \text{ et } \|\ell\| \leqslant 1\}$.

On trouvera dans [9] le résultat suivant :

PROPOSITION 1. - $A_F(X)$ est un espace simplicial, qui est isomorphe canoniquement, pour l'ordre naturel et la norme (isométrie), à l'espace $A_{\{0\}}(Y)$ des fonctions affines continues sur $Y$, nulles en $0$. De plus, $Y$ est un simplexe, et c'est un chapeau universel de $A'^+_F$, car la norme $N$ sur $A'_F$ est affine semi-continue inférieurement sur $A'^+_F$.

DÉFINITION 2. - On appellera quotient du simplexe $X$ par la face $F$ le simplexe $Y$, et on notera : $Y = X/F$.

Nous allons étudier l'espace $A_F$ et le quotient $X/F$, de façon "fonctionnelle", ce qui nous permettra de montrer l'existence d'une face $F'$ de $X$, "supplémentaire" de $F$, en ce sens que ce sera la plus grande face disjointe de $F$, et que $X$ sera l'enveloppe convexe de $F \cup F'$ : $X = \text{conv}[F \cup F']$. Nous retrouverons et améliorerons ainsi un résultat qu'ALFSEN démontrait de façon toute géométrique dans [2], et nous étudierons de plus la "nature borélienne" de la décomposition de $X$ suivant $F$ et $F'$. Enfin, nous caractériserons le cas où $F'$ est fermé et le cas où $A_F$ est réticulé. (Pour l'étude géométrique de la décomposition d'un simplexe, cf. aussi [7].)

Nous avons placé à la fin du texte, un appendice sur les fonctions convexes semi-continues sur un convexe compact ; il contient des résultats dont nous nous servirons. Un 2e appendice énonce des propriétés des fonctions boréliennes de "quasi-première classe" (cf. définition 18). Un 3e appendice donne un lemme utile.

Nous rappelons les propriétés suivantes ([9] , [3]) :

LEMME 3. - Le "col de $Y$ ", c'est-à-dire l'ensemble $L(Y) = \{\ell \in Y \mid \|\ell\| = 1\}$ est une face de $Y$ , et $\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}[L(Y)] \cup \{0\}$ . L'ensemble $\mathcal{E}(Y) \setminus \{0\}$ , c'est-à-dire $\mathcal{E}[L(Y)]$ , est la frontière de Choquet de l'ensemble $A_F^+$ de fonctions continues sur $Y$ .

## 2. L'application canonique de $X$ sur son quotient, et la fonction-quotient de $F$.

DÉFINITION 4.

(a) On pose, $\forall\ x \in X$ , $\forall\ f \in A_F$ : $\delta_x(f) = f(x)$ . L'application $x \to \delta_x$ de $X$ dans $A_F'$ est affine continue, et bien sûr $\delta(X) \subset Y$ .

(b) Soit $1_{CF}$ la fonction caractéristique du complémentaire de $F$ . On pose :

$$\varphi(x) = \check{1}_{CF}(x) = \sup_{\substack{h \in A(X) \\ h \leq 1_{CF}}} h(x) \qquad \text{(cf. [4])}.$$

La fonction $\varphi$ s'appelle la fonction-quotient de $F$ . Elle est affine semi-continue inférieurement, comprise entre $0$ et $1$ (cf. [4], [9], et appendice I (K) ).

PROPOSITION 5. - L'application $\delta$ est affine continue surjective sur $Y$ , et vérifie :

$$\delta^{-1}(0) = F .$$

En effet, $\delta(X)$ est un convexe compact inclus dans $Y$ . Or, si $f \in A_F^+$ ,

$$\|f\| = \sup_{\ell \in Y} f(\ell) = \sup_{x \in X} f(x) = \sup_{x \in X} f(\delta_x) = \sup f[\delta(X)] .$$

Donc $\delta(X)$ est un fermé maximisant pour $A_F^+$ . Donc $\delta(X)$ contient la frontière de Choquet $\mathcal{E}(Y) \setminus \{0\}$ de $A_F^+$ . Or $\delta(X) \supset \delta(F) = \{0\}$ . Donc $\delta(X) \supset \mathcal{E}(Y)$ . Donc $\delta(X) = Y$ .

L'égalité $\delta(F) = 0$ est bien claire. Mais on sait que si $x \in X \setminus F$ , $\exists\ f \in A(X)$ avec $f \equiv 0$ sur $F$ , et $f(x) = 1$ (cf. [9]). Donc $\delta_x \neq 0$ si $x \in X \setminus F$ , et $x \notin \delta^{-1}(0)$ .

C. Q. F. D.

PROPOSITION 6. - Si $\varphi$ est la fonction-quotient de $F$, on a exactement :

$$F = \varphi^{-1}(0) .$$

De plus, $\varphi$ est identique à $1$ sur $\mathcal{E}(X) \setminus F$.

D'abord, puisque $1_{CF}$ est semi-continue inférieurement, $\varphi \equiv 1_{CF}$ sur $\mathcal{E}(X)$ (appendice I (H)). Donc $\varphi \equiv 1$ sur $\mathcal{E}(X) \setminus F$. $\varphi \equiv 0$ sur $F$, car $0 \leqslant \varphi \leqslant 1_{CF}$. Mais si $x \notin F$, on sait qu'il existe $h \in A(X)$, avec $h \equiv 0$ sur $F$, $h(x) > 0$ et $h \leqslant 1$ (cf. [9]). Donc $\varphi \geqslant h$, et $\varphi(x) > 0$, donc $x \notin \varphi^{-1}(0)$.

C. Q. F. D.

DÉFINITION 7. - La face $F' = \varphi^{-1}(1)$ est appelée face supplémentaire de $F$. C'est un $G_\delta$ de $X$ (intersection dénombrable d'ouverts convexes), et

$$\mathcal{E}(F') = \mathcal{E}(X) \setminus F .$$

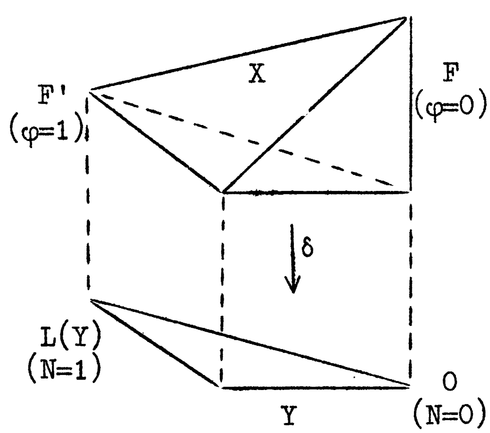
$F'$ est un $G_\delta$, car

$$F' = \bigcap_{n \geq 1} \varphi^{-1}\left(\left]1 - \frac{1}{n}, +\infty\right[\right) ,$$

et $\varphi$ est semi-continue inférieurement.

PROPOSITION 8. - Soit $N$ la norme sur $A'_F$. Alors :

$$\varphi = N \circ \delta , \quad \text{et} \quad F' = \delta^{-1}[L(Y)] .$$




$\psi = N \circ \delta$ est affine semi-continue inférieurement sur $X$, et $\psi = 0$ sur $F$.

Si $x \in \mathcal{E}(X) \setminus F$, on sait (cf. [9]) qu'il existe $h \in A_F^+$, $0 \leqslant h \leqslant 1$, telle que $h(x) = 1$. Donc

$$N(\delta_x) = 1 , \quad \text{et} \quad \delta_x \in L(Y) .$$

Donc $N \circ \delta = \psi$ est identique à $1$ sur $\mathcal{E}(X) \setminus F$. Donc $\varphi = \psi$ sur $\mathcal{E}(X)$. Comme $\varphi$ et $\psi$ sont affines semi-continues sur $X$, $\psi \equiv \varphi$ sur $X$ (cf. appendice I (B)).

L'égalité $F' = \delta^{-1}[L(Y)]$ est alors évidente.

C. Q. F. D.

REMARQUE 9. - L'égalité $\varphi = \psi$ résulte aussi de l'égalité :

$$N(\ell) = \sup_{\substack{0 \leq f \leq 1 \\ f=0 \text{ sur } F}} \ell(f) \quad \text{pour } \ell \in A_F'^{+} \qquad \text{(cf. [9]).}$$

Pour montrer que $\delta$ induit un isomorphisme de $F'$ sur $L(Y)$, il faut d'abord montrer que $\delta_{|F'}$ est injective. Pour cela, nous allons établir une propriété de séparation de l'espace $A_F(X)$.

## 3. Quelques propriétés de séparation de l'espace $A_F(X)$.

LEMME 10. - Soient $x$ et $y \in X$, et supposons qu'il existe $f \in A(X)$ telle que

$$|f(x) - f(y)| > \text{oscillation de } f \text{ sur } F = \sup_F f - \inf_F f .$$

Alors il existe $h \in A_F(X)$ telle que $h(x) \neq h(y)$.

Si l'oscillation de $f$ sur $F$ est nulle, $h = f + \lambda$, $\lambda$ constante convenable, convient. Sinon, soit $g = f - \inf_F f$, et soit $\omega$ l'oscillation de $f$ sur $F$. Posons :

$g_1 = g \times 1_{CF}$, concave semi-continue inférieurement ;
$g_2 = (g - \omega)1_{CF}$, convexe semi-continue supérieurement.

$g_2 \leq g_1$, donc d'après un théorème d'Edwards (cf. [5], [9]), il existe $h \in A(X)$, telle que $g_2 \leq h \leq g_1$. Donc $h = 0$ sur $F$, c'est-à-dire $h \in A_F$. De plus, si par exemple $f(x) - f(y) > \omega > 0$, alors,

$$g(x) \geq h(x) \geq g(x) - \omega > g(y) \geq h(y) .$$

Donc $h(x) > h(y)$.

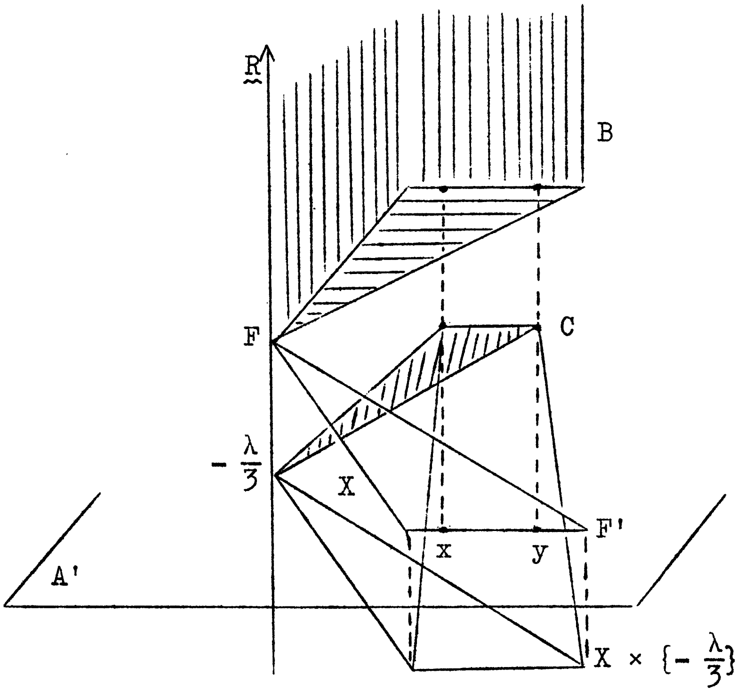
C. Q. F. D.

THÉORÈME 11. - Pour tous $x$, $y \in F'$, tels que $x \neq y$, $\exists\, h \in A_F(X)$ telle que $h(x) \neq h(y)$.

Puisque $x \neq y$, $\exists\, f \in A(X)$, telle que $f > 0$, et $|f(x) - f(y)| = \lambda > 0$. Soit $g = f \times 1_{CF}$, concave semi-continue inférieurement. Alors $\check{g} = \sup_{\substack{h \in A(X) \\ h \leq g}} h$ est affine semi-continue inférieurement, nulle sur $F$ (cf. appendice I (K)) et positive ou nulle.

Dans $X \times \mathbb{R} \subset A' \times \mathbb{R}$, soit $B = \{(u , \lambda) \mid \lambda \geq \check{g}(u)\}$, convexe fermé.

Soit $C = \text{conv}[X \times \{-\frac{\lambda}{3}\} \cup \{(x , \check{g}(x) - \frac{\lambda}{6})\} \cup \{(y , \check{g}(y) - \frac{\lambda}{6})\}$, convexe compact,




disjoint de $B$ . Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $h_0$ fonction affine continue sur $X$ séparant $B$ et $C$ en ce sens que :

$$-\frac{\lambda}{3} < h_0 < 0 \quad \text{sur} \quad F ,$$

et

$$|h_0(x) - \check{g}(x)| < \frac{\lambda}{6} ,$$

$$|h_0(y) - \check{g}(y)| < \frac{\lambda}{6} .$$

Or, si $u \in X$ , $\check{g}(u) = \mu_u(g)$ , où $\mu_u$ est la mesure maximale de barycentre $u$ (cf. appendice I (K)). Si $u \in F'$ , $\mu_u(F) = 0$, car $F \cap F' = \emptyset$ . Donc $\mu_u(g) = \mu_u(f)$ puisque $g = f$ sur $\complement F$ . Or $f \in A(X)$ . Donc $\mu_u(f) = f(u)$ . D'où, sur $F'$ , $\check{g} = f$ . C'est le cas, en particulier, en $x$ et $y$ . Comme $|f(x) - f(y)| = \lambda$ , on en conclut que

$$|h_0(x) - h_0(y)| > \lambda - \frac{2\lambda}{6} = \frac{2\lambda}{3} .$$

Or, l'oscillation de $h_0$ sur $F$ est plus petite que $\frac{\lambda}{3}$ .

Donc, il existe $h_0 \in A(X)$ telle que $|h_0(x) - h_0(y)| >$ oscillation de $h_0$ sur $F$ . D'après le lemme 10, il existe donc $h \in A_F(X)$ telle que $h(x) \neq h(y)$ .

C. Q. F. D.

## 4. La décomposition de $X$ en faces supplémentaires.

THÉORÈME 12. - La restriction de $\delta$ à $F'$ est un isomorphisme affine topologique de $F'$ sur $L(Y)$ , et $\delta[\mathcal{E}(X) \setminus F] = \mathcal{E}(Y) \setminus \{0\}$ .

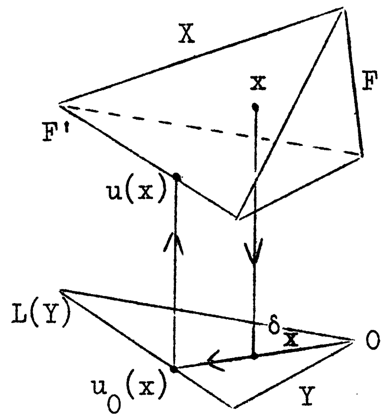
On sait que $\delta$ est affine continue surjective. D'après le théorème 11, $\delta$ est injective sur $F'$ . Soit $K$ un fermé de $F'$ . Alors $K = F' \cap K'$ , où $K'$ est un compact de $X$ . Le fait que $\delta$ soit bijective sur $F'$ , et que $F' = \delta^{-1}[L(Y)]$ , implique que

$$\delta(K) = \delta(F') \cap \delta(K') = L(Y) \cap \delta(K') .$$

C'est donc un fermé de $L(Y)$ , car $\delta(K')$ est compact. Donc $\delta$ est bicontinue.

Il résulte de ceci que $\delta[\mathcal{E}(X) \setminus F] = \mathcal{E}(Y) \setminus \{0\}$ .

C. Q. F. D.




DÉFINITION 13. - Si $x \in X \setminus F$ , on appellera $u(x)$ l'unique point $y$ de $X$ tel que

$$\delta_y = \frac{\delta_x}{\varphi(x)} = \frac{\delta_x}{N(\delta_x)} .$$

Le point $u(x)$ appartient à $F'$ . On posera :

$$u_0(x) = \frac{\delta_x}{N(\delta_x)} \in L(Y) .$$

LEMME 14. - Soit $f \in A(X)$ . Alors, si $x \in X \setminus F$ :

$$f = 0 \text{ sur } F \text{ et } f[u(x)] \geq 0 \iff f = 0 \text{ sur } F \text{ et } f(x) \geq 0 .$$

Si $f \in A_F(X)$ , notons $\tilde{f}$ la même fonction considérée comme fonction sur $Y$ .

Alors, les deux membres de l'équivalence ci-dessus s'écrivent aussi :

$$\tilde{f}[u_0(x)] \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{f}(\delta_x) \geq 0 ,$$

et ces deux relations sont bien équivalentes.

PROPOSITION 15. - Si $x \in X \setminus F$ , $x$ appartient à l'enveloppe convexe de $F \cup \{u(x)\}$

L'ensemble $\mathrm{conv}[F \cup \{u(x)\}]$ étant compact, il suffit de montrer que $\forall f \in A(X)$ :

$$f \geq 0 \text{ sur } F \text{ et } f[u(x)] \geq 0 \implies f(x) \geq 0 .$$

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $f \in A(X)$ , $f \geq 0$ sur $F$ , $f[u(x)] \geq 0$ , et $f(x) < 0$ . On peut toujours supposer que $f[u(x)] > 0$ .

Soit $g = f \times 1_{CF}$ , concave semi-continue inférieurement. On a

$$g(x) < 0 , \qquad \text{et} \qquad g[u(x)] > 0 .$$

On sait que $\check{g} = 0$ sur $F$ , que $\check{g}$ est affine semi-continue inférieurement (cf. appendice I (K)). Le même raisonnement que celui figurant dans la démonstration du théorème 11 prouve que $\check{g} = g$ sur $F'$ ; donc $\check{g}[u(x)] > 0$ . Or $\check{g}(x) \leq g(x) < 0$ . Soit $\varepsilon$ , avec $0 < \varepsilon < \check{g}[u(x)]$ . Il existe $h_0 \in A(X)$ , telle que

$$h_0 \leq \check{g} , \qquad \text{et} \qquad h_0[u(x)] > \check{g}[u(x)] - \varepsilon > 0 .$$

Soit $h_1 = h_0 \times 1_{\complement F}$ , convexe semi-continue supérieurement. Alors $h_1 \leqslant \check{g}$ . D'après le théorème d'Edwards, il existe $h \in A(X)$ telle que $h_1 \leqslant h \leqslant \check{g}$ . Donc $h = 0$ sur $F$ , $h[u(x)] \geqslant 0$ , et $h(x) < 0$ , ce qui est impossible d'après le lemme 14.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 16. - Si $F$ est une face fermée d'un simplexe $X$ , la face $F'$ supplémentaire de $F$ est la plus grande face disjointe de $F$ . Pour tout $x \in X \setminus (F \cup F')$ il existe une décomposition et une seule :

$$x = \lambda\, u(x) + (1 - \lambda)\, v(x) \ , \quad \lambda \in \left]0 \, , 1\right[ \ , \quad u(x) \in F' \ , \quad v(x) \in F \ ,$$

et alors $\lambda = \varphi(x)$ , où $\varphi = \check{1}_{\complement F}$ est affine semi-continue inférieurement.

D'après la proposition 15, $x \in \operatorname{conv}[F \cup \{u(x)\}]$ , donc il existe $v \in F$ et $\lambda \in \left]0 \, , 1\right[$ tels que

$$x = \lambda\, u(x) + (1 - \lambda) v \quad (\lambda \neq 0 \text{ et } 1 \text{ car } x \notin F \cup F') .$$

De plus,

$$\varphi(x) = \lambda \varphi[u(x)] + (1 - \lambda)\, \varphi(v) = \lambda .$$

Supposons inversement que $x$ s'écrive $x = \lambda u + (1 - \lambda) v$ . Alors $\lambda = \varphi(x)$ . Donc

$$\delta_u = \frac{\delta_x}{\varphi(x)} = \frac{\delta_x}{N(\delta_x)} = u_0(x) \in L(Y) .$$

Donc, d'après le théorème 12, il existe un seul $u$ répondant à cette condition, c'est $u(x)$ . Donc $v = v(x)$ est aussi unique.

Montrons maintenant que $F'$ est la plus grande face disjointe de $F$ . Soit $G$ une face disjointe de $F$ , et soit $x \in G$ . On a : $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$ , $y \in F$ , $z \in F'$ . Si $\lambda \neq 0$ , $y \in F \cap G$ , ce qui est impossible. Donc $\lambda = 0$ , et $x = z \in F'$. Donc $G \subset F'$ .

C. Q. F. D.

Donnons quelques compléments géométriques :

PROPOSITION 17.

(a) Pour tout $x \in X \setminus F$ , on a :

$$\{u(x)\} = \bigcap_{\substack{f \in A_F \\ f(x) = 0}} f^{-1}(0) \cap F' .$$

(b) Pour tout $x \in X \setminus F$, on a :

$$\operatorname{conv}[F \cup \{u(x)\}] = \delta^{-1}[\operatorname{segment}(0\ ,\ \delta_{u(x)})]\ .$$

(c) Pour tout $x \in X \setminus F$, l'ensemble $\operatorname{conv}[F \cup \{u(x)\}]$ est l'intersection de $X$ par l'espace vectoriel engendré par $x$ et $F$, et aussi par l'espace vectoriel fermé engendré par $x$ et $F$ (ceci, dans $A'(X)$).

(d) Si $x \in X \setminus F$, $v(x)$ est le seul point $y$ de $F$ tel que $\mu_y$ soit proportionnel à $\mu_x|_F$.

Les points (a), (b) et (c) ne présentent aucune difficulté. Le point (d) non plus, si on remarque que $\mu_{u(x)}(1_{\complement F}) = 1$.

5. Le caractère borélien de la décomposition de $X$.

DÉFINITION 18. - Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une application. On dit que $f$ est borélienne de "quasi 1re classe" si, pour tout $O$ ouvert de $Y$, on a :

$$f^{-1}(O) = \bigcup_n (O_n \cap F_n)$$

où, $\forall n$, $O_n$ est un ouvert de $X$ et $F_n$ un fermé de $X$. Si tout ouvert de $X$ est un $F_\sigma$ (par exemple si $X$ est métrisable), alors une fonction de quasi 1re classe est de 1re classe ($f^{-1}(O) = F_\sigma$).

Toute fonction numérique semi-continue sur un espace topologique est de quasi 1re classe.

Si on compose une fonction de quasi 1re classe (à gauche ou à droite) avec une fonction continue, on obtient une fonction de quasi 1re classe.

On trouvera dans l'appendice II des résultats sur les fonctions de quasi 1re classe qui nous serviront dans la suite.

THÉORÈME 19. - Soient $X$ un simplexe, et $F$ une face fermée de $X$, $F \neq X$.

(a) La face supplémentaire $F'$ est un $G_\delta$, et $\varphi$ est semi-continue inférieurement ;

(b) L'application $x \to u(x)$ est borélienne de quasi 1re classe sur $X \setminus F$.

(a) résulte des définitions 4 et 7.

(b) Il suffit de montrer que l'application $x \to \frac{x}{N(x)}$ de $Y \setminus \{0\}$ dans $L(Y)$

est de quasi 1re classe, car $u \to \delta_u$ est continue, et $x \to \delta^{-1}(x)$ est continue de $L(Y)$ dans $F'$.

Or $x \to \frac{x}{N(x)}$ est la composée des applications :

$$x \to \left(x , \frac{1}{N(x)}\right) : Y \setminus \{0\} \to (Y \setminus \{0\}) \times \underset{\approx}{R}$$

et

$$(u , \lambda) \to \lambda u : A'_F \times \underset{\approx}{R} \to A'_F .$$

Cette dernière étant continue, le théorème résulte de l'énoncé (N) de l'appendice II (il résulte aussi plus directement de l'énoncé (O)).

C. Q. F. D.

THÉORÈME 20. - Si la face $F$ de $X$ est métrisable, l'application $x \to v(x)$ de $X \setminus F'$ dans $F$ est borélienne de quasi-première classe.

Si $F$ est métrisable, il existe un sous-ensemble dénombrable de $A(X)$ qui sépare les points de $F$ : $(f_n)_{n\in \underset{\approx}{N}}$.

Soit $\Psi : X \setminus F' \to \underset{\approx}{R}^{\underset{\approx}{N}} = \prod_n \underset{\approx}{R}_n$ (où $\underset{\approx}{R}_n = \underset{\approx}{R}$) l'application définie par $\Psi(x) = (f_n(x))_{n\in \underset{\approx}{N}}$. Alors $\Psi|_F$ est un homéomorphisme de $F$ sur $\Psi(F)$.

Soit $\theta_1^n : X \setminus F \cup F' \to \underset{\approx}{R}_n$ définie par

$$\theta_1^n(x) = \frac{f_n(x)}{1 - \varphi(x)} - \frac{\varphi(x) \times f_n[u(x)]}{1 - \varphi(x)} .$$

D'après les énoncés (M) et (O) de l'appendice II, $\theta_1^n$ est de quasi 1re classe. Donc $\theta_1 : X \setminus F \cup F' \to \underset{\approx}{R}^{\underset{\approx}{N}}$ définie par $\theta_1(x) = (f_n[v(x)])_{n\in \underset{\approx}{N}}$ est de quasi 1re classe (appendice II (R)).

L'application $\theta_2 : F \to \underset{\approx}{R}^{\underset{\approx}{N}}$, définie par $\theta_2(x) = (f_n(x))_{n\in \underset{\approx}{N}}$, est continue, donc de quasi 1re classe. Donc, d'après l'énoncé (Q) de l'appendice II, l'application $\theta = \theta_1 \cup \theta_2 : X \setminus F' \to \underset{\approx}{R}^{\underset{\approx}{N}}$, définie en fait par $\theta(x) = (f_n[v(x)])_{n\in \underset{\approx}{N}}$, est de quasi 1re classe. Comme $\theta(X \setminus F') \subset \Psi(F)$, il en est de même de $\theta$ considérée comme application de $X \setminus F'$ dans $\Psi(F)$.

Comme $\Psi^{-1} : \Psi(F) \to F$ est continue, $v = \Psi^{-1} \circ \theta$ est de quasi 1re classe de $X \setminus F'$ dans $F$.

C. Q. F. D.

REMARQUE 21. - Si $F$ n'est pas métrisable, on ignore si l'application $v$ est borélienne.

## 6. Etude du cas où $F'$ est fermée et du cas où $A_F(X)$ est réticulé.

THÉORÈME 22. - Soient $X$ un simplexe, $F$ une face fermée de $X$, et $F'$ la face supplémentaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $F'$ est fermée ;

(b) Si $B_F^+$ est la partie $\geq 0$ de la boule unité de $A_F(X)$, $\sup B_F^+$ existe dans $A_F(X)$ ;

(c) La fonction-quotient $\varphi$ de $F$ est continue ;

(d) Il existe $h \in A(X)$, $1 \geq h \geq 0$, telle que $h = 0$ sur $F$ et $h = 1$ sur $F'$ ;

(e) $u$ est continue sur $X \setminus F$ ;

(f) $A_F(X)$ possède dans $A(X)$ un espace supplémentaire $H$ tel que, si $f \in A(X)$ s'écrit $f = g + h$, $g \in A_F(X)$, $h \in H$, alors

$$\|f\| = \sup(\|g\|, \|h\|) .$$

Si ces conditions sont vérifiées, alors :

1° La face supplémentaire de $F'$ est $F$ ;

2° $v$ est continue sur $X \setminus F'$ ;

3° L'espace $A(X)$ est somme directe topologique de $A_F(X)$ et $A_{F'}(X)$ ;

4° $\sup B_F^+ = \varphi$ .

(b) $\Longrightarrow$ (d) : Si $h = \sup B_F^+$, $h = 0$ sur $F$, et $h = \varphi = \check{1}_{CF}$, donc $h = 1$ sur $F'$, et $0 \leq h \leq 1$, $h \in A(X)$.

(d) $\Longrightarrow$ (c) : Si $h$ vérifie (d), $h \equiv \varphi$, car $h = \varphi$ sur $\mathcal{E}(X)$. Donc $\varphi$ est continue.

(c) $\Longrightarrow$ (e) : Si $\varphi$ est continue et $\neq 0$, $x \to u(x) = \delta^{-1}[\frac{\delta(x)}{\varphi(x)}]$ est continue.

(e) $\Longrightarrow$ (a) ; Si $u$ est continue, $F' = \{x \in X \setminus F \mid u(x) = x\}$ est un fermé de $X \setminus F$. Donc $\overline{F'} \setminus (F \cup F') = \emptyset$. Si $\exists\, x \in \overline{F'} \setminus F'$, $x \in F$. Soit $y \in F'$. Alors $\frac{x+y}{2} \in X \setminus (F \cup F')$. Mais $\overline{F'}$ étant convexe, $\frac{x+y}{2} \in \overline{F'} \setminus (F \cup F')$ qui est vide, ce qui est absurde. Donc $\overline{F'} = F'$.

(a) $\Longrightarrow$ (f) : Soit $H = A_{F'}(X)$. Pour toutes $g \in A_F(X)$ et $h \in A_{F'}(X)$, $g + h \in A(X)$, et $\|g + h\|$ est atteint en un point $x_0 \in \mathcal{E}(X) \subset F \cup F'$, donc c'est évidemment $\sup(\|g\|, \|h\|)$.

Inversement, soit $f \in A(X)$ . Il existe $g \in A_F(X)$ et $h \in A_{F'}(X)$ , uniques, telles que $f = g + h$ . En effet, d'une part $g = 0$ sur $F$ et $g = f$ sur $F'$ , d'autre part $h = 0$ sur $F'$ et $h = f$ sur $F$ , sont des conditions nécessaires pour $g$ et $h$ . Or, si $\alpha$ et $\beta$ sont deux fonctions affines continues définies respectivement sur $F$ et $F'$ , le théorème d'Edwards [5] montre immédiatement l'existence d'une fonction $\gamma \in A(X)$ telle que $\gamma = \alpha$ sur $F$ et $\gamma = \beta$ sur $F'$ . Cette fonction est unique, car deux telles fonctions coïncideraient sur $\mathcal{E}(X) \subset F \cup F'$ D'où :

$$A(X) = A_F(X) \oplus A_{F'}(X) .$$

(f) $\Longrightarrow$ (b) : D'après l'hypothèse, $1 = g_0 + h_0$ , $g_0 \in A_F(X)$ , $h_0 \in H$ . Si en un point, $g_0$ (ou $h_0$ ) est $> 1$ , alors $\|1\| > 1$ , ce qui est absurde. Si en un point, $g_0$ (ou $h_0$ ) est $< 0$ , alors $h_0$ (ou $g_0$ ) est $> 1$ en ce point, ce qui est absurde.

Donc $0 \leq g_0 \leq 1$ , et $0 \leq h_0 \leq 1$ .

Notons $B_A^+$ , $B_F^+$ et $B_H^+$ les parties positives des boules unités de $A(X)$ , $A_F(X)$ et $H$ . Nous venons de montrer que $1 \in B_F^+ + B_H^+$ .

D'après l'hypothèse, $B_F^+ + B_H^+ \subset B_A^+$ , et $\sup\limits_{f \in B_A^+} f = 1$ . Donc

$$\sup_{f \in B_A^+} f = 1 = \sup_{\substack{g \in B_F^+ \\ h \in B_H^+}} (g + h) \leq \sup_{g \in B_F^+} g + \sup_{h \in B_H^+} h = \varphi + \psi .$$

Or $\sup\limits_{g \in B_F^+} g = \varphi$ est nulle sur $F$ , et affine (car $B_F^+$ est filtrante croissante). Si $\varphi$ est continue, $\varphi \in A_F(X)$ , et $\sup B_F^+$ existe dans $A_F(X)$ . Montrons donc que $\varphi$ est continue. Soit $\varepsilon > 0$ , et soit $x \in X$ . Il existe $g \in B_F^+$ et $h \in B_H^+$ telles que :

$$\varphi(x) \leq g(x) + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \psi(x) \leq h(x) + \varepsilon \quad (\psi = \sup_{h \in B_H^+} h) .$$

Donc

$$\varphi(x) + \psi(x) \leq g(x) + h(x) + 2\varepsilon \leq \|g + h\| + 2\varepsilon = \sup(\|g\| , \|h\|) + 2\varepsilon \leq 1 + 2\varepsilon .$$

Comme ceci a lieu $\forall\ \varepsilon > 0$ , et $\forall\ x \in X$ , on a :

$$1 \leq \varphi + \psi \leq 1 .$$

Donc $\varphi + \psi = 1$ , et $\varphi$ et $\psi$ sont continues, car elles sont semi-continues inférieurement par définition.

Donc, les propriétés (a), ..., (f) sont bien équivalentes. Supposons-les vérifiées. Alors, clairement, $\sup B_F^+ = \varphi$, et la face supplémentaire de $F'$ est $F$, donc $v$ est continue sur $X \setminus F'$.

Enfin, $A(X) = A_F(X) \oplus A_{F'}(X)$ résulte de la démonstration de (a) $\Longrightarrow$ (f). Si, de plus, $f \in A(X)$ s'écrit $g + h$, $g \in A_F(X)$, $h \in A_{F'}(X)$, alors

$$\|f\| = \sup(\|g\| , \|h\|) .$$

C. Q. F. D.

Exemple. - Si on prend $X = M_1^+([0 , 1])$, et $F = M_1^+([0 , \frac{1}{2}])$, on voit tout de suite que $F' = \{\mu \in X \mid \mu(]\frac{1}{2} , 1]) = 1\}$. $F'$ n'est pas fermée pour la topologie vague. La fonction-quotient $\varphi$ est la fonction $\mu \to \mu(1_{]\frac{1}{2},1]})$, qui est bien affine semi-continue inférieurement.

REMARQUE 23. - L'hypothèse que $v$ est continue sur $X \setminus F'$ n'est pas équivalente aux précédentes. On le voit facilement dans le cas où $F$ est réduite à un point extrémal.

THÉORÈME 24. - Les propositions suivantes sont équivalentes :

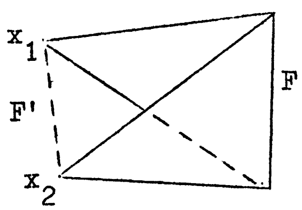
(a) $A_F(X)$ est réticulé pour son ordre propre ;

(b) L'ensemble $\bigcup_{x \in \mathcal{E}(X) \setminus F} \mathrm{conv}[F \cup \{x\}]$ est fermé.

Si ces assertions sont vérifiées, alors $\mathcal{E}(X) \setminus F$ est un fermé de $F'$.

On sait (cf. [8]) que (a) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}(A_F'^{+})$ fermé $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}(A_F'^{+}) \cap Y = \Gamma$ fermé. Or $\Gamma = \bigcup_{y \in \mathcal{E}(Y) \setminus \{0\}} \mathrm{conv}[\{y\} \cup \{0\}]$. $\Gamma$ fermé $\Longleftrightarrow$ $\delta^{-1}(\Gamma)$ fermé, et on a :

$$\delta^{-1}(\Gamma) = \bigcup_{x \in \mathcal{E}(X) \setminus F} \mathrm{conv}[F \cup \{x\}] .$$




D'où l'équivalence annoncée.

De plus, alors, $\mathcal{E}(X) \setminus F = \delta^{-1}(\mathcal{E}(Y) \setminus \{0\})$ est fermé dans $F'$.

C. Q. F. D.

Ce théorème étend aux faces fermées une proposition de [9] sur les points extrémaux.

PROPOSITION 25. - Les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) $A_F(X)$ est un M-espace de Kakutani à élément unité (cf. [9]) ;

(b) $F'$ est un simplexe compact de Bauer (c'est-à-dire avec $\mathcal{E}(F')$ fermé) ;

(c) $\mathcal{E}(X) \setminus F$ est compact.

Cela résulte facilement de propositions qu'on trouvera dans [9], [3].

Donnons, en plus, quelques propriétés de stabilité par passage au quotient.

PROPOSITION 26. -

(a) Si $X$ est un simplexe de Bauer (c'est-à-dire tel que $\mathcal{E}(X)$ soit fermé), et si $F$ est une face fermée de $X$, $X/F$ est un simplexe de Bauer.

(b) Si $X$ est un simplexe métrisable, $X/F$ est métrisable.

(c) Si $\mathcal{E}(X)$ est un $K_\sigma$ (réunion dénombrable de compacts), $\mathcal{E}(X/F)$ est aussi un $K_\sigma$.

[Pour l'intérêt de cette propriété de stabilité, voir [10].]

La démonstration de cette proposition ne présente aucune difficulté. On voit en particulier, pour le (a), que si $\mathcal{E}(X) = K$ et $\mathcal{E}(F) = H$, $X/F$ est isomorphe à $M_1^+(K/H)$, où $K/H$ est l'espace compact quotient de $K$ obtenu en identifiant les points de $H$.

## 7. Propriété universelle du quotient.

THÉORÈME 26. - Soient $X$ un simplexe, $F$ une face fermée de $X$, et $\delta$ l'application canonique de $X$ sur le quotient $Y = X/F$. Alors, pour tout simplexe $Z$, et toute application affine continue $\psi : X \to Z$, constante sur $F$, il existe $\tilde{\psi} : Y \to Z$, affine continue, unique, telle que $\psi = \tilde{\psi} \circ \delta$.

De plus, si $Y'$ est un autre simplexe, et $\delta'$ une application affine continue surjective de $X$ sur $Y'$, tels que le couple $(Y', \delta')$ ait la même propriété universelle que le couple $(Y, \delta)$, alors $Y'$ est affinement isomorphe à $Y$.

(a) Unicité du quotient. - Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, shift left, "\tilde{\delta}'"] \\ X \arrow[ur, "\delta"] \arrow[dr, "\delta'"'] & \\ & Y' \arrow[u, shift left, "\tilde{\delta}"] \end{tikzcd}$$

On a : $\tilde{\delta}' \circ \delta = \delta'$ et $\tilde{\delta} \circ \delta' = \delta$. D'où :

$$(\tilde{\delta} \circ \tilde{\delta}') \circ \delta = \delta \qquad \text{et} \qquad (\tilde{\delta}' \circ \tilde{\delta}) \circ \delta' = \delta' .$$

Comme $\delta$ et $\delta'$ sont surjectives, on en deduit que

$$\tilde{\delta} \circ \tilde{\delta}' = \mathrm{Id}_Y \qquad \text{et} \qquad \tilde{\delta}' \circ \tilde{\delta} = \mathrm{Id}_{Y'} \; .$$

(b) <u>Propriété universelle du quotient</u>. - Pour toute $f \in A(Z)$ ,

$$f \circ \psi \in A_F(X) \oplus \underset{\approx}{R} = H = A(H_1'^{+}) \xrightarrow{\sim} A(Y) \; ,$$

où $A(H_1'^{+}) = \{\ell \in H' \mid \ell \geq 0 \text{ et } \|\ell\| = 1\}$ .

Soit $\psi^* : A(Z) \to A(H_1'^{+})$ définie par $\psi^*(f) = f \circ \psi$ . Soit $m \in H_1'^{+}$ . Alors $m \circ \psi^* : A(Z) \to \underset{\approx}{R}$ est définie par : $(m \circ \psi^*)(f) = [f \circ \psi](m)$ . Si $f \equiv 1$ , $(f \circ \psi)(m) = 1$ . Si $f \geq 0$ , $(f \circ \psi)(m) \geq 0$ . Donc

$$m \circ \psi^* \in A(Z)_1'^{+} = \{\ell \in A(Z)' \mid \ell \geq 0 \text{ et } \|\ell\| = 1\} \; .$$

Or $A(Z)_1'^{+} \xrightarrow{\sim} Z$ . Donc $\exists\, z_m \in Z$ , unique, tel que $\forall f \in A(Z)$ , $f(z_m) = (m \circ \psi^*)(f)$. Dire que $m \to z_m$ est continue équivaut à dire que $m \to f(z_m)$ est continue $\forall f \in A(Z)$ . Or $f(z_m) = (m \circ \psi^*)(f) = (f \circ \psi)(m)$ est bien continue, car $f \circ \psi \in H$ et $m \in H_1'^{+}$ .

Notons $\psi'$ l'application $m \to z_m$ de $H_1'^{+}$ dans $Z$ . Cette application $\psi'$ est donc continue, et il est clair qu'elle est affine, et que :

$$\forall m \in H_1'^{+} , \; \forall f \in A(Z) : \; f[\psi'(m)] = (f \circ \psi)(m) \; .$$

Or $H_1'^{+}$ est isomorphe à $Y$ . Soit $\theta : Y \to H_1'^{+}$ cet isomorphisme. Il est défini sur $y = \delta_x \in Y$ par $\theta(y)(f) = f(x)$ si $f \in H$ .

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\psi"'] & Y \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\tilde{\psi}"] & H_1'^{+} \arrow[dl, "\psi'"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Posons $\tilde{\psi} = \psi' \circ \theta : Y \to Z$ . Cette application est affine continue, et si $y = \delta_x$ , $x \in X$ , on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ \delta(x) &= \psi'[\text{l'application } f \to \theta(y)(f)] \qquad (f \in H) \; . \\ &= \psi'[\text{l'application } f \to f(x)] \end{aligned}$$

Si $h \in A(Z)$ ,

$$\begin{aligned} [\tilde{\psi} \circ \delta(x)](h) &= \{\psi'[\text{l'application } f \to f(x)]\}(h) \\ &= (h \circ \psi)[\text{l'application } f \to f(x)] = h \circ \psi(x) \; . \end{aligned}$$

Donc $h[\tilde{\psi} \circ \delta(x)] = h[\psi(x)]$ , $\forall h \in A(Z)$ . Donc $\tilde{\psi} \circ \delta(x) = \psi(x)$ , et ceci $\forall x \in X$. Donc $\tilde{\psi} \circ \delta = \psi$ . L'unicité de $\tilde{\psi}$ résulte du fait que $\delta$ est surjective.

C. Q. F. D.

Nous allons utiliser la définition du quotient comme solution d'un problème universel pour démontrer un résultat sur les quotients par deux faces pris successivement.

LEMME 28. - Soit $X$ un simplexe. Tout convexe compact $B \subset X$, tel que

$$\mathcal{E}(B) \subset \mathcal{E}(X) ,$$

est une face de $X$ (et donc est un simplexe).

Ce lemme est dû à MOKOBODZKI. En voici une démonstration, inspirée d'une technique d'EDWARDS.

Nous allons montrer que $\widehat{1_B}$ est affine. On a

$$\widehat{1_B} = \inf \{f \mid f \in A(X) , \ f > 1_B\} .$$

Montrons que cet ensemble $\mathfrak{F}$ est filtrant décroissant. Pour cela, nous allons appliquer le lemme de l'appendice III, en prenant $H = A(X)$ et $Z = \mathcal{E}(X)$. Vérifions les conditions de ce lemme.

Si $h_1$, $h_2 \in A(X)$, $\sup H_{h_1,h_2} = \widehat{\inf(h_1 , h_2)}$, qui coïncide avec $\inf(h_1 , h_2)$ sur $\mathcal{E}(X)$ (cf. appendice I-(K)).

De plus, $f = 1_B$ est bien semi-continue supérieurement.

Enfin, $\widehat{\inf(h_1 , h_2)} - 1_B$ atteint son minimum sur $X$, soit sur $B$, c'est alors sur $\mathcal{E}(B)$, donc sur $\mathcal{E}(X)$, soit sur $X \setminus B$, et c'est alors celui que $\inf(h_1,h_2)$ atteint sur $\mathcal{E}(X)$.

Donc $\widehat{1_B} = \inf \mathfrak{F}$ est affine. Alors, puisque $\widehat{1_B} \leq 1$, et puisque $\widehat{1_B}$ vaut $1$ sur $B$, $\widehat{1_B}^{-1}(1) = F$ est une face fermée de $X$ contenant $B$. Supposons qu'on puisse trouver un point $x$ de $\mathcal{E}(F)$ n'appartenant pas à $B$. Alors $x \in \mathcal{E}(X)$, et $\widehat{1_B}(x) = 1_B(x) = 0$, ce qui est absurde, puisque $x \in F$. Donc $\mathcal{E}(F) \subset B$, et $F = B$ est donc une face.

C. Q. F. D.

LEMME 29. - Soient $X$ un simplexe et $F$ une face de $X$, et soit $\delta$ l'application canonique de $X$ sur $X/F$. Alors l'image par $\delta$ de toute face fermée de $X$ est une face de $X/F$, et toute face de $X/F$ a pour image réciproque par $\delta$ une face de $X$.

Cela résulte immédiatement du théorème 12 et du lemme précédent (en fait, on peut le démontrer, sans le lemme 28, en utilisant le théorème 16).

PROPOSITION 30. - Soit $X$ un simplexe, et soient $F_1$ et $F_2$ deux faces fermées de $X$. Soit $\delta_i$ l'application canonique de $X$ sur son quotient $X/F_i$, $i = 1, 2$.

(a) <u>Si</u> $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ , <u>il existe un isomorphisme canonique</u>

$$(X/F_1)/\delta_1(F_2) \xrightarrow{\sim} X/\mathrm{conv}(F_1 \cup F_2) .$$

(b) <u>Dans tous les cas,</u> $(X/F_1)/\delta_1(F_2)$ <u>et</u> $(X/F_2)/\delta_2(F_1)$ <u>sont isomorphes, et sont solutions du problème universel relatif aux applications constantes sur</u> $F_1$ <u>et sur</u> $F_2$ .

$$\begin{tikzcd} & X/F_1 \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dd, bend left, "\delta'"] & \\ X \arrow[ur, "\delta_1"] \arrow[r, "\varphi \circ \delta_1"] \arrow[dr, "\delta"'] & Y & \\ & X/\mathrm{conv}(F_1 \cup F_2) \arrow[u, "\varphi'"] & \end{tikzcd}$$

(a) Soit $\delta$ l'application canonique de $X$ sur $X/\mathrm{conv}(F_1 \cup F_2)$ . Puisque $\delta$ est constante sur $F_1$ , elle se factorise au moyen d'une application affine continue $\delta' : X/F_1 \longrightarrow X/\mathrm{conv}(F_1 \cup F_2)$ , et $\delta'$ est surjective : $\delta = \delta' \circ \delta_1$ ;

Soit alors $Y$ un simplexe, et soit $\varphi : X/F_1 \to Y$, affine continue, constante sur $\delta_1(F_2)$ . Alors

$$\varphi \circ \delta_1 : X \longrightarrow Y$$

est affine continue et constante sur $F_1$ et $F_2$ , donc sur $\mathrm{conv}(F_1 \cup F_2)$ , puisque $F_1 \cup F_2 \neq \emptyset$ . Donc $\varphi \circ \delta_1$ se factorise au moyen d'une application

$$\varphi' : X/\mathrm{conv}(F_1 \cup F_2) \longrightarrow Y : \varphi' \circ \delta = \varphi \circ \delta_1 .$$

D'où l'on déduit : $\varphi' \circ \delta' \circ \delta_1 = \varphi \circ \delta_1$ , et , puisque $\delta_1$ est surjective,

$$\varphi' \circ \delta' = \varphi .$$

De plus, $\varphi'$ est la seule application de $X/\mathrm{conv}(F_1 \cup F_2)$ à avoir cette propriété, car $\delta'$ est surjective. D'après le théorème 16, $X/\mathrm{conv}(F_1 \cup F_2)$ est donc canoniquement isomorphe à $(X/F_1)/\delta_1(F_2)$ .

On voit facilement, au moyen d'un exemple de $R^2$ , que $(X/F_1)/\delta_1(F_2)$ et $X/\mathrm{conv}(F_1 \cup F_2)$ ne sont pas en général isomorphes si $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ . On peut même montrer qu'ils sont toujours différents (car il existe $f \in A(X)$ telle que $f \equiv 0$ sur $F_1$ et $f \equiv 1$ sur $F_2$ , cf. [9] ).

$$\begin{tikzcd} & X/F_1 \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\delta'"] & \\ X \arrow[ur, "\delta_1"] \arrow[r, "\varphi\delta_1"] \arrow[dr, "\delta_2"] \arrow[ddr, "f"'] & Y & (X/F_2)/\delta_2(F_1) \arrow[l, "\varphi'"'] \arrow[ddl, "f'"] \\ & X/F_2 \arrow[u, "\varphi_1"] \arrow[ur, "\delta_1"] \arrow[d, "f'_2"] & \\ & Z & \end{tikzcd}$$

(b) Un raisonnement tout à fait analogue, utilisant le diagramme ci-contre prouve l'isomorphisme de $(X/F_1)/\delta_1(F_2)$ et de $(X/F_2)/\delta_2(F_1)$ dans le cas général, et le fait que ces simplexes sont solutions du problème universel pour les applications constantes sur $F_1$ et sur $F_2$ .

C. Q. F. D.

En particulier, si $F_1 \subset F_2$ , on voit qu'il existe $\delta_{F_2F_1} : X/F_1 \longrightarrow X/F_2$ affine continue surjective, et que si $F_1 \subset F_2 \subset F_3$ , on a $\delta_{F_3F_1} = \delta_{F_3F_2} \circ \delta_{F_2F_1}$ .

Si on se donne alors une famille $\mathfrak{F}$ de faces fermées de X , on voit que :

- si $\mathfrak{F}$ est filtrante décroissante, $(X/F \quad \delta_{FF'})_{\mathfrak{F}}$ est un <u>système projectif</u> de simplexes ;
- si $\mathfrak{F}$ est filtrante croissante, $(X/F \quad \delta_{FF'})_{\mathfrak{F}}$ est un <u>système inductif</u> de simplexes.

Nous allons voir, dans le 2e cas, qu'on peut parfois déterminer la limite inductive. Donnons pour cela une définition.

DÉFINITION 31. - <u>Soient</u> X <u>un convexe compact, et</u> B <u>un convexe compact inclus dans</u> X . <u>Nous noterons</u> $\Phi(B)$ <u>la face fermée engendrée par</u> B <u>dans</u> X .

<u>On dira que</u> B <u>est épais si la condition suivante est satisfaite</u> :

(E) <u>Soit</u> $f \in A(X)$ , <u>alors</u>

$$\{f = \text{Cte} \ \underline{\text{sur}} \ B\} \Longrightarrow \{f = \text{Cte} \ \underline{\text{sur}} \ \Phi(B)\} .$$

On voit tout de suite que cette condition équivaut à la suivante :

(E') <u>Pour tout simplexe</u> Y , <u>et toute application affine continue</u> $f : X \longrightarrow Y$ , <u>on a</u>

$$\{f = \text{Cte} \ \underline{\text{sur}} \ B\} \Longrightarrow \{f = \text{Cte} \ \underline{\text{sur}} \ \Phi(B)\} .$$

PROPOSITION 32. - <u>Soit</u> X <u>un simplexe, et soit</u> $\mathfrak{F}$ <u>une famille filtrante croissante de faces fermées non vides de</u> X . <u>On suppose que l'ensemble</u> $\overline{\bigcup_{F\in\mathfrak{F}} F}$ <u>est épais dans</u> X . <u>Alors le système inductif de simplexes</u> $(X/F \quad \delta_{FF'})_{\mathfrak{F}}$ <u>a pour limite inductive</u> $X/\Phi(\overline{\bigcup_{F\in\mathfrak{F}} F})$ .

Il est en effet facile de voir que le problème universel de la limite inductive est, ici, le problème universel des applications constantes sur $\bigcup_{F\in\mathfrak{F}} F$ .

## 8. Quotient d'un simplexe par une relation d'équivalence.

Essayons de généraliser le problème du quotient à une famille de faces quelconques. Et pour bien voir de quoi il s'agit, partons d'une application surjective de X sur ce que serait un tel quotient Y .

PROPOSITION 33. - <u>Soient</u> X <u>un simplexe, et</u> $\varphi$ <u>une application affine continue surjective de</u> X <u>sur un simplexe</u> Y , <u>telle que</u> $\varphi[\mathcal{E}(X)] \subset \mathcal{E}(Y)$ (<u>on dira que</u> Y <u>est image directe de</u> X ). <u>Soit</u> H <u>l'espace des</u> $h \circ \varphi$ , <u>pour</u> $h \in A(Y)$ . <u>Pour tout</u> $y \in \mathcal{E}(Y)$ , <u>on pose</u> $F_y = \varphi^{-1}(\{y\})$ .

(a) Alors chaque $F_y$ est une face fermée de $X$. Les $F_y$ sont disjointes 2 à 2, et $\mathcal{E}(X) = \bigcup_{y \in \mathcal{E}(Y)} \mathcal{E}(F_y)$. Le sous-espace $H$ de $A(X)$ est exactement l'espace des fonctions $f$ de $A(X)$ constantes sur chaque $F_y$. De plus, $H$ est isomorphe à $A(Y)$. Enfin, $H$ vérifie le lemme de Riesz, sépare les $F_y$, et vérifie

$$H_{F_y} = H^+_{F_y} - H^+_{F_y}$$

(où $H_{F_y}$ est l'ensemble des fonctions de $H$ nulles sur $F_y$).

(b) $(Y, \varphi)$ est la solution du problème universel pour les applications affines continues de $X$ dans les simplexes, constantes sur chaque $F_y$.

(a) La première partie de ce point est facile si on remarque que $\varphi[\mathcal{E}(X)] = \mathcal{E}(Y)$. Le fait que $H$ soit exactement l'espace $\{f \in A(X) \mid f = \text{Cte} \text{ sur chaque } F_y\}$ provient de résultats de EDWARDS et VINCENT-SMITH (cf. [6]). La dernière partie de (a) n'est que le transport à $H$ de propriétés bien connues de $A(Y)$ (cf. [5], [9]).

(b) Soit $Z$ un simplexe, et soit $f : X \longrightarrow Z$, constante sur chaque $F_y$. Nous allons définir $f' : Y \longrightarrow Z$ telle que $f' \circ \varphi = f$ ( $f'$ sera unique, puisque est surjective).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, "h"] & \\
& Z \arrow[r, "g"'] & R
\end{tikzcd}$$

Soit $a \in Y$, et soit $u \in \varphi^{-1}(a)$. On pose $f'(a) = f(u)$. Montrons que ceci ne dépend pas du choix de $u$ dans $\varphi^{-1}(a)$. Soit $v \in \varphi^{-1}(a)$.

Soit $g \in A(Z)$ ; la fonction $g \circ f$ est constante sur chaque $F_y$, donc $g \circ f \in H$, d'après le (a). Donc il existe $h \in A(Y)$ telle que $g \circ f = h \circ \varphi$. On a alors :

$$g \circ f(u) = h \circ \varphi(u) = h(a) = h \circ \varphi(v) = g \circ f(v) .$$

Donc $g[f(u)] = g[f(v)]$, $\forall\, g \in A(Z)$. Donc $f(u) = f(v)$, et $f'$ est bien définie.

L'affinité de $f'$ est évidente, sa continuité se démontre en montrant, comme ci-dessus, que si $a_i \longrightarrow a$, $g[f(a_i)] \longrightarrow g[f(a)]$, $\forall\, g \in A(Z)$. Enfin, on a bien $f = f' \circ \varphi$, par construction.

C. Q. F. D.

Inversement, nous dirons que la donnée d'une famille $(F_i)$, de faces fermées disjointes 2 à 2, d'un simplexe $X$, telle que $\mathcal{E}(X) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{E}(F_i)$, est une relation d'équivalence $R$ sur $X$.

L'idée est d'étudier le sous-espace $H^R$ de $A(X)$ formé des fonctions constantes sur chaque $F_i$. Si $H^R$ est isomorphe à $A(Y)$, où $Y$ est un simplexe, on a envie de dire que $Y$ est le quotient de $X$ par $R$ : $Y = X/R$.

Mais il n'en sera pas ainsi en général, et il faudra ajouter des condistions, par exemple l'hypothèse que $H^R$ vérifie le lemme de Riesz. Et même alors, il se pourrait que $X/R$ soit le simplexe réduit à un point, alors qu'on désirerait qu'il existe une bijection de $I$ sur $\mathcal{E}(Y)$ telle que

$$\varphi^{-1}(y_i) = F_i\ ,\quad \forall\, i \in I \quad (\varphi : X \longrightarrow X/R)\ .$$

Exemple. - Soit $X = M_1^+([0\ ,\ 1])$. Soit $p_n$ le n-ième nombre premier supérieur ou égal à 2, et soit $A_n = \{\frac{1}{p_n}, \frac{2}{p_n}, \dots, \frac{p_n - 1}{p_n}\}$. Considérant $[0\ ,\ 1]$ comme plongé dans $X$, soit $F_n = \operatorname{conv}(A_n)$. C'est une face fermée de $X$. Il est clair que, si $n \neq p$, on a $F_n \cap F_p = \emptyset$. Si $e \in [0\ ,\ 1] \setminus \bigcup_n A_n$, soit $\{e\}$ la face de $X$ réduite au point extrémal $e$. La famille de faces formée des $F_n$ et des $\{e\}$ est une relation d'équivalence sur $X$. Or, par un raisonnement d'uniforme continuité, on voit immédiatement que toute fonction de $H^R$ est constante, donc que $X/R$ est le simplexe réduit à un point.

DÉFINITION 34. - Nous dirons qu'une relation d'équivalence $R = (F_i)_{i\in I}$ sur un simplexe $X$ est simpliciale si l'espace $H^R$ associé est tel que :

(a) $H^R$ vérifie le lemme de Riesz,

(b) $H^R$ sépare les faces $F_i$ ;

(c) Pour tout $i \in I$, $H^R_{F_i} = (H^R_{F_i})^+ - (H^R_{F_i})^+$ (d'après (b), $H^R_{F_i} \neq \{0\}$.

THÉORÈME 35. - Soient $X$ un simplexe, et $R$ une relation d'équivalence simpliciale sur $X$. Alors il existe un simplexe $Y$, et une application affine continue surjective $\varphi : X \longrightarrow Y$, tels que :

(a) $H^R = \{f \in A(X) \mid f = h \circ \varphi,\ h \in A(Y)\}$,

(b) Il existe une bijection $I \longrightarrow \mathcal{E}(Y) : i \rightarrow y_i$ telle que $\varphi^{-1}(y_i) = F_i$,

(c) Le couple $(Y\ ,\ \varphi)$ est solution du problème universel pour les applications de $X$ dans les simplexes, affines continues et constantes sur chaque $F_i$.

$Y$ s'appelle le quotient de $X$ par $R$, et se note $X/R$.

D'abord, puisque $H^R$ vérifie le lemme de Riesz, $H^R = A(Y)$, où $Y = H_1^{R'+}$ (c'est-à-dire $Y = \{\ell \in H^{R'} \mid \ell \geqslant 0$ et $\|\ell\| = 1\}$). Donc l'application $\varphi : x \rightarrow \delta_x$ envoie $X$ dans $Y$ (car $\ell \in H^R$), et est affine continue (pour $\sigma(H^{R'}, H^R)$).

$\varphi(X)$ est un convexe compact $\subset Y$.

Or, soit $f \in H^R$. Dire que $f$ est $\geq 0$ sur $X$, revient à dire qu'en tant qu'élément de $(H^{R'})'$ (pour $\sigma(H^{R'}, H^R)$), elle est, d'une part, $\geq 0$ sur $Y$ (car $Y$ est une base de $(H^R)'^+$), de l'autre, $\geq 0$ sur $\varphi(x)$. Or l'équivalence de ces deux conditions implique bien que $\varphi(X) = Y$ (HAHN-BANACH). Donc $\varphi$ est surjective.

Soit $y \in \mathcal{E}(Y)$. L'ensemble $\varphi^{-1}(y)$ est une face de $X$, donc contient un point extrémal $x_0$ de $\mathcal{E}(X)$, et $x_0 \in F_i$ pour un certain $i$. Or, il est clair que, $\forall j \in I$, $\varphi(F_j) = y_j$ est réduit à un point. Donc $\varphi^{-1}(y) \supset F_i$, et $\varphi(F_i) = y$. D'autre part, puisque $H^R$ sépare les $F_i$, une seule face $F_i$ peut avoir $y$ pour image.

Donc, $\forall y \in \mathcal{E}(Y)$, il existe $F_i$ unique telle que $\varphi(F_i) = y$.

Montrons qu'on utilise ainsi toutes les faces $(F_i)$. Pour cela, nous allons montrer que, $\forall i$, $\varphi(F_i) = y_i$ est un point extrémal de $Y$.

Soient $u, v \in Y$ tels que $\varphi(F_i) = y_i = (u + v)/2$. Soient $a$ et $b \in X$ tels que $\varphi(a) = u$ et $\varphi(b) = v$. Alors $\varphi((a + b)/2) = \varphi(F_i)$. Donc, si $f \in H^{R+}_{F_i}$, on a

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) = \frac{f(a) + f(b)}{2} = f(F_i) = 0 .$$

Donc $f(a) = f(b) = 0$.

Donc $a$ et $b \in \bigcap_{f \in (H^R_{F_i})^+} f^{-1}(0) = G_i$. Or la condition $H^R_{F_i} = (H^R_{F_i})^+ - (H^R_{F_i})^+$ implique que cet ensemble est identique à $\bigcap_{f \in H^R_{F_i}} f^{-1}(0)$.

De plus, sous sa première forme, il est clair que $G_i$ est une face contenant $F_i$ : s'il existait $x \in \mathcal{E}(G_i) \setminus F_i$, on aurait $x \in F_j$ $(j \neq i)$, et toute $f$ de $H^R$, nulle sur $F_i$, serait nulle sur $F_j$, ce qui contredit l'hypothèse de séparation. Donc $G_i = F_i$. Donc $a$ et $b \in F_i$, et $u = v = y_i$. Donc $y_i$ est extrémal.

On a donc bien trouvé une bijection $I \longrightarrow \mathcal{E}(Y)$ : $i \longrightarrow y_i$, telle que $\varphi(F_i) = y_i$. Montrons qu'on a, de plus, $F_i = \varphi^{-1}(y_i)$. En effet, $\forall i$, $F_i \subset \varphi^{-1}(y_i)$, et les $\varphi^{-1}(y_i)$ sont des faces fermées disjointes 2 à 2. L'hypothèse $\mathcal{E}(X) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{E}(F_i)$ implique alors que $F_i = \varphi^{-1}(y_i)$, $\forall i$.

D'autre part, l'égalité $H^R = \{h \circ \varphi \mid h \in A(Y)\}$ résulte de la définition même de $Y$.

Enfin, la propriété universelle du couple $(Y, \varphi)$ est maintenant évidente en appliquant la proposition directe, puisque on sait que $\varphi[\mathcal{E}(X)] = \mathcal{E}(Y)$.

C. Q. F. D.

Bien entendu, il serait agréable d'avoir des critères "géométriques" sur une relation d'équivalence $R = (F_i)_{i \in I}$ sur un simplexe $X$, permettant d'affirmer qu'elle est simpliciale.

Dans le cas où $F_i$ est réduite à un point, sauf pour un nombre fini d'indices, on retrouve le quotient comme quotient successif par des faces fermées $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$, et les critères (a), (b), (c) de la définition 34 se démontrent, dans le cas d'une face, grâce à des résultats de [5] et [9], et au moyen du théorème 11.

On peut raisonnablement conjecturer le résultat suivant :

CONJECTURE 36. - Soit $X$ un simplexe, et soit $R = (F_i)_{i \in I}$ une relation d'équivalence sur $X$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $R$ est simpliciale,

(b) Pour toute face fermée $F$, soit $B_F = \bigcup_{F_i \cap F \neq \emptyset} F_i$.

Soit $\widetilde{B_F}$ la $H^R$-face engendrée par $B_F$, c'est-à-dire l'ensemble $\bigcap_{f \in \Delta} f^{-1}(0)$, où $\Delta = \{f \in H^R \mid f \geqslant 0 , f = 0 \text{ sur } B_F\}$. Alors $\mathcal{E}(\widetilde{B_F}) = \bigcup_{F_i \cap F \neq \emptyset} \mathcal{E}(F_i)$.

L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) est toujours vraie. Si $\mathcal{E}(X)$ est fermé, (b) $\Rightarrow$ (a) est vraie.

Donnons enfin une propriété de stabilité (pour l'intérêt de cette propriété, cf. [10]).

PROPOSITION 37. - Soit $X$ un simplexe, et soit $R$ une relation d'équivalence simpliciale sur $X$.

(a) Si $X$ est de Bauer, il en est de même de $X/R$.

(b) Si $X$ est métrisable, il en est de même de $X/R$.

(c) Si $\mathcal{E}(X)$ est un $K_\sigma$ (réunion dénombrable de compacts), il en est de même de $\mathcal{E}(X/R)$.

La démonstration ne présente aucune difficulté.

## 8. APPENDICE I : Quelques propriétés des fonctions convexes semi-continues sur un convexe compact.

Nous regroupons ici un ensemble de résultats, dont la plupart se trouvent disséminés dans la littérature (cf. par exemple [7]), et qui nous servent dans nos démonstrations. Nous ne rappelons pas le théorème d'Edwards, pour lequel nous renvoyons le lecteur à [5], [8]. On désignera par $X$ un convexe compact quelconque.

(A). - Toute fonction $\varpi$, convexe semi-continue supérieurement, sur un convexe

compact $X$ , est l'enveloppe inférieure de l'ensemble $\mathfrak{F}$ , qui est filtrant décroissant, des fonctions convexes continues qui la majorent strictement.
Même énoncé en remplaçant partout "convexe" par "affine".

(B). - Deux fonctions affines semi-continues, qui coïncident sur $\mathcal{E}(X)$ , coïncident sur $X$ .

(C). - Soient $f$ une fonction convexe semi-continue supérieurement sur $X$ , et $g$ une fonction semi-continue inférieurement quelconque, telle que $f \leq g$ , alors il existe une fonction $h$ convexe continue telle que $f \leq h \leq g$ .

(D). - Toute fonction convexe semi-continue supérieurement sur un convexe compact est bornée. C'est faux en général pour une fonction convexe semi-continue inférieurement.

(E). - Toute fonction $\varphi$ convexe semi-continue inférieurement est l'enveloppe supérieure de l'ensemble $\mathcal{G}$ , qui est filtrant croissant, des fonctions convexes continues qui la minorent.

(F). - Soit $\mu < \nu$ l'ordre de Choquet sur $M^+(X)$ , ordre défini par : $\mu < \nu \iff \mu(f) \leq \nu(f)$ pour toute $f$ convexe continue. Alors, si $\mu < \nu$ , on a $\mu(f) \leq \nu(f)$ pour toute fonction $f$ convexe semi-continue.

(G). - Soit $X$ un convexe compact. Pour toute $f$ semi-continue supérieurement sur $X$ , minorée, on a :

$$\hat{f}(x) = \sup_{\substack{\mu \text{ de barycentre } x \\ \mu \in M_1^+(X)}} \mu(f) .$$

Le résultat est faux si $f$ est semi-continue inférieurement majorée. De plus, cette formule est fausse si, dans le 2e membre, on se restreint aux mesures discrètes de barycentre $x$ (cela devient vrai si $f$ est continue).

(H). - Si $f$ est semi-continue supérieurement minorée, alors $f = \hat{f}$ sur $\mathcal{E}(X)$.

(I). - Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille filtrante décroissante de fonctions semi-continues supérieurement sur $X$ convexe compact, telle que $\inf_{i \in I} f_i$ soit minorée. Alors

$$\inf_{i \in I} \hat{f}_i = \widehat{\inf_{i \in I} f_i} .$$

(J). - Soit $\varphi$ une fonction convexe semi-continue supérieurement sur $X$ . Alors, pour toute mesure $\mu$ , maximale pour l'ordre de Choquet, $\mu(\hat{\varphi}) = \mu(\varphi)$ .

(K). - Soit $X$ un <u>simplexe</u>, et soit $f$ convexe semi-continue supérieurement sur $X$ . Alors $\hat{f}$ est affine semi-continue supérieurement, et pour tout $x \in X$ : $\hat{f}(x) = \mu_x(f)$ , où $\mu_x$ est <u>la</u> mesure maximale de barycentre $x$ .

## 9. APPENDICE II : Les fonctions boréliennes de quasi 1re classe.

Rappelons qu'une fonction $f : X \to Y$ est de quasi 1re classe si

$$f^{-1}(O) = \bigcup_n (O_n \cap F_n)$$

pour tout $O$ ouvert de $X$ (cf. définition 18).

(L). - Soient $f : X \to Y$ de quasi 1re classe, $u : X' \to X$ , continue, et $v : Y \to Y'$ , continue. Alors $v \circ f \circ u : X' \to Y'$ est de quasi 1re classe.

(M). - Toute fonction numérique sur un espace topologique, semi-continue (supérieurement ou inférieurement) est de quasi 1re classe.

(N). - Soient $A$ , $X$ , $Y$ trois espaces topologiques, le dernier étant <u>à base dénombrable</u>. Soient $u : A \to X$ et $f : A \to Y$ deux applications de quasi 1re classe. Alors, l'application

$$x \to (u(x) , f(x)) : A \to X \times Y$$

est de quasi 1re classe.

(O). - Soient $X$ un espace topologique, et $E$ un espace vectoriel topologique <u>à base dénombrable</u>. Alors, l'ensemble des applications de $X$ dans $E$ de quasi 1re classe est un sous-espace vectoriel de $E^X$ . De plus, si $f : X \to \mathbb{R}$ et $u : X \to F$ sont de quasi 1re classe, $F$ étant cette fois un espace vectoriel topologique <u>quelconque</u>, alors $x \to f(x) \times u(x)$ est de quasi 1re classe de $X$ dans $F$ .

(P). - Soit $f$ une fonction numérique de quasi 1re classe sur $X$ . Alors, l'application "graphe de $f$ " définie par :

$$G_f(x) = (x , f(x)) \quad (G_f : X \to X \times \mathbb{R})$$

est de quasi 1re classe.

(Q). - Soit $X$ un espace topologique, et soit $F$ un fermé de $X$ . Soient $f : X \setminus F \to Y$ et $g : F \to Y$ deux applications de quasi 1re classe. Alors $h = f \cup g : X \to Y$ , définie par $h_{|X \setminus F} = f$ et $h_{|F} = g$ , est de quasi 1re classe.

(R). - Soient $X$ un espace topologique, et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces topologiques à bases dénombrables. Pour tout $n$, soit $f_n : X \to Y_n$ une application de quasi-première classe. Alors $f = \prod_n f_n : X \to \prod_n Y_n$ est de quasi-première classe.

## 11. APPENDICE III : Un lemme utile.

Soit $X$ un espace compact, et soit $H$ un ensemble de fonctions réelles s. c. i. sur $X$, vérifiant le lemme de Riesz (c'est-à-dire : Si $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4 \in H$, avec $\sup(h_1, h_2) \leq \inf(h_3, h_4)$, il existe $h \in H$ telle que

$$\sup(h_1, h_2) \leq h \leq \inf(h_3, h_4)\ ).$$

Si $h_1$, $h_2 \in H$, on note $H_{h_1,h_2}$ l'ensemble des $h \in H$ tels que $h < \inf(h_1, h_2)$. On suppose qu'il existe un sous-ensemble $Z$ non vide de $X$ tel que, pour toutes $h_1$, $h_2 \in H$, on ait $\sup H_{h_1,h_2} = \inf(h_1, h_2)$ sur $Z$.

Alors, pour toute fonction réelle semi-continue supérieurement $f$ sur $X$, telle que, pour toutes $h_1$, $h_2 \in H$, la fonction $\sup H_{h_1,h_2} - f$ atteigne son minimum sur $X$ en un point de $Z$, l'ensemble $\mathfrak{F}_f = \{h \in H \mid h > f\}$ est filtrant décroissant.

Démonstration. - Soient $h_1$, $h_2 \in \mathfrak{F}_f$. Soit $g = \sup H_{h_1,h_2}$. Par hypothèse, $g - f$, s. c. i., atteint son minimum sur $X$ en un point de $Z$. Or, sur $Z$, $g = \inf(h_1, h_2) > f$. Donc $g > f$ sur $Z$, donc sur $X$ tout entier.

Donc, $\forall x \in X$, il existe $h_x \in H_{h_1,h_2}$ telle que $f(x) < h_x(x)$. Donc il existe un voisinage ouvert $x$ de $x$, tel que $\forall y \in V_x$, on ait $f(y) < h_x(y)$.

Recouvrons $X$ par $V_{x_1}$, $V_{x_2}$, ..., $V_{x_n}$. Alors

$$f < \sup(h_{x_1}, \dots, h_{x_n}) < \inf(h_1, h_2).$$

En utilisant le lemme de Riesz, on voit qu'il existe $h \in H$ telle que

$$\sup(h_{x_1}, \dots, h_{x_n}) < h \leq \inf(h_1, h_2).$$

Alors $f < h \leq \inf(h_1, h_2)$. Par suite, $\mathfrak{F}_f$ est filtrant décroissant.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALFSEN (Erik). - On the geometry of Choquet simplexes, Math. Scand., t. 15, 1964, p. 97-110.

[2] ALFSEN (Erik). - On the decomposition of a Choquet simplex into a direct convex sum of complementary faces, Math. Scand., t. 17, 1965, p. 169-176.

[3] BAUER (Heinz). - Frontière de Šilov et problème de Dirichlet, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 3e année, 1958/59, n° 7, 23 p.

[4] CHOQUET (Gustave) et MEYER (Paul-André). - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 139-154.

[5] EDWARDS (David Albert). - Séparation des fonctions réelles définies sur un simplexe de Choquet, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, p. 2798-2800.

[6] EDWARDS (D. A.) and VINCENT-SMITH (G.). - A Weierstrass-Stone theorem for Choquet simplexes (à paraître).

[7] GOULLET de RUGY (Alain). - Faces d'un convexe ; simplexes et fonctions affines sur un simplexe. - Paris, Centre de Documentation universitaire, 1968 (Thèse 3e cycle, Paris, 1967).

[8] MOKOBODZKI (Gabriel). - Quelques propriétés des fonctions numériques convexes (s. c. i. ou s. c. s.) sur un ensemble convexe compact, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 6e année, 1961/62, n° 9, 3 p.

[9] ROGALSKI (Marc). - Espaces de Banach ordonnés, simplexes, frontières de Šilov et problème de Dirichlet, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 5e année, 1965/66, n° 12, 62 p.

[10] ROGALSKI (Marc). - Opérateurs de Lion, projecteurs boréliens et simplexes analytiques, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 12e année, 1967/68, n° 11, 3 p.

(Texte revu et augmenté reçu le 2 octobre 1968)