SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

CHRISTIAN LEGER

Une démonstration du théorème de Lazar sur les simplexes

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. nº 1, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A1_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
12e année, 1967/68, n° 1
16 novembre 1967

UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE LAZAR SUR LES SIMPLEXES

par Christian LÉGER

1. But de l'exposé.

Dans ce qui suit, on appelle objet, tout triplet (X , E , Φ) , où

X est un simplexe compact d'e. l. c. s. ;

E est un e. l. c. s. ;

Φ est une application multivoque de X dans E telle que Φ est convexe, s. c. i., et telle que, $\forall x \in X$, $\Phi x \neq \emptyset$.

Si (X , E , Φ) est un objet, $\sigma(X , E , \Phi)$, désigne la relation : Il existe une sélection affine continue de Φ .

On va démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME de Lazar. - Soit (X , E , Φ) un objet. Si, $\forall x \in X$, Φx est fermé, et si E est métrisable complet, alors $\sigma(X , E , \Phi)$.

(On peut en lire la démonstration originale dans [3] et [4].)

2. Schéma de la démonstration.

Les étapes de la démonstration seront les résultats partiels suivants :

LEMME 0. - Soit $(X , \mathbb{R} , \Phi)$ un objet. Si, $\forall x \in X$, Φx est fermé, alors $\sigma(X , \mathbb{R} , \Phi)$.

Ce lemme est trivialement équivalent au théorème d'Edwards (théorème qu'on admet, voir [1]).

LEMME (1 ; n) (n entier positif ou nul). - Soit $(X , \mathbb{R}^n , \Phi)$ un objet. Si V est un voisinage convexe de 0 dans $\mathbb{R}^n$, alors ($(X , \mathbb{R}^n , \Phi + V)$ est un objet, et) $\sigma(X , \mathbb{R}^n , \Phi + V)$.

Le lemme (1 ; 0) est trivial. On démontre les lemmes (1 ; n) par récurrence, en utilisant à chaque cran, le lemme 0.

LEMME 2. - Soit (X , E , Φ) un objet. Si V est un voisinage convexe de 0 dans E , alors ($(X , E , \Phi + V)$ est un objet, et) $\sigma(X , E , \Phi + V)$.

On ramène le lemme 2 à un lemme (1 ; n) en utilisant la compacité de X .

Enfin, du lemme 2, on déduit le théorème de Lazar.

3. Démonstration des lemmes (1 ; n) .

Soit n un entier positif ou nul ; on suppose le lemme (1 ; n) vrai ; démontrons le lemme (1 ; n + 1) .

Soient $(X , \underset{\sim}{R}^{n+1} , \Phi)$ et V vérifiant les hypothèses du lemme (1 ; n + 1) .

On identifie $\underset{\sim}{R}^{n+1}$ à $\underset{\sim}{R} \times \underset{\sim}{R}^n$ en choisissant deux projections

$$p : \underset{\sim}{R}^{n+1} \to \underset{\sim}{R} \quad \text{et} \quad q : \underset{\sim}{R}^{n+1} \to \underset{\sim}{R}^n .$$

On peut supposer que $V = A \times B$, où A (resp. B) est un voisinage convexe équilibré ouvert de 0 dans $\underset{\sim}{R}$ (resp. $\underset{\sim}{R}^n$).

$(X , \underset{\sim}{R} , \overline{p\Phi})$ <u>est un objet</u> (où $\overline{p\Phi}$ désigne l'application multivoque

$$x \in X \longmapsto \overline{p\Phi x} \subset \underset{\sim}{R}) ;$$

cela résulte des deux propriétés suivantes (qu'on admet) de stabilité des objets :

- d'une part, si (X , E , Φ) est un objet et si F est un e. l. c. s., et si $f : E \to F$ est affine continue, alors $(X , F , f\Phi)$ est un objet ;

- d'autre part, si (X , E , Φ) est un objet, alors $(X , E , \overline{\Phi})$ est un objet (où $\overline{\Phi}$ désigne l'application $x \longmapsto \overline{\Phi x}$).

<u>Remarque</u> 0. - Dans la suite, on utilisera implicitement des propriétés de stabilité analogues qu'il serait facile, mais long, de formuler.

D'autre part, $\forall\, x \in X$, $\overline{p\Phi x}$ est fermé dans $\underset{\sim}{R}$. Ainsi (lemme 0), on a $\sigma(X , \underset{\sim}{R} , \overline{p\Phi})$.

Soit g une sélection affine continue de $\overline{p\Phi}$. Soit

$$\Psi = q[\Phi \cap p^{-1}(g + A)] .$$

$(X , \underset{\sim}{R}^n , \Psi)$ <u>est un objet</u> (voir la remarque 0, en notant que, g étant une sélection de $\overline{p\Phi}$ et A étant ouvert non vide, $\forall\, x \in X$, on a $p\Phi x \cap (gx + A) \neq \emptyset$, et par suite $\forall\, x \in X$, $\Psi x \neq \emptyset$).

Ainsi (lemme (1 ; n) , qui est l'hypothèse de récurrence), on a $\sigma(X , \underset{\sim}{R}^n , \Psi + B)$.

Soit h une sélection affine continue de $\Psi + B$. Soit

$$f = (g , h) : X \to \underset{\sim}{R}^{n+1} .$$

f est affine continue (puisque g et h le sont). f est une sélection de $\Phi + V$:

En effet, soit $x \in X$; On a $hx \in \Psi x + B$. Ainsi $hx = q(y , z) + b$, donc

$$hx = z + b \quad \text{avec} \quad b \in B \quad (b \text{ convenable})$$

et $(y , z) \in \Phi x$ et $(y , z) \in p^{-1}(gx + A)$, ce qui entraîne $y \in gx + A$, donc

$$y = gx + a \quad \text{avec} \quad a \in A \quad (a \text{ convenable}) .$$

Enfin

$$fx = (gx , hx) = (y , z) + (- a , b) \in \Phi x + V .$$

C. Q. F. D.

4. Démonstration du lemme 2.

Soient (X , E , Φ) et V vérifiant les hypothèses du lemme 2.

On peut supposer V convexe équilibré ouvert. Si $y \in E$,

$$Uy = \{x \in X \ ; \quad \Phi x \cap y + \frac{V}{2} \neq \emptyset\}$$

est ouvert. Comme $\forall\, x$, $\Phi x \neq \emptyset$, les Uy recouvrent X ; X étant compact, on peut en extraire un recouvrement fini, soit Uy_i $(i = 1 , \ldots , n)$.

Soit H le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{y_i \ ; \ i = 1 , \ldots , n\}$. H est de dimension finie.

Soit $W = H \cap \frac{V}{2}$, un voisinage convexe de 0 dans le sous-espace H de E .

Soit $\Psi = (\Phi + \frac{V}{2}) \cap H$.

(X , H , Ψ) est un objet (voir la remarque 0, en notant que, les Uy_i recouvrant X , $\forall\, x \in X$, il existe un i tel que $y_i \in \Phi x + \frac{V}{2}$, ce qui entraîne que $\forall\, x \in X$, $\Psi x \neq \emptyset$).

Ainsi (lemme (1 ; dim H)), on a $\sigma(X , H , \Psi + W)$, d'où $\sigma(X , E , \Phi + V)$.

C. Q. F. D.

5. Démonstration du théorème de Lazar.

Soit (X , E , Φ) vérifiant les hypothèses du théorème de Lazar. Soit $A_u(X , E)$ l'espace des applications affines continues de X dans E , muni de la structure de la convergence uniforme.

DÉFINITION. - Soit H un espace uniforme. Un filtre $\mathfrak{F}$ de H est stable si, $\forall V$ entourage de H, il existe un $S \in \mathfrak{F}$ tel que, $\forall T \in \mathfrak{F}$, $V(T) \supset S$.

On rappelle le lemme suivant :

LEMME 3. - Tout filtre stable d'un espace uniforme complet métrisable a un point adhérent.

Pour cette propriété de "supercomplétion", voir **ISBELL** [2] ou LÉGER [5].

Soit, pour tout V voisinage convexe de 0 dans E,

$$S_V = \{f \in A_u(X, E) \; ; \; f \text{ est sélection de } \Phi + V\} .$$

Les S_V sont non vides (lemme 2) et forment une base d'un filtre ; soit $\mathfrak{F}$ ce filtre.

Si on montre que $\mathfrak{F}$ est stable, on aura terminé car, $A_u(X, E)$ étant complet métrisable, $\mathfrak{F}$ aura un point adhérent (lemme 3), et tout point adhérent de $\mathfrak{F}$ est une sélection affine continue de Φ.

$\mathfrak{F}$ est stable : On montre que, si V et W sont des voisinages ouverts convexes symétriques de 0 dans E, $V(S_W) \supset S_V$.

En effet, soit $f \in S_V$; $(X, E, (f+V) \cap \Phi)$ est un objet (voir remarque 0). Ainsi (lemme 2), on a $\sigma(X, E, (f+V) \cap \Phi + W)$. Soit g une sélection affine continue de $(f+V) \cap \Phi + W$. On a

$$g \in S_W \qquad \text{et} \qquad g \in V(f) = V^{-1}(f) .$$

D'où $f \in V(S_W)$.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] EDWARDS (David Albert). - Séparation des fonctions réelles définies sur un simplexe de Choquet, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, p. 2798-2800.

[2] ISBELL (J. R.). - Uniform spaces. - Providence, American mathematical Society, 1964. (Mathematical Surveys, 12).

[3] LAZAR (A. J.). - On affine continuous functions on simplexes. Jerusalem, The Hebrew University (multigraphié).

[4] LAZAR (A. J.). - Spaces of affine functions on simplexes. Jerusalem, The Hebrew University (multigraphié).

[5] LÉGER (Christian). - Filtres lents et espaces hypercomplets, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 4e année, 1964/65, n° 9, 8 p. (Mathematica Seminosa, 1).