Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

GABRIEL MOKOBODZKI

Ultrafiltres rapides sur ℕ. Construction d'une densité relative de deux potentiels comparables

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. nº 12, p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A11_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
12e année, 1967/68, n° 12

7 mars 1968

ULTRAFILTRES RAPIDES SUR $\mathbb{N}$
CONSTRUCTION D'UNE DENSITÉ RELATIVE DE DEUX POTENTIELS COMPARABLES

par Gabriel MOKOBODZKI

<u>Introduction</u>. – Soient $(X , \mathcal{B})$ un espace mesurable, $(V_\lambda)_{\lambda \geqslant 0}$ une famille résolvante de noyaux positifs mesurables bornés sur $(X , \mathcal{B})$. Une fonction mesurable $u \geqslant 0$ est excessive pour la résolvante (V_λ) si $\lambda V_\lambda u \leqslant u$ pour tout $\lambda > 0$, et si $u = \sup_\lambda \lambda V_\lambda u$. Toutes les fonctions de la forme $V_0 \varphi$, où φ est mesurable positive, sont excessives.

On se propose de résoudre le problème suivant : Si u et v sont des fonctions excessives mesurables dont la somme $u + v = V_0 1$, peut-on trouver $\varphi \geqslant 0$, φ mesurable pour toutes les mesures σV , telle que $u = V_0 \varphi$? Lorsque toutes les mesures $\varepsilon_x V_0$ sont de base une même mesure $\mu \geqslant 0$ sur $(X , \mathcal{B})$, le problème posé a été résolu par un théorème de Motoo (qui englobe une situation plus générale, car il permet d'obtenir la densité d'une fonctionnelle additive par rapport à une autre).

Dans ce travail, on ne supposera pas l'existence d'une mesure μ privilégiée par rapport à la résolvante (V_λ) . On construira la densité φ de u par rapport à $V_0 1$, en utilisant des ultrafiltres spéciaux sur $\mathbb{N}$, ultrafiltres dont la construction est possible si l'on utilise l'hypothèse du continu. La première partie de ce travail est consacrée à l'étude de ces filtres.

1. Ultrafiltres rapides sur $\mathbb{N}$.

Désignons par S l'ensemble des applications a de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $[0 , 1]$ telles que

$$\lim_{p,q \to \infty} a(p , q) = 0 \quad .$$

Désignons par G l'ensemble des suites infinies σ strictement croissantes d'entiers, $\sigma = (n_1 , n_2 , \ldots , n_p)$. Ces suites σ peuvent être identifiées à des sous-ensembles de $\mathbb{N}$. Nous dirons que $\sigma \in G$ est a-sommable, pour $a \in S$, si

$$\sum_{p \geqslant 1} a(n_p , n_{p+1}) < + \infty \, , \qquad \text{où } \sigma = (n_1 , n_2 , \ldots , n_p , \ldots) \quad .$$

On se propose d'étudier l'existence de filtres $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ ayant la propriété suivante, "propriété d'extraction" :

(E) Pour tout $a \in S$, il existe $\sigma \in \mathcal{U}$, tel que σ soit a-sommable.

Disons qu'une suite $\sigma_1 \in G$ est plus rapide que $\sigma_2 \in G$, si, lorsque les éléments de σ_1 et σ_2 sont rangés par ordre croissant,

$$\sigma_1 = (n_1 , n_2 , \dots , n_p , \dots) ,$$

$$\sigma_2 = (m_1 , m_2 , \dots , m_p , \dots) ,$$

on a $n_p \geqslant m_p$, sauf pour un nombre fini d'indices. A chaque $\sigma \in G$, on associera le filtre de Fréchet $\mathfrak{F}_\sigma$ défini sur le sous-ensemble infini σ de $\underset{\sim}{N}$.

Si $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ sont des filtres sur $\underset{\sim}{N}$, on dira que $\mathfrak{F}_1$ est plus rapide que $\mathfrak{F}_2$ si, pour tout $\sigma_2 \in \mathfrak{F}_2$, il existe $\sigma_1 \in \mathfrak{F}_1$, σ_1 plus rapide que σ_2.

De même, en associant à chaque $\sigma \in G$ le filtre $\mathfrak{F}_\sigma$, on dira qu'un filtre $\mathfrak{F}$ est plus rapide ou moins rapide que σ, si $\mathfrak{F}$ est plus ou moins rapide que $\mathfrak{F}_\sigma$.

DÉFINITION 1. - <u>On dira qu'un filtre</u> $\mathcal{U}$ <u>sur</u> $\underset{\sim}{N}$ <u>est</u> rapide, <u>si</u> $\mathcal{U}$ <u>est plus rapide que tout</u> $\sigma \in G$ (<u>donc plus rapide que tout filtre sur</u> $\underset{\sim}{N}$).

PROPOSITION 2. - <u>Tout filtre rapide</u> $\mathcal{U}$ <u>sur</u> $\underset{\sim}{N}$ <u>a la propriété</u> (E).

<u>Démonstration</u>. - Soit $a \in S$. On sait que $\lim\limits_{p,q \to \infty} a(p , q) = 0$. Il existe donc une suite $\sigma = (n_p)$ telle que

$$(p , q \geqslant n_k) \implies (a(p , q) \leqslant \frac{1}{2^k}) .$$

Pour toute suite $\sigma' = (m_1 , m_2 , \dots , m_k , \dots)$, plus rapide que σ, on a alors $\sum\limits_{k \geqslant 1} a(m_k , m_{k+1}) < + \infty$. La définition des filtres rapides semble faire intervenir l'ordre naturel de $\underset{\sim}{N}$, en fait il n'en est rien, ainsi qu'on peut le voir grâce au lemme suivant :

LEMME 3. - <u>Soient</u> $\mathcal{U}$ <u>un filtre rapide sur</u> $\underset{\sim}{N}$, g <u>une bijection de</u> $\underset{\sim}{N}$ <u>sur lui-même. Le filtre</u> $g(\mathcal{U})$ <u>est aussi un filtre rapide</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit $\sigma \in G$, $\sigma = (n_1 , n_2 , \dots , n_p , \dots)$, et posons $m_p = \sup g^{-1}([0 , n_p])$. On obtient une nouvelle suite σ' telle que, pour toute suite σ'' plus rapide que σ', $g(\sigma'')$ est plus rapide que σ.

PROPOSITION 4. - <u>Les conditions suivantes sont équivalentes, pour un filtre</u> $\mathfrak{F}$ <u>sur</u> $\underset{\sim}{N}$.

1° $\mathfrak{F}$ *est rapide* ;

2° *Pour toute suite croissante* $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *de parties finies de* $\mathbb{N}$, *dont la réunion est* $\mathbb{N}$, *il existe* $X \in \mathfrak{F}$ *tel que, pour tout* p , $X \cap X_p$ *a au plus* p *éléments*.

Démonstration. - 2° $\Longrightarrow$ 1° est immédiat. Soit (X_p) une suite strictement croissante de parties finies de $\mathbb{N}$, de réunion $\mathbb{N}$ tout entier. Il existe alors une bijection g de $\mathbb{N}$ sur lui-même, telle que $g(X_{p+2} \setminus X_{p+1}) \geqslant g(X_{p+1} \setminus X_p)$. On considère alors la suite $n_p = \sup g(X_p)$.

On ne sait pas dire, en général, si l'image d'un filtre rapide $\mathfrak{F}$ sur $\mathbb{N}$ par une application quelconque g de $\mathbb{N}$ dans lui-même est encore un filtre rapide.

On est ainsi conduit naturellement à la définition suivante :

DÉFINITION 5. - *On dira qu'un filtre* $\mathfrak{F}$ *sur* $\mathbb{N}$ *est* absolument rapide, *si, pour toute suite croissante* (X_p) *de parties de* $\mathbb{N}$, *de réunion* $\mathbb{N}$:

(a) *Ou bien l'un des* X_n *appartient à* $\mathfrak{F}$;

(b) *Ou bien il existe* $X \in \mathfrak{F}$ *tel que, pour tout* p , $X \cap X_p$ *a au plus* p *éléments*.

On notera qu'un filtre absolument rapide $\mathfrak{F}$ est nécessairement un ultrafiltre. En effet, soit $X \subset \mathbb{N}$. Posons $X_0 = X$, et si $\complement X = (n_1 , n_2 , \ldots , n_p , \ldots)$, $X_p = X_1 \cup \{n_1 , \ldots , n_p\}$. Alors, ou bien $X \in \mathfrak{F}$, ou bien $\complement X \in \mathfrak{F}$, propriété caractéristique des ultrafiltres.

A partir d'autres problèmes, G. CHOQUET a introduit différents types d'ultrafiltres sur $\mathbb{N}$, dont voici les définitions, et que nous allons comparer aux filtres rapides.

1° On dira qu'un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ sur $\mathbb{N}$ est δ-*stable*, si, pour toute suite X_n d'éléments de $\mathfrak{F}$, il existe $X \in \mathfrak{F}$ tel que $(X \setminus X_n)$ soit fini pour tout n .

2° On dira qu'un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ est *absolument* 1-*simple*, si, pour toute partition de $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \sum X_p$, ou bien l'un des $X_p \in \mathfrak{F}$, ou bien il existe $X \in \mathfrak{F}$ tel que $X \cap X_p$ soit fini pour tout p .

3° On dira qu'un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ est *rare*, si, pour toute partition de $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \sum X_p$ où tous les X_p sont finis, il existe $X \in \mathfrak{F}$ tel que $X \cap X_p$ contient un point au plus pour tout p .

Une partie des résultats qui suivent se trouvent déjà dans [1].

PROPOSITION 6.

1° Tout ultrafiltre absolument rapide est δ-stable ;

2° Tout ultrafiltre δ-stable est absolument 1-simple, et réciproquement ;

3° Tout filtre rare est rapide ;

4° Tout filtre δ-stable et rare est absolument rapide.

Démonstration.

1° Soit $\mathfrak{F}$ un filtre absolument rapide sur $\underset{\sim}{N}$, et soit (X_n) une suite d'éléments de $\mathfrak{F}$, suite qu'on peut supposer décroissante et d'intersection vide. Posons $Y_n = \complement X_n$; on a bien $\underset{\sim}{N} = \bigcup_n Y_n$. Il existe alors $X \in \mathfrak{F}$ tel que $X \cap Y_p$ a au plus p éléments, ce qui implique bien que $X \cap Y_p = X \setminus X_p$ est fini pour tout p.

2° Soient $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre δ-stable sur $\underset{\sim}{N}$, (X_p) une partition de $\underset{\sim}{N}$, et supposons qu'aucun des X_p soit élément de $\mathfrak{F}$. Comme $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre, pour tout p, $\bigcup_{q \geqslant p} X_q = Y_p$ est un élément de $\mathfrak{F}$. Il existe alors $X \in \mathfrak{F}$ tel que $X \setminus Y_p$ soit fini pour tout p ; or $X \cap X_q \subset X \setminus Y_{q+1}$, donc $X \cap X_q$ est fini.
Soient $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre absolument 1-simple, (X_n) une suite (qu'on peut supposer décroissante) d'éléments de $\mathfrak{F}$. Posons $Y_n = X_{n+1} \setminus X_n$, $Y_\infty = \bigcap_n X_n$. Il faut trouver $X \in \mathfrak{F}$ tel que $X \setminus X_p$ soit fini pour tout p. Distinguons deux cas :

(a) $Y_\infty \in \mathfrak{F}$, on peut alors prendre $X = Y_\infty$.

(b) $Y_\infty \notin \mathfrak{F}$, mais alors aucun $Y_n \in \mathfrak{F}$, et il existe $X \in \mathfrak{F}$ tel que $X \cap Y_n$ soit fini pour tout n, et $X \cap Y_\infty = \emptyset$. On a $X \setminus X_n \subset \bigcup_{p \leqslant n} X \cap Y_p$, par suite $X \setminus X_n$ est fini pour tout n.

3° Soit $\sigma = (n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots)$ une suite strictement croissante d'éléments de $\underset{\sim}{N}$. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre rare sur $\underset{\sim}{N}$, et considérons la partition (X_p) de $\underset{\sim}{N}$, où $X_p = [n_p, n_{p+1}[$. Il existe $X \in \mathfrak{F}$ tel que $X \cap X_p$ a au plus un élément. Si on pose $X = (m_1, m_2, \ldots, m_p, \ldots)$ où la suite (m_p) est strictement croissante, on a bien $m_p \geqslant n_p$ pour tout p.

4° Soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre à la fois δ-stable et rare. Pour toute partition de $\underset{\sim}{N}$, soit (X_p), ou bien l'un des X_p est élément de $\mathfrak{F}$, ou bien il existe $X \in \mathfrak{F}$ tel que $X \cap X_p$ ait au plus un élément ; on en déduit facilement (cf. la démonstration de la partie 3° de cette proposition) que $\mathfrak{F}$ est absolument rapide.

Remarque. - Si l'on cherche à obtenir les propriétés les plus fortes pour un ultrafiltre sur $\underset{\sim}{N}$ parmi celles que nous avons envisagées, il faut considérer les ultrafiltres qui sont à la fois δ-stables et rares ; nous dirons, avec CHOQUET, que ce sont des ultrafiltres absolus.

PROPOSITION 7. - Soit g une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre absolu sur $\mathbb{N}$.

(a) Ou bien il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^{-1}(n) \in \mathfrak{F}$;

(b) Ou bien il existe $X \subset \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{F}$, tel que $g_{|X}$ est injective.

Démonstration. - Il suffit de considérer la partition de $\mathbb{N}$ formée des ensembles $g^{-1}(n)$, où n parcourt $\mathbb{N}$. Pour un ultrafiltre absolu $\mathfrak{F}$, ou bien l'un des ensembles $g^{-1}(n)$ appartient à $\mathfrak{F}$, ou bien il existe $X \in \mathfrak{F}$ tel que $X \cap g^{-1}(n)$ a au plus un élément pour tout n.

Cette propriété est évidemment caractéristique des ultrafiltres absolus.

COROLLAIRE 8. - L'image par une application quelconque de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ d'un ultrafiltre absolu est encore un ultrafiltre absolu.

Nous ne savons pas encore s'il existe des ultrafiltres sur $\mathbb{N}$ possédant les propriétés que nous avons étudiées, on a toutefois l'énoncé suivant :

PROPOSITION 9. - Si l'on admet l'hypothèse du continu, il existe des ultrafiltres absolus sur $\mathbb{N}$.

Démonstration. - L'ensemble des partitions de $\mathbb{N}$ a même puissance que l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, autrement dit que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. D'après l'hypothèse du continu, l'ensemble E de toutes les partitions de $\mathbb{N}$ peut être indexé au moyen des ordinaux de 2e classe (c'est-à-dire de cardinal $\aleph_0$). Posons donc

$$E = (\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha<\Omega} .$$

On va construire par récurrence transfinie une famille $(\mathfrak{F}_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ de filtres à base dénombrable sur $\mathbb{N}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Si $\alpha > \beta$, $\mathfrak{F}_\alpha$ est plus fin que $\mathfrak{F}_\beta$;

2° Pour la partition $\mathcal{P}_\alpha = (X_n^\alpha)$ de $\mathbb{N}$, ou bien l'un des X_n^α appartient à $\mathfrak{F}_\alpha$, ou bien il existe $X \in \mathfrak{F}_\alpha$ tel que $X \cap X_n^\alpha$ a au plus un élément pour tout n ;

3° $\mathfrak{F}_0$ est le filtre de Fréchet de $\mathbb{N}$.

Supposons que l'on ait construit des filtres $\mathfrak{F}_\beta$ à base dénombrable, et satisfaisant aux conditions précédentes 1° et 2° pour tous les $\beta < \alpha$. Le filtre $\mathcal{U}$, borne supérieure des filtres $\mathfrak{F}_\beta$, pour $\beta < \alpha$, est encore à base dénombrable ; soit (Y_n) cette base de $\mathcal{U}$, qu'on peut supposer décroissante, d'autre part soit $\mathcal{P}_\alpha = (X_n^\alpha)$ la partition de $\mathbb{N}$ d'indice α. Distinguons deux cas :

(a) Le filtre $\mathcal{U}$ possède une trace sur l'un des X_n^α, soit $X_{n_0}^\alpha$. On prend alors pour filtre $\mathfrak{F}_\alpha$ le filtre sur $\underset{\sim}{N}$ qui a pour base la trace de $\mathcal{U}$ sur $X_{n_0}^\alpha$.

(b) Pour tout n, $\complement X_n^\alpha \in \mathcal{U}$.

On construit alors une suite p_n d'entiers satisfaisant aux conditions suivantes:

1° $p_n \in Y_n$, pour tout n ;

2° $p_{n+1} \notin X_k^\alpha$, pour tous les indices k pour lesquels il existe $m \leqslant n$ tel que $p_m \in X_k^\alpha$. On prend alors pour filtre $\mathfrak{F}_\alpha$ le filtre de Fréchet associé à la suite (p_n).

Le filtre $\mathfrak{F}$, borne supérieure des filtres $\mathfrak{F}_\alpha$, est alors un ultrafiltre absolu.

Remarques.

1° La présente démonstration est directement inspirée de celle qu'emploie G. CHOQUET pour construire des ultrafiltres absolument 1-simples (cf. [1]).

2° Dans une première étape de ce travail, j'avais construit directement des ultrafiltres rapides (toujours avec l'hypothèse du continu), et l'une des étapes nécessaires de la démonstration, qui utilise le procédé diagonal, fournit des filtres δ-stables. Ce phénomène, également rencontré par G. CHOQUET, n'est pas fortuit puisque tout ultrafiltre absolument 1-simple ou absolument rapide est nécessairement δ-stable.

3° Il semble peu probable qu'on puisse construire des ultrafiltres absolus sans l'hypothèse du continu. Il serait légitime, étant donné l'intérêt de ces filtres, de vérifier si leur existence n'implique pas l'hypothèse du continu.

Pour terminer, montrons des exemples d'ultrafiltres sur un ensemble dénombrable qui ne sont pas δ-stables ou qui ne sont pas rares ; on se reportera toutefois à l'article de CHOQUET [1] pour une étude plus détaillée.

Considérons l'ensemble E des nombres rationnels du segment $(0 , 1)$. Dans E, on considère la famille $\mathfrak{A}$ des sous-ensembles rares, c'est-à-dire dont l'adhérence est sans point intérieur dans $(0 , 1)$. Comme $(0 , 1)$ est un espace de Baire, la famille $\mathfrak{A}$ est stable par réunion finie, et le complémentaire, dans $(0 , 1)$, d'un ensemble de $\mathfrak{A}$ est toujours non vide. Soit alors $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre des complémentaires des éléments de $\mathfrak{A}$, et soit x sa limite dans $(0 , 1)$; les ensembles

$$X_n = [x - \frac{1}{n} , x + \frac{1}{n}]$$

appartiennent alors au filtre $\mathcal{U}$. Montrons que $\mathcal{U}$ ne peut être δ-stable. En effet, si $\mathcal{U}$ était δ-stable, il existerait $X \in \mathcal{U}$ tel que $X \setminus X_n$ soit fini pour tout n, et l'adhérence $\overline{X}$ de X dans $[0, 1]$ est égale à $X \cup \{x\}$, ce serait donc un ensemble rare, et l'on obtient une contradiction. On a ainsi un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur E dénombrable, tel que l'adhérence de tout élément de $\mathcal{U}$ soit d'intérieur non vide dans $[0, 1]$.

Montrons maintenant l'existence d'ultrafiltres sur $\underset{\sim}{N}$ qui ne sont pas rapides. Considérons la famille $\mathcal{A}$ des sous-ensembles X de $\underset{\sim}{N}$ telle que

$$\sum_{n \in X} \frac{1}{n} < +\infty \ .$$

La famille $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie et le complémentaire de tout élément dans $\underset{\sim}{N}$ est non vide. Tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que le filtre des complémentaires des éléments de $\mathcal{A}$ ne peut alors être rapide.

<u>Applications des filtres rapides à la théorie de la mesure.</u>

Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable. On se donne une mesure σ-additive $\mu \geqslant 0$, bornée sur $(X, \mathcal{B})$, et l'on considère l'espace H des classes de fonctions numériques μ-mesurables, finies μ-presque partout. L'espace vectoriel H est complètement réticulé, et on peut le munir de la topologie de la convergence en μ-mesure, qui en fait un espace vectoriel topologique métrisable complet.

On rappelle qu'un filtre $\mathcal{U}$ sur H converge pour l'ordre, si l'on a

$$\inf_{S \in \mathcal{U}} (\sup_{f \in S} f) = \sup_{S \in \mathcal{U}} (\inf_{f \in S} f) \ .$$

On dira de même qu'une suite (f_n) converge pour l'ordre dans H, si l'on a

$$\limsup f_n = \liminf f_n \ .$$

Pour tout entier n, soit g_n une fonction numérique μ-mesurable représentant de la classe f_n, il revient alors au même de dire que la suite f_n converge pour l'ordre, ou que

$$\limsup g_n = \liminf g_n \quad \mu\text{-presque partout} \ ,$$

et $\limsup g_n$ finie μ-presque partout. Par abus de langage, nous dirons encore que la suite (g_n) converge pour l'ordre μ-presque partout.

Tout filtre sur H qui converge pour l'ordre converge en mesure.

La propriété fondamentale des ultrafiltres rapides résulte de la proposition suivante :

PROPOSITION 10.

1° Soit (g_n) une suite de fonctions numériques μ-mesurables qui converge en μ-mesure vers g. Pour tout filtre rapide $\mathcal{U}$ sur l'ensemble $(g_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$, il existe $S \in \mathcal{U}$, $S = (n_1, n_2, \dots, n_p, \dots)$, tel que la suite (g_{n_p}) converge pour l'ordre μ-presque partout vers g.

2° Soit (g_n) une suite de fonctions numériques μ-mesurables précompacte pour la topologie de la convergence en μ-mesure. Pour tout ultrafiltre absolument rapide $\mathcal{U}$ sur l'ensemble $(g_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$, il existe $S \in \mathcal{U}$, $S = (n_1, n_2, \dots, n_p, \dots)$, tel que la suite (g_{n_p}) converge pour l'ordre et converge en μ-mesure.

Démonstration.

1° Pour tout $p > 0$, il existe un entier n_p tel que, si $m \geqslant n_p$, il existe un ensemble $A_m^p \in \mathcal{B}$ tel que

$$\mu(A_m^p) \leqslant \frac{1}{2^p} \qquad \text{et} \qquad |g_m(x) - g(x)| < \frac{1}{2^p} \quad \text{pour tout} \quad x \in \complement A_m^p \; .$$

Soit $\mathcal{U}$ un filtre rapide sur $\underset{\sim}{N}$, et soit $\sigma' \in \mathcal{U}$ plus rapide que la suite $\sigma = (n_1, n_2, \dots, n_p, \dots)$. Si l'on pose $\sigma' = (m_1, m_2, \dots, m_p, \dots)$, on peut alors construire une suite $(A_p) \subset \mathcal{B}$ telle que :

(a) $\mu(A_p) \leqslant \dfrac{1}{2^p}$, et

(b) $|g_{m_p}(x) - g(x)| < \dfrac{1}{2^p}$ pour tout $x \in \complement A_p$.

Un raisonnement classique montre que l'ensemble

$$A = \bigcap_p \Big(\bigcup_{m \geqslant p} A_m \Big)$$

est de μ-mesure nulle, et que

$$\lim_p g_{m_p}(x) = g(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \complement A \; .$$

2° Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre absolument rapide sur la suite (g_n), relativement compacte pour la topologie de la convergence en μ-mesure, et soit g une fonction numérique μ-mesurable représentant la limite de $\mathcal{U}$. La topologie de la convergence en mesure étant définissable par un écart, g possède un système fondamental dénombrable (V_n) de voisinages. Pour tout n, il existe donc $S_n \in \mathcal{U}$, $S_n \subset V_n$, et comme $\mathcal{U}$ est absolument rapide, donc δ-stable, il existe $S \in \mathcal{U}$ tel que $(S \setminus V_n) \subset (S \setminus S_n)$ soit fini pour tout n ; si l'on pose $S = (m_1, m_2, \dots, m_p, \dots)$, la suite (g_{m_p}) converge vers g, on termine alors la démonstration en utilisant la première partie de la proposition.

On sait, par ailleurs, qu'une suite (g_n) de fonctions μ-mesurables qui converge dans un espace $\mathcal{L}^p(X, \mu)$, converge en μ-mesure pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et soit (g_n) une suite de fonctions numériques $\mathcal{B}$-mesurables. On considère la famille $E[(g_n)]$ des mesures μ, positives, σ-additives, bornées sur $(X, \mathcal{B})$, telles que la suite (g_n) converge en μ-mesure vers une limite g_μ, μ-mesurable. Peut-on trouver une fonction numérique g sur X, telle que $g = g_\mu$ μ-presque-partout, pour toute $\mu \in E[(g_n)]$?

En corollaire de la proposition précédente, on obtient la proposition suivante :

PROPOSITION 11. - Soit (g_n) une suite de fonctions $\mathcal{B}$-mesurables sur $(X, \mathcal{B})$. Pour tout ultrafiltre rapide $\mathcal{U}$ sur l'ensemble (g_n), la fonction numérique $g = \lim_{\mathcal{U}}$ (limite simple) est μ-mesurable pour toute $\mu \in E[(g_n)]$, et la suite (g_n) converge en μ-mesure vers g.

On obtiendrait des résultats analogues avec la famille $K[(g_n)]$ des mesures $\mu \geqslant 0$, σ-additives, bornées, telles que la suite (g_n) soit précompacte pour la topologie de la convergence en μ-mesure, en utilisant cette fois des ultrafiltres absolument rapides.

2. Familles résolvantes et projecteurs dans les espaces de Riesz complètement réticulés.

Dans ce paragraphe, on se donne un espace de Riesz complètement réticulé H, muni d'une topologie $\mathcal{T}$ d'espace localement convexe séparé ayant les propriétés suivantes :

1° Toute forme linéaire continue sur H est différence de deux formes linéaires positives continues, autrement dit $H' = H'^+ - H'^+$;

2° Toute forme linéaire positive sur H' (ordonné par H'^+), majorée par un élément de H sur H'^+, définit un élément de H^+ ;

3° Le cône convexe H^+ est complet pour la topologie initiale $\mathcal{T}$.

Nous dirons qu'un espace complètement réticulé H, possédant les propriétés 1° à 3°, est un R-espace.

Les espaces L^p, pour $p > 1$, sont des R-espaces pour les topologies fortes et les topologies affaiblies ; de même, les espaces $\mathcal{M}(X)$ des mesures sur un espace compact X, et les espaces L^1, sont encore des R-espaces. Les R-espaces vérifient les importantes propriétés suivantes :

1° Tout ensemble de H borné pour l'ordre est faiblement relativement compact.

2° Si A est un sous-ensemble filtrant croissant majoré de H^+, le filtre des sections de A converge faiblement vers $\sup A$.

3° Disons qu'un filtre $\mathfrak{F}$ sur H^+ majore un filtre $\mathfrak{G}$ sur H^+, si pour tout $S \in \mathfrak{F}$, il existe $U \in \mathfrak{G}$, U majoré par S au sens que tout élément de U est majoré par un élément de S. Dans ces conditions, si $\mathfrak{F}$ converge faiblement dans H^+ vers x_0, $\mathfrak{G}$ a une valeur d'adhérence $y_0 \leqslant x_0$.

4° Soit $E \subset H$ un sous-espace vectoriel épais de H, c'est-à-dire que

$$(x \in E\ ,\ \ y \in H\ ,\ \ |y| \leqslant |x|) \implies (y \in E)\ .$$

Alors l'adhérence faible (donc aussi pour la topologie initiale) de $E^+ = E \cap H^+$ contient l'intersection avec H^+ de la bande engendrée par E, c'est-à-dire l'ensemble des bornes supérieures de sous-ensembles majorés de E^+.

On se donne maintenant un R-espace H, une famille $(V_i)_{i \in I}$ d'opérateurs linéaires positifs de H dans H, un filtre $\mathfrak{F}$ sur I, satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) $V_i V_j = V_j V_i$, pour tous $i, j \in I$;

(b) La famille $(V_i)_{i \in I}$ est équicontinue ;

(c) Pour tout $k \in I$ et tout $x \in H$,

$$\lim_{\mathfrak{F}} V_i V_k(x) = V_k(x)\ .$$

Dans les applications, on prendra une famille d'opérateurs $(\lambda V_\lambda)_{\lambda > 0}$, où (V_λ) est une famille résolvante d'opérateurs linéaires positifs de H dans H.

Ces données s'apparentent à celles de LION [2], mais notre problème est un peu différent, nous nous proposons d'étudier le sous-espace vectoriel H_1 de H, formé des $x \in H$ tels que $\lim_{\mathfrak{F}} V_i(x) = \hat{x}$ existe dans H. Le résultat principal obtenu est que H_1 contient la bande engendrée par le sous-cône convexe B^+ de H^+, composé des $x \in H^+$ tels que $\lim_{\mathfrak{F}} V_i\, x = x$.

Ce résultat se démontre par l'intermédiaire de deux lemmes :

LEMME 1. - <u>Soit</u> $x \in H$ <u>tel qu'il existe une valeur d'adhérence faible</u> $y \in H$, <u>suivant le filtre</u> $\mathfrak{F}$, <u>pour l'application</u> $i \longmapsto V_i(x)$. <u>Alors</u> :

1° <u>Pour tout</u> $i \in I$, $V_i(x) = V_i(y)$;

2° $\lim_{\mathfrak{F}} V_i(x) = y$.

Démonstration.

1° Soit $\mathcal{U}$ un filtre sur I , plus fin que $\mathfrak{F}$, tel que $\lim_{\mathcal{U}} V_j(x) = y$. On a

$$V_i(y) = V_i(\lim_{\mathcal{U}} V_j(x)) = \lim_{\mathcal{U}} V_j(V_i(x)) = V_i(x) \quad .$$

2° Soit B le sous-espace vectoriel de H formé des $x \in H$ tels que

$$\lim_{\mathfrak{F}} V_i(x) = x \quad .$$

La famille (V_i) étant équicontinue, B est un sous-espace vectoriel fermé de H qui contient les espaces vectoriels $V_i(H)$, et d'après 1°, y est dans l'adhérence faible de B , donc $y \in B$. Par suite,

$$\lim_{\mathfrak{F}} V_i(y) = \lim_{\mathfrak{F}} V_i(x) = y \quad .$$

LEMME 2. - Soit $x \in H_1 \cap H^+$ (c'est-à-dire que $\lim_{\mathfrak{F}} V_i(x) = \hat{x}$ existe dans H). Pour tout $y \in H^+$, $0 \leqslant y \leqslant x$, $y \in H_1$.

Démonstration. - En raison des hypothèses faites sur H , pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I , plus fin que $\mathfrak{F}$, $\lim_{\mathcal{U}} V_j(y) = z$ existe dans H . D'après le lemme 1, $\lim_{\mathfrak{F}} V_i(y) = \hat{y}$ existe dans H , donc $y \in H_1$.

Pour terminer, remarquons que $H_1 \cap H^+$ est fermé car H^+ est complet et la famille $(V_i)_{i \in I}$ est équicontinue, donc $H_1 \cap H^+$ contient les bornes supérieures de sous-ensembles majorés de $H_1 \cap H^+$.

On peut alors énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - Soit H_1 le sous-espace vectoriel de H formé des $x \in H$ tels que $\lim_{\mathfrak{F}} V_i(x) = \hat{x}$ existe dans H . L'espace H_1 contient la bande engendrée par $H_1 \cap H^+$.

L'application $x \to \hat{x}$ est alors un projecteur continu positif de H_1 dans lui-même.

3. Familles résolvantes dans les espaces de type L^1 .

Dans cette partie, on se donne un espace mesuré $(X , \mathcal{B} , \sigma)$ où σ est une mesure positive, σ-additive, σ-finie, sur $(X , \mathcal{B})$, et une famille résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ d'opérateurs linéaires continus positifs de $L^1(X , \mathcal{B} , \sigma)$ dans lui-même. On écrira plus simplement $L^1(\sigma)$ au lieu de $L^1(X , \mathcal{B} , \sigma)$.

On suppose que :

(a) La bande engendrée par $V_\lambda(L^1_+(\sigma))$ dans l'espace complètement réticulé $L^1(\sigma)$ est identique à $L^1(\sigma)$ tout entier, pour un certain $\lambda > 0$;

(b) La famille d'opérateurs $(\lambda V_\lambda)_{\lambda>0}$ est équicontinue, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive M avec $\|\lambda V_\lambda\| \leqslant M$, au sens de la norme des opérateurs.

On rappelle que toute forme linéaire positive sur $L^\infty(\sigma)$, majorable par un élément de $L^1_+(\sigma)$, s'identifie à un élément de $L^1_+(\sigma)$, de sorte que les résultats du chapitre précédent sont applicables.

En particulier, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 1.

1° Pour toute $\varphi \in L^1(\sigma)$, $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda\, \varphi = \hat{\varphi}$ existe dans $L^1(\sigma)$;

2° Pour toute $\varphi \in L^1(\sigma)$ et tout $\lambda > 0$, $V_\lambda\, \varphi = V_\lambda\, \hat{\varphi}$;

3° L'opérateur linéaire $\varphi \longmapsto \hat{\varphi}$ est un projecteur continu positif de $L^1(\sigma)$ dans lui-même.

En général, l'opérateur $V_0 = \lim_{\lambda\to 0} V_\lambda$ n'est pas défini dans $L^1(\sigma)$ tout entier, mais on peut introduire un sous-espace vectoriel réticulé de $L^1(\sigma)$ sur lequel on définira V_0 .

DÉFINITION 2. - On appellera domaine de V_0 , qu'on notera $\mathcal{D}(V_0)$, le sous-espace de $L^1(\sigma)$ formé des éléments φ tels que

$$\sup_{\lambda\to 0} V_\lambda(|\varphi|) = \lim_{\lambda\to 0} V_\lambda(|\varphi|)$$

existe dans $L^1(\sigma)$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(V_0)$, on a encore

$$V_0\, \varphi - V_\lambda\, \varphi = \lambda V_\lambda\, V_0\, \varphi = \lambda V_0\, V_\lambda\, \varphi \quad .$$

Sur $\mathcal{D}(V_0)$, l'opérateur V_0 a certaines propriétés de continuité qu'on peut résumer dans le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - Soit $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{D}(V_0)$, filtré par un filtre $\mathfrak{F}$, et borné dans $\mathcal{D}(V_0)$. Si $\lim_{\mathfrak{F}} x_\alpha = x$ existe dans $L^1(\sigma)$, alors

$$V_0(x) = \lim_{\mathfrak{F}} V_0(x_\alpha) \quad .$$

Démonstration. - Soit $x \in L^1(\sigma)$ tel que

$$|x_\alpha| \leqslant x \qquad \text{pour tout } \alpha \in A \ , \quad x \in \mathcal{D}(V_0) \quad .$$

On a alors

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda V_\lambda V_0 x = \lim_{\lambda\to 0} V_0 x - V_\lambda(x) = 0 \quad .$$

Sur l'ensemble A , V_0 est donc limite uniforme des opérateurs V_λ , car

$$|V_0(x_\alpha) - V_\lambda(x_\alpha)| \leqslant V_0(x) - V_\lambda(x) = \lambda V_\lambda V_0 x \quad ,$$

ce qui démontre le théorème.

PROPOSITION 4. - <u>Si</u> $\varphi \in \mathcal{D}(V_0)$, $\hat{\varphi} = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda \varphi$ <u>est aussi dans</u> $\mathcal{D}(V_0)$, <u>et</u> $V_0 \varphi = V_0 \hat{\varphi}$.

<u>Démonstration</u>. - On peut se ramener au cas où φ est positive. On a alors

$$V_0 \varphi = \sup_\alpha V_\alpha \varphi = \sup_\alpha V_\alpha \hat{\varphi} = V_0 \hat{\varphi} \quad .$$

DÉFINITION 5. - <u>On dira que</u> $\varphi \in L^1_+(\sigma)$ <u>est excessive, si</u> $\varphi = \sup_\lambda \lambda V_\lambda \varphi$.

<u>Exemple</u> : Si $\varphi \in \mathcal{D}_+(V_0)$, $V_0 \varphi$ est excessive.

Nous pouvons énoncer maintenant le théorème principal de cette étude.

THÉORÈME 6. - <u>Soient</u> u_1 , u_2 <u>excessives,</u> $g \in \mathcal{D}_+(V_0)$, <u>telles que</u> $u_1 + u_2 = V_0 g$. <u>Alors</u>

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(u_1 - \lambda V_\lambda u_1) = g_1$$

<u>existe dans</u> $L^1(\sigma)$, $g_1 \in \mathcal{D}(V_0)$ <u>et</u> $u_1 = V_0 g_1$.

<u>Démonstration</u>. - Posons

$$g_1^\lambda = \lambda(u_1 - \lambda V_\lambda u_1) \quad ,$$

$$g_2^\lambda = \lambda(u_2 - \lambda V_\lambda u_2) \quad .$$

On a

$$g_1^\lambda + g_2^\lambda = \lambda(u_1 + u_2 - \lambda V_\lambda(u_1 + u_2))$$

$$= \lambda(V_0 g - \lambda V_\lambda V_0 g) = \lambda V_\lambda g \quad .$$

On sait que $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda g = \hat{g}$, de sorte qu'on peut trouver φ_1 et φ_2 valeurs d'adhérences faibles de (g_1^λ) et (g_2^λ) , lorsque λ tend vers $+\infty$.

Montrons que $u_1 = V_0 \varphi_1 = \sup_\alpha V_\alpha \varphi_1$. On sait que $\hat{g} \in \mathcal{D}(V_0)$, donc aussi φ_1

et φ_2 majorées par $\hat{g}$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\underset{\sim}{R}^+$ sans point adhérent, tel que $\varphi_1 = \lim\limits_{\mathcal{U}} g_1^\lambda$, et soit $\theta \in L^\infty(\sigma)$. On a

$$\langle \theta , V_\alpha \varphi_1 \rangle = \langle \theta V_\alpha , \varphi_1 \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle \theta , V_\alpha g_1^\lambda \rangle \quad .$$

On peut écrire, avec $\lambda > \alpha$,

$$V_\alpha g_1^\lambda = \lambda V_\alpha (u_1 - (\lambda - \alpha) V_\lambda u_1) - \lambda_\alpha V_\alpha V_\lambda u_1 \quad .$$

D'après l'équation résolvante, on obtient

$$V_\alpha g_1^\lambda = \lambda V_\lambda u_1 - \lambda_\alpha V_\alpha V_\lambda u_1 \quad ,$$

et en faisant tendre λ vers $+\infty$, pour $\theta \in L^\infty(\sigma)$,

$$\langle \theta , V_\alpha \varphi_1 \rangle = \langle \theta , u_1 - \alpha V_\alpha u_1 \rangle \quad ,$$

de sorte que

$$V_\alpha \varphi_1 = u_1 - \alpha V_\alpha u_1 \quad .$$

De $u_1 + u_2 = V_0 g$, on tire

$$\alpha V_\alpha u_1 \leqslant \alpha V_\alpha V_0 g = V_0 g - V_\alpha g \quad ,$$

et en faisant tendre α vers 0 ,

$$V_0 \varphi_1 = \sup_\alpha V_\alpha \varphi_1 = \sup_\alpha u_1 - \alpha V_\alpha u_1 = u_1 \quad .$$

Si l'on recalcule g_1^λ , on obtient

$$g_1^\lambda = \lambda(u_1 - \lambda V_\lambda u_1) = \lambda(V_0 \varphi_1 - \lambda V_\lambda V_0 \varphi_1) = \lambda V_\lambda \varphi_1 \quad ,$$

de sorte que

$$\lim_{\lambda \to \infty} g_1^\lambda = \hat{\varphi}_1 = \varphi_1 \quad .$$

L'élément φ_1 , pris d'abord comme valeur d'adhérence faible de (g_1^λ) , est donc l'élément g_1 de l'énoncé du théorème.

4. Densité relative de deux potentiels.

Soient $(X , \mathcal{B})$ un espace mesurable, B (resp. B^+) l'espace des fonctions numériques mesurables (resp. mesurables et $\geqslant 0$). On dira qu'un opérateur N défini sur B^+ est un noyau positif sur $(X , \mathcal{B})$, si :

(a) Pour tout $x \in X$, l'application définie sur B^+ par $\varphi \longmapsto N\varphi(x)$ est une mesure σ-additive et σ-finie ;

(b) Pour toute $\varphi \in B^+$, $N\varphi$ (qui peut prendre la valeur $+\infty$) est $\mathcal{B}$-mesurable ;

(c) Sur le sous-espace vectoriel H de B formé des φ telles que

$$N(|\varphi|)(x) < +\infty \,, \qquad \forall\, x \in X \,,$$

on définit $N\varphi = N\varphi^+ - N\varphi^-$, de sorte que N est un opérateur linéaire positif de H dans B.

On se donne maintenant une famille $(V_\lambda)_{\lambda \geqslant 0}$ de noyaux positifs sur $(X, \mathcal{B})$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) Il existe $f \in B^+$, $f(x) > 0$ pour tout $x \in X$, telle que $0 < (V_0 f)(x) < +\infty$ pour tout $x \in X$;

(b) Pour toute $\varphi \in B^+$, et $\lambda, \mu \geqslant 0$, $\lambda \geqslant \mu$,

$$\begin{aligned} V_\mu \varphi &= V_\lambda \varphi + (\lambda - \mu) V_\lambda V_\mu \varphi \\ &= V_\lambda \varphi + (\lambda - \mu) V_\mu V_\lambda \varphi \,. \end{aligned}$$

Ce luxe de définitions est nécessaire si l'on veut éviter de se restreindre aux noyaux positifs bornés et aux familles résolvantes sous-markoviennes.

Une famille $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ de noyaux positifs qui satisfait à la condition (b) précédente sera encore appelée une famille résolvante.

On va montrer qu'une telle donnée permet de définir toute une classe naturelle de familles résolvantes dans des espaces de type L^1.

Pour une mesure positive σ sur $(X, \mathcal{B})$, on définit la mesure σV_0 par

$$\langle \sigma V_0 , \varphi \rangle = \langle \sigma , V_0 \varphi \rangle \qquad \text{pour toute } \varphi \in B \,.$$

Le lemme suivant permet d'induire naturellement une extension de la famille $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ à $L^1(\sigma V_0)$.

LEMME 1. - <u>Si l'on désigne par</u> $\|\cdot\|$, <u>la norme de</u> $L^1(\sigma V_0)$, <u>alors, pour toute</u> $\varphi \in B$,

$$\|\lambda V_\lambda \varphi\| \leqslant \|\varphi\| \,.$$

<u>Démonstration</u>. - D'après l'équation résolvante, $V_0 \varphi = V_\lambda \varphi + \lambda V_0 V_\lambda \varphi$, et lorsque $\varphi \in B^+$,

$$\langle \sigma V_0 , \lambda V_\lambda \varphi \rangle = \langle \sigma , \lambda V_0 V_\lambda \varphi \rangle \leqslant \langle \sigma , V_0 \varphi \rangle = \langle \sigma V_0 , \varphi \rangle ,$$

d'où $\|\lambda V_\lambda \varphi\| \leqslant \|\varphi\|$.

COROLLAIRE 2. - Si $\varphi_1 , \varphi_2 \in B$ sont égales σV_0-presque partout, $\lambda V_\lambda \varphi_1 = \lambda V_\lambda \varphi_2$ σV_0-presque partout.

Soit alors $g \longmapsto \dot{g}$ l'application canonique de B dans $L^1(\sigma V_0)$.

DÉFINITION 3. - On appellera extension canonique à $L^1(\sigma V_0)$ de la famille $(V_\lambda)_{\lambda>0}$, la famille $(\widetilde{V}_\lambda)_{\lambda>0}$ d'opérateurs linéaires continus de $L^1(\sigma V_0)$ dans $L^1(\sigma V_0)$, définis par

$$\widetilde{V}_\lambda(\dot{g}) = (V_\lambda \overset{\bullet}{} g) \qquad \text{pour toute } g \in B \cap \mathcal{L}^1(\sigma V_0) .$$

On vérifie facilement l'équation résolvante

$$\widetilde{V}_\lambda - \widetilde{V}_\mu = (\mu - \lambda)\, \widetilde{V}_\lambda \widetilde{V}_\mu = (\mu - \lambda)\, \widetilde{V}_\mu \widetilde{V}_\lambda .$$

De même, si $\varphi \in B^+$ est telle que $\langle \sigma V_0 , V_0 \varphi \rangle < +\infty$, alors

$$\sup_\lambda \widetilde{V}_\lambda \dot{\varphi} = \widetilde{V}_0 \dot{\varphi} = (V_0 \overset{\bullet}{} \varphi) .$$

On rappelle que $u \in B^+$ est dite excessive par rapport à la résolvante (V_λ) , si $u = \sup_\lambda \lambda V_\lambda u$. Si u est excessive, $\dot{u}$ est aussi excessive dans $L^1(\sigma V_0)$ par rapport à la famille résolvante $(\widetilde{V}_\lambda)_{\lambda>0}$. On a supposé que $V_0 f(x) > 0$ pour tout $x \in X$, par suite la bande engendrée par $V_\lambda(L^1_+(\sigma V_0))$ dans $L^1(\sigma V_0)$ est $L^1(\sigma V_0)$ tout entier, pour tout $\lambda > 0$. On peut donc énoncer, pour toute mesure $\sigma \geqslant 0$ sur $(X , \mathcal{B})$, le théorème suivant :

THÉORÈME 4. - Soient $u_1 , u_2 \in B^+$ deux fonctions excessives, telles que $u_1 + u_2 = V_0 g$ où $g \in B^+ \cap \mathcal{L}^1(\sigma V_0)$. On désigne par $\mathfrak{F}$ le filtre des complémentaires des parties bornées de $\underset{\sim}{R}^+$.

1° $\lim_{\mathfrak{F}} \lambda(u_1 - \lambda V_\lambda u_1)$ existe dans $\mathcal{L}^1(\sigma V_0)$.

2° Pour toute $\varphi \in B^+$, $\lim_{\mathfrak{F}} \lambda V_\lambda \varphi$ existe dans $\mathcal{L}^1(\sigma V_0)$.

(Ces limites sont prises au sens de la semi-norme $\varphi \longmapsto \int |\varphi| \, d\sigma V_0$.)

3° Il existe $\varphi_1 \in B^+$ telle que $(u_1 - V_0 \varphi_1)$ soit excessive et

$$\langle \sigma , u_1 - V_0 \varphi_1 \rangle = 0 .$$

Démonstration. - 1° et 2° résultent de théorèmes déjà démontrés. D'après 1°, on peut trouver une suite (λ_k) tendant vers $+\infty$, telle que la suite

$$g_k = \lambda_k(u_1 - \lambda_k V_{\lambda_k} u_1)$$

converge pour l'ordre dans $\mathcal{L}^1(\sigma V_0)$, de sorte que, pour tout λ,

$$\langle \sigma V_\lambda , (u_1 - V_0(\liminf g_k)) \rangle = 0 \quad .$$

Posons $h_k = \inf_{n \geq k} g_n$, $\varphi_1 = \sup h_k$. On a

$$\langle \sigma , \lambda V_\lambda u_1 - \lambda V_\lambda V_0 \varphi_1 \rangle = 0 \quad ,$$

et en faisant tendre λ vers $+\infty$,

$$\langle \sigma , u_1 - V_0 \varphi_1 \rangle = 0 \quad .$$

On a encore $\lambda_k V_{\lambda_k} u_1 = V_0(g_k)$, de sorte que $v_n^k = \lambda_k V_{\lambda_k} u_1 - V_0(h_n)$ est excessive pour $k > n$, et l'on a

$$t = u_1 - V_0 \varphi_1 = \inf_n [\sup_k v_n^k] \quad ,$$

de sorte que t est surmédiane, et $t + V_0 \varphi_1 = u_1$, par suite t est aussi excessive, puisque $V_0 \varphi_1$ et u_1 le sont.

On peut maintenant utiliser les propriétés des filtres rapides.

THÉORÈME 5. - Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre rapide sur $\mathbb{N}$, et soient $u_1 , u_2 \in B^+$, excessives, $u_1 + u_2 = V_0 g$, $V_0 g(x) < +\infty$, $\forall x \in X$. Les fonctions g_1, g_2 définies par

$$g_1 = \lim_{\mathcal{U}} p(u_1 - pV_p u_1) \quad ,$$

$$g_2 = \lim_{\mathcal{U}} p(u_2 - pV_p u_2) \quad ,$$

(il s'agit ici de limites simples) sont mesurables pour toutes les mesures de la forme σV_0, où σ est une mesure positive sur $(X , \mathcal{B})$, et l'on a

$$u_1 = V_0 g_1 , \qquad u_2 = V_0 g_2 \quad .$$

COROLLAIRE 6. - Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre rapide sur $\mathbb{N}$, pour toute $\varphi \in B^+$, $V\varphi(x) < +\infty$, $\forall x \in X$, $\lim_{\mathcal{U}} pV_p \varphi = \hat{\varphi}$ est mesurable pour toutes les mesures

σV_0 , <u>où</u> σ <u>est une mesure positive sur</u> $(X , \mathcal{B})$, <u>et</u>

$$V_\lambda \varphi = V_\lambda \hat{\varphi} , \qquad \underline{\text{pour tout}} \ \lambda \geqslant 0 .$$

On peut donc dire que $g_1 = \lim\limits_{\mathcal{U}} p(u_1 - pV_p u_1)$ représente la densité de u_1 par rapport au potentiel $V_0 1$.

5. Extensions diverses et applications.

Soient $(X , \mathcal{B})$ un espace mesurable, $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille résolvante de noyaux positifs sur $(X , \mathcal{B})$. On rappelle que $u \in B^+$ est dite α-surmédiane par rapport à la résolvante (V_λ) , pour $\alpha > 0$, si

$$\lambda V_{\lambda+\alpha} u \leqslant u , \qquad \text{pour tout} \ \lambda > 0 ,$$

et u est α-excessive, si u est α-surmédiane et $u = \sup\limits_\lambda \lambda V_{\lambda+\alpha} u$.

On dira que u , α-excessive, est un α-potentiel pur, s'il existe v α-excessive et $\varphi \in B^+$, $V\varphi < +\infty$, tels que $u + v = V_\alpha \varphi$.

Nous supposerons désormais que, pour un certain $\alpha > 0$, il existe $u \in B^+$, u α-surmédiane et $u(x) > 0$, $\forall x \in X$.

<u>Propriétés immédiates et exemples</u> (cf. MEYER [3]).

Si $v \in B^+$ est α-surmédiane (resp. α-excessive, α-potentiel pur), v est aussi β-surmédiane (resp. β-excessive, β-potentiel pur) pour tout $\beta > \alpha$, et l'application $\lambda \longmapsto \lambda V_{\lambda+\beta} v$ est croissante.

Si $\varphi \in B^+$ et $V_\alpha \varphi \in B^+$, $V_\alpha \varphi$ est un α-potentiel pur.

Par extension, nous dirons que $v \in B^+$ est un 0-potentiel pur, si v est un α-potentiel pur pour tout $\alpha > 0$.

LEMME 1. - <u>A</u> $u \in B^+$, <u>α-surmédiane,</u> $u(x) > 0$, $\forall x \in X$, <u>on associe la fonction</u> $\hat{u} = \sup\limits_\lambda \lambda V_{\lambda+\alpha} u$, <u>régularisée α-excessive de</u> u . <u>Pour tout</u> β , <u>on a</u>

$$V_\beta(u - \hat{u}) = 0 \qquad \underline{\text{et}} \qquad (V_\beta u)(x) > 0$$

<u>pour tout</u> x <u>tel que</u> $\hat{u}(x) > 0$.

<u>Démonstration</u>. - Supposons d'abord $\beta > \alpha$. On a alors

$$V_\beta u = V_{\lambda+\beta} u + V_\beta[\lambda V_{\lambda+\beta} u] ,$$

et comme $\hat{u} = \sup\limits_\lambda \lambda V_{\lambda+\beta} u \leqslant u$, on a

$$V_\beta \hat{u} = V_\beta u \qquad \text{et} \qquad V_\beta u \in B^+ ,$$

donc

$$V_\beta(u - \hat{u}) = 0 \quad .$$

Posons alors $\varphi = u - \hat{u}$, et soit $\mu \leqslant \alpha$, $\mu > 0$, et $\beta > \alpha$. On a toujours, d'après l'équation résolvante,

$$V_\mu \varphi = V_\beta \varphi + (\beta - \mu) V_\mu(V_\beta \varphi) \quad ,$$

de sorte que $V_\beta \varphi = 0$ implique bien $V_\mu \varphi = 0$.

Supposons maintenant que $(V_\beta u)(x) = 0$ pour un $\beta > 0$. On a alors

$$(V_\beta u)(x) \geqslant (V_\mu u)(x) = 0 \qquad \text{pour tout } \mu \geqslant \beta \quad ,$$

donc aussi

$$0 = \hat{u}(x) = \lim_{\lambda\to\infty} (\lambda V_{\lambda+\alpha} u)(x) \quad .$$

Tout se passe donc comme si les noyaux (V_λ) avaient d'abord été définis sur l'ensemble $\{\hat{u} > 0\}$, et prolongés par 0 dans l'ensemble $\{\hat{u} = 0\}$.

Nous supposerons désormais que $\{\hat{u} > 0\} = X$. On peut alors remarquer que, pour tout $\beta \geqslant \alpha$, la famille résolvante $(V_{\lambda+\beta})_{\lambda>0}$ satisfait aux hypothèses du paragraphe précédent. On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit $v \in B^+$ un β-potentiel pur $(\beta > \alpha)$, et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre rapide sur $\mathbb{N}$. Dans ces conditions,

$$\lim_{\mathcal{U}} p(v - pV_{p+\beta} v) = \varphi_\alpha$$

est mesurable pour toutes les mesures σV_β , où σ est une mesure positive sur $(X , \mathcal{B})$ telle que $\int v \, d\sigma < + \infty$, et l'on a $v = V_\beta(\varphi_\beta)$.

COROLLAIRE 3. - Soient $v \in B^+$ un β_0-potentiel pur, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre rapide sur $\mathbb{N}$. On définit encore, pour tout $\beta > 0$,

$$\varphi_\beta = \lim_{\mathcal{U}} p(v - pV_{p+\beta} v) \quad .$$

Alors, pour tout β , $\beta' > 0$, $\varphi_\beta - \varphi_{\beta'} = (\beta - \beta')v$.

Démonstration. - On a

$$\varphi_\beta - \varphi_{\beta_0} = \lim_{\mathcal{U}} p^2[V_{p+\beta_0} v - V_{p+\beta} v] \quad .$$

D'après l'équation résolvante, on a, pour p assez grand,

$$V_{p+\beta_0}\, v - V_{p+\beta}\, v = (\beta - \beta_0)\, V_{p+\beta_0}\, V_{p+\beta}\, v \quad .$$

D'autre part, puisque v est β_0-excessive,

$$\lim_{p\to\infty} p(p + \beta - \beta_0)\, V_{p+\beta}\, V_{p+\beta_0}\, v = v \quad .$$

Les nombres β et β_0 sont fixés, donc

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p^2}\, p(p + \beta - \beta_0) = 1 \quad ,$$

de sorte que

$$\lim_{\mathcal{U}} p^2[V_{p+\beta_0}\, v = V_{p+\beta}\, v] = (\beta - \beta_0)v = \varphi_\beta - \varphi_{\beta_0} \quad .$$

COROLLAIRE 4 (<u>avec les notations précédentes</u>). - <u>Soit</u> $v \in B^+$ <u>un</u> 0-<u>potentiel</u>. <u>Si l'on pose</u> $\varphi_0 = \lim_{\mathcal{U}} p(v - pV_p\, v)$, <u>on a</u>

$$v = V_\alpha(\varphi_0 + \alpha v) \quad ,$$

<u>et si</u> $\inf_\alpha \alpha V_\alpha\, v = 0$, <u>alors</u>

$$v = V_0(\varphi_0) = \sup_\alpha V_\alpha\, \varphi_0 \quad .$$

<u>Exemples d'application</u>.

Soient X un espace compact, $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille résolvante sous-markovienne de noyaux positifs de $\mathcal{C}(X)$ dans $\mathcal{C}(X)$. On suppose que, pour un certain $\lambda > 0$, l'ensemble des fonctions continues λ-excessives est stable par enveloppe inférieure, et que 1 est λ-excessive. Introduisons alors la relation d'équivalence R dans X , $x \sim y$ si, pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$,

$$V_\lambda\, f(x) = V_\lambda\, f(y) \quad ,$$

et désignons par Y l'espace compact quotient obtenu, π l'application canonique de X sur Y , θ l'application qui, à toute fonction f sur X , constante sur les classes d'équivalence suivant R , fait correspondre canoniquement une fonction $\theta(f)$ sur le quotient Y . On obtient ainsi une nouvelle famille résolvante sous-markovienne (U_λ) sur Y en posant, pour $g \in \mathcal{C}(Y)$,

$$U_\lambda\, g = \theta[V_\lambda\, g \circ \pi] \quad .$$

On remarque que, si $f \in \mathcal{C}^+(X)$ est α-excessive, f est constante sur les classes d'équivalences suivant R, de sorte qu'il est indifférent de dire que $f \in \mathcal{C}(X)$ est α-excessive par rapport à la résolvante (V_λ), ou que $\theta(f)$ est α-excessive par rapport à la résolvante (U_λ).

Si l'on utilise les ultrafiltres rapides, on obtient alors le résultat suivant :

PROPOSITION 5. - Il existe une application $T : y \longmapsto T_y$ de Y dans $\mathfrak{M}^1(X)$, telle que :

(a) Pour tout $y \in Y$, T_y est portée par $\pi^{-1}(y)$;

(b) Pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$, $T^* f : y \longmapsto \int f \, dT_y$ est mesurable pour toutes les mesures σU_λ, $\sigma \in \mathfrak{M}^+(Y)$;

(c) Pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$ et tout λ,

$$V_\lambda f = (U_\lambda T^* f) \circ \pi \quad ;$$

(d) Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre rapide sur $\mathbb{N}$, on peut définir T par

$$\langle T_y , f \rangle = \lim_{\mathcal{U}} pV_p f(x) , \qquad \text{où } \pi(x) = y \quad .$$

La partie difficile de la proposition repose sur le lemme suivant :

LEMME 6. - Pour tout $g \in \mathcal{C}(Y)$ et tout $x \in Y$,

$$\lim_{p\to\infty} (pU_p g)(x) = g(x) \quad .$$

Démonstration. - Si (C_λ) désigne le cône convexe des fonctions continues λ-excessives sur Y, $(C_\lambda - C_\lambda)$ est réticulé, sépare les points, contient les constantes, donc, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, $(C_\lambda - C_\lambda)$ est partout dense dans $\mathcal{C}(Y)$.

On sait que, pour toute $\varphi \in C_\lambda$,

$$\lim_{p\to\infty} pU_p \varphi = \varphi \quad ,$$

et comme la famille (pU_p) est équicontinue, on a aussi

$$\lim_{p\to\infty} pU_p \varphi = \varphi \qquad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{C}(Y) \quad .$$

Démonstration de la proposition 6. - Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre rapide sur $\mathbb{N}$. Pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$, posons

$$P(f) = \hat{f} = \lim_{\mathcal{U}} pV_p f \quad ,$$

P est un opérateur linéaire positif, et $P(f \circ \pi) = f \circ \pi$ pour toute $f \in \mathcal{C}(Y)$, de sorte que la mesure T_y définie pour $y \in Y$, et $f \in \mathcal{C}(X)$, par

$$\langle T_y , f \rangle = (Pf)(x) \qquad \text{où} \quad x \in \pi^{-1}(y) \quad ,$$

est telle que $\pi(T_y) = \varepsilon_y$.

Enfin, pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$, $\hat{f}$ est mesurable pour toutes les mesures σV_λ où $\sigma \in \mathfrak{M}^+(X)$. Si $\nu \in \mathfrak{M}^+(Y)$, il existe une mesure $\sigma \in \mathfrak{M}^+(X)$ telle que $\pi(\sigma) = \nu$, de sorte que $\theta(\hat{f})$ est mesurable pour νU_λ , dès qu'elle l'est pour σV_λ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave). - Deux classes remarquables d'ultrafiltres sur $\underset{\sim}{\mathbb{N}}$, Bull. Sc. math., Série 2, t. 92, 1968, p. 143-153.

[2] LION (Georges). - Famille d'opérateurs et frontières en théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, fasc. 2, p. 389-453 (Thèse Sc. math. Paris, 1966).

[3] MEYER (Paul-André). - Probabilités et potentiel. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1318 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 14).