Diederich Hinrichsen

Représentations intégrales et espaces fonctionnels nucléaires

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 11 (1966-1967), exp. nº 14, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1966-1967__11__A8_0>

REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES ET ESPACES FONCTIONNELS NUCLÉAIRES

par Diederich HINRICHSEN

Soit G le disque unité ouvert du plan complexe $\underset{\sim}{C}^1$, et soit $\mathfrak{A}$ l'algèbre de toutes les fonctions continues complexes sur $\overline{G}$, qui sont holomorphes à l'intérieur ; alors, pour toute $f \in \mathfrak{A}$, on a la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\sigma(\xi) = \int f\, d\mu_z \qquad (z \in G) \quad .$$

La famille (μ_z) des mesures $\mu_z = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\xi - z}\, d\sigma(\xi)$ remplit les conditions suivantes :

1° Toute μ_z est concentrée sur la frontière de Šylov $S = S_{\mathfrak{A}}(\overline{G})$ de $\overline{G}$ par rapport à $\mathfrak{A}$;

2° Chaque μ_z $(z \in G)$ représente z par rapport à $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire

$$f(z) = \int f\, d\mu_z \qquad (f \in \mathfrak{A}\ ,\ z \in G) \quad ;$$

3° L'application $z \to \mu_z$ est scalairement holomorphe, c'est-à-dire : pour toute fonction complexe continue f sur la frontière topologique ∂G, l'application $z \to \mu_z(f)$ est holomorphe sur G ;

4° Les mesures μ_z sont absolument continues par rapport à une certaine mesure σ, et on peut choisir les densités $Q(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i(\xi - z)}$ de $d\mu_z$ par rapport à $d\sigma$, de manière que les applications partielles $z \to Q(z, \xi)$ soient analytiques sur G pour tout $\xi \in S$, et que les applications $\xi \to Q(z, \xi)$ sur S soient σ-essentiellement bornées pour tout $z \in G$.

Dès 1935, on a tenté de généraliser la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes de plusieurs variables. En 1962 et 1964, on a réussi à démontrer que, pour tout domaine relativement compact d'un espace analytique séparable, il existe une famille de mesures complexes qui satisfont aux conditions 1° à 4°. Cette famille n'est d'ailleurs pas déterminée de façon unique, en général.

Or, on sait que la frontière de Šilov contient encore des points superflus. Les valeurs d'une fonction complexe, continue sur la fermeture d'un domaine relativement compact et holomorphe à l'intérieur, sont déjà déterminées par sa restriction à la frontière fine. Donc, on peut poser la question de la possibilité de trouver une famille de mesures remplissant les conditions 1° à 4°, qui soient en plus concentrées sur la frontière fine du domaine par rapport à l'algèbre $\mathfrak{A}$.

Dans la théorie des fonctions harmoniques, on a un problème analogue. Soit G un domaine relativement compact dans un espace harmonique $(Y , \mathcal{H})$ au sens de BAUER[1]. Soit H l'espace vectoriel

$$\{h \in \mathcal{C}(\overline{G} , \underset{\approx}{R}) \; ; \; \mathrm{rest}_G \, h \in \mathcal{H}(G)\} \quad .$$

Alors, les mesures harmoniques ρ_x^G donnent une représentation intégrale scalairement harmonique de $\overline{G}$ par rapport à H. Mais on sait, dans le cas de l'équation de la chaleur, que les mesures harmoniques ne sont pas, en général, concentrées sur l'ensemble des points réguliers, donc pas non plus sur la frontière fine. La question se pose de savoir s'il existe d'autres mesures ν_x éventuellement non positives, portées par la frontière fine, telles que la famille (ν_x) satisfasse aux conditions 1° à 4°.

En raison de l'analogie de ces deux problèmes, il serait convenable de trouver une méthode qui permettrait de les traîter ensemble. Dans ce but, nous considérons une situation plus abstraite, qui est adoptée dans toute la suite.

Soit $\underset{\approx}{K}$, le corps des scalaires, identique au corps $\underset{\approx}{R}$ des nombres réels ou au corps $\underset{\approx}{C}$ des nombres complexes. Soient T un espace compact, X un sous-ensemble ouvert et partout dense dans T, H un sous-espace de $\mathcal{C}(T , \underset{\approx}{K})$, et E un sous-espace de $\mathcal{C}(X , \underset{\approx}{K})$, qui contient $\mathrm{rest}_X H$. Soit enfin $X_0 \subset T$ une frontière de T par rapport à H. Il est clair que, dans le cas des deux problèmes cités, une telle situation existe. On se demande, alors, sous quelles conditions existe une application $\mu : x \to \mu_x$ de X dans $\mathfrak{M}(\overline{X_0} , \underset{\approx}{K})$ telle que :

1° Chaque μ_x $(x \in X)$ est concentrée sur X_0 ;

2° $\mu_x(h) = h(x)$, pour tout $h \in H$ et tout $x \in X$;

3° μ est E-adaptée, c'est-à-dire que $x \to \mu_x(f)$ $(x \in X)$ est dans E pour toute $f \in \mathcal{C}(\overline{X_0} , \underset{\approx}{K})$.

Ce problème est un problème de factorisation. Pour montrer cela, soient M l'espace de Banach $\{\mu \in \mathfrak{M}(T , \underset{\approx}{K}) \; ; \; \mu \text{ portée par } X_0\}$, muni de la norme habituelle, H' le dual topologique de l'espace normé H, muni de la norme uniforme, p l'homomorphisme canonique de M sur H', et φ l'application qui assigne à tout $x \in X$ la forme linéaire $\varphi_x : h \to h(x)$ sur H. Alors, ce qu'on cherche, c'est une factorisation E-adaptée μ de φ par rapport à p :

$$\varphi = \mu \circ p \quad .$$

Nous indiquons d'abord quelques résultats qui seront utilisés plus tard pour montrer pour quelles frontières de T, par rapport à H, la factorisation de φ est possible. En premier lieu, il faut définir ce qu'est une frontière de T par rapport à H.

DÉFINITION 1. - $X_0 \subset T$ <u>est une</u> H-<u>frontière de</u> T <u>si, pour tout</u> $h \in \mathcal{R}H$, <u>on a</u>

$$\sup_{z\in T} h(z) = \sup_{x\in X_0} h(x) \quad .$$

On utilise maintenant la méthode de CHOQUET pour concentrer les mesures sur les H-frontières de T . Comme dans le cas où T est un convexe compact et H l'espace de toutes les formes affines continues, on introduit une structure d'ordre sur le cône des mesures positives. Soit $\mathbb{S}(H)$ le cône convexe

$$\{\sup(h_1 , \dots , h_n) \; ; \; h_1 , \dots , h_n \in \mathcal{R}H + \underset{\sim}{R}\} \quad .$$

Ce cône définit un quasi-ordre $\prec$ sur $\mathfrak{M}^+(T)$, non un ordre parce que H ne sépare pas nécessairement les points de T .

DÉFINITION 2. - $\mu \prec \nu \iff \mu(f) \leqslant \nu(f) \quad (\forall\ f \in \mathbb{S}(H))$.

De $\mu \prec \nu$, on peut déduire

$$\mu(h) = \nu(h) \qquad \text{et} \qquad \mu(|h|) \leqslant \nu(|h|) \qquad \text{pour tout} \quad h \in H \quad .$$

Les mesures maximales par rapport à ce quasi-ordre sont appelées "<u>mesures maximales</u>". Comme dans le cas d'un convexe compact, on peut démontrer que les mesures maximales sont portées par tout bord B_f $(f \in \mathbb{S}(H))$ avec

$$B_f = [f = \hat{f}] \, , \qquad \hat{f} = \inf_{\substack{g\geqslant f \\ g\in -\mathbb{S}(H)}} g \quad .$$

L'intersection de tous ces bords est identique à la frontière de Choquet de T par rapport à H . Le théorème d'existence de Choquet est aussi facile à démontrer sous les conditions présentes.

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> S <u>une</u> H-<u>frontière compacte de</u> T . <u>Alors, pour toute mesure</u> $\mu \in \mathfrak{M}^+(T)$, <u>il existe une mesure maximale</u> ν , <u>portée par</u> S , <u>avec</u> $\mu \prec \nu$.

<u>Démonstration</u>. - Par passage au quotient de T par la relation $h(x) = h(y)$, $\forall\ h \in H$.

De ce résultat, on déduit aussitôt un corollaire, qui est fondamental pour la solution de notre problème.

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> S <u>une</u> H-<u>frontière compacte de</u> T . <u>Alors, pour toute mesure</u> $\mu \in \mathfrak{M}(T , \underset{\sim}{K})$, <u>il existe une mesure</u> ν <u>sur</u> S <u>avec</u> $\nu(h) = \mu(h)$ <u>pour tout</u> $h \in H$, <u>telle que</u> $|\nu|$ <u>soit maximale dans</u> $\mathfrak{M}^+(T)$.

Démonstration. - Application de la proposition 1 aux parties réelles positives de μ .

On peut encore préciser ces résultats, mais nous laissons de côté ces précisions parce qu'elles ne sont pas utilisées dans nos applications.

Nous abordons maintenant le problème de factorisation indiqué ci-dessus. Pour le traîter, il est convenable de généraliser la notion de l'holomorphie faible de la manière suivante :

DÉFINITION 3. - Une application u de X dans un espace localement convexe séparé F est dite E-morphe, si, pour toute forme linéaire $y' \in F'$, la composition $y' \circ u$ est dans E . L'espace vectoriel de toutes ces applications est désigné par $E(X , F)$.

Pour étudier les applications E-morphes, on se sert surtout des résultats que fournit la théorie des espaces nucléaires. A l'aide de ces résultats, on démontre sans difficulté la caractérisation suivante, qui a des conséquences importantes :

PROPOSITION 3. - Soit E du type $\mathfrak{L}\mathfrak{F}$, nucléaire et complet, muni d'une $\mathfrak{S}$-topologie qui est plus fine que la topologie simple. Alors, pour qu'une application u de X dans un espace localement convexe complet F soit E-morphe, il faut et il suffit que u puisse être approchée par des fonctions de la forme

$$x \to \sum g_i(x)\, y_i \qquad (\text{avec } g_i \in E\ , \ y_i \in F\ )$$

uniformément sur les ensembles $S \in \mathfrak{S}$.

Démonstration. - La $\mathfrak{S}$-topologie sur $E(X , F)$ correspond à la topologie inductive ε sur $E \hat{\otimes} F$ par l'isomorphisme canonique de $E \hat{\otimes} F$ sur $E(X , F)$ (voir [8]).

Remarque. - Il n'est pas nécessaire, pour la validité de cette proposition, que X soit espace topologique (compact).

Pour obtenir des factorisations E-morphes, la théorie des espaces nucléaires fournit aussi les outils nécessaires. Le théorème suivant, qui est fondamental, est dû à GROTHENDIECK [8] :

THÉORÈME 4. - Soient X un ensemble, E un espace l. c. s. complet du type $\mathfrak{L}\mathfrak{F}$ de fonctions $X \to \underset{\sim}{K}$, dont la topologie est plus fine que la topologie simple. Soient, de plus, F_1 et F_2 deux espaces de Banach, et p une application

<u>linéaire continue surjective de</u> F_1 <u>sur</u> F_2 . <u>Alors l'application</u> $u \to p \circ u$ <u>de</u> $E(X , F_1)$ <u>dans</u> $E(X , F_2)$ <u>est surjective</u>.

Revenons maintenant à la situation du départ. Supposons que le sous-espace H de $\mathcal{C}(T , \underset{\sim}{K})$ soit muni d'une norme telle que, pour tout $x \in X$, la forme linéaire $\varphi_x : h \to h(x)$ sur H appartienne à l'espace de Banach H' , dual de H . Nous cherchons certaines factorisations E-morphes de l'application $\varphi : x \to \varphi_x$ de X dans H' . Pour qu'une telle factorisation existe, il est nécessaire que φ elle-même soit E-morphe.

DÉFINITION 4. - <u>La paire</u> (H , E) <u>est dite admissible, si l'application</u>

$$\varphi : x \to \varphi_x$$

<u>de</u> X <u>dans</u> H' <u>est</u> E-<u>morphe</u>.

Nous donnons d'abord quelques critères pour l'admissibilité de (H , E) , qui assurent en même temps la continuité de φ . Cette continuité est évidemment équivalente à l'équicontinuité de la boule unité H_1 de H sur X .

Soient τ la topologie de E , τ_s la topologie simple, et τ_k la topologie de la convergence compacte.

PROPOSITION 5. - <u>Soient</u> E <u>quasi-complet, et</u> τ <u>plus fine que</u> τ_s , <u>plus faible que</u> τ_k . <u>Soit</u> H_1 <u>équicontinue sur</u> X . <u>Alors</u> (H , E) <u>est admissible</u>.

<u>Démonstration</u>. - Pour tout $y'' \in H''$ de la norme $\|y''\| \leq 1$, la fonction

$$x \to y''(\varphi_x)$$

est dans la fermeture de $\mathrm{rest}_X\, H_1 = \mathrm{rest}_X\{h \in H \mid \|h\| \leq 1\}$ par rapport à la topologie simple sur $\underset{\sim}{K}^X$. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème d'Ascoli.

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> τ <u>plus fine que</u> τ_k , <u>et soit</u> $\mathrm{rest}_X\, H_1$ <u>relativement compact dans</u> E . <u>Alors</u> (H , E) <u>est admissible, et</u> φ <u>continue</u>.

<u>Remarque</u>. - Les suppositions de cette proposition sont vérifiées, si E est un espace complet nucléaire ou seulement de Montel, τ plus fin que τ_k , et $\mathrm{rest}_X H_1$ borné dans E . C'est sous ces conditions que la proposition sera utilisée dans les applications. Par exemple, dans le cas des fonctions harmoniques, on prend pour X un domaine relativement compact d'un espace harmonique, pour T la fermeture $\overline{X}$, pour E $\mathcal{H}(X)$, et pour H l'espace vectoriel

$$H(X) = \{h \in \mathcal{C}(T , \underset{\sim}{R}) : \mathrm{rest}_X\, h \in \mathcal{H}(X)\} .$$

On démontre que E , muni de la topologie de la convergence compacte, est nucléaire. Si on introduit la norme uniforme sur H , toutes les suppositions sont donc vérifiées, et il s'ensuit que la paire (H , E) est admissible.

Pour établir un théorème qui comprend tous les cas des applications, nous généralisons maintenant la notion de la représentation intégrale. Soient M un espace de Banach quelconque, et p un homomorphisme donné de M dans H' . Par exemple, si M est l'espace de toutes les mesures sur T qui sont portées par une certaine H-frontière, on prend, pour p , l'homomorphisme naturel, qui à toute mesure $\mu \in M$ fait correspondre la forme linéaire $h \to \mu(h)$ sur H . Nous désignons alors par $\langle \mu , h \rangle$ $(h \in H , \mu \in M)$ la valeur $p(\mu)(h)$, et donnons la définition suivante:

DÉFINITION 5. - _Une application_ $x \to \mu_x$ _de_ X _dans_ M _est dite_ H-_représentation de_ X _par rapport à_ p , _si on a, pour tout_ $x \in X$, $h \in H$,

$$\langle \mu_x , h \rangle = h(x) \quad .$$

Comme cas particulier du théorème 4, on a maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME 7. - _Soient_ τ _plus fine que_ τ_s , E _un espace nucléaire de Fréchet tel que_ (H , E) _soit admissible. Si alors_ $p : M \to H'$ _est surjective, il existe une_ H-_représentation_ E-_morphe de_ X _par rapport à_ p .

A l'aide de ce théorème et du corollaire 2, on peut donner une première réponse à notre question initiale :

PROPOSITION 8. - _Soient_ T _métrisable et_ H _séparant ; et soit_ E _nucléaire, de type_ $\mathfrak{F}$, _avec_ $\tau > \tau_s$, _tel que_ (H , E) _soit admissible (par rapport à la norme uniforme sur_ H). _Alors il existe une application_ E-_morphe de_ X _dans l'espace_ M _de toutes les mesures_ $\mu \in \mathfrak{M}(T , \underset{\sim}{K})$, _qui sont portées par la frontière fine_ $Ch_H(T)$, _telle que_ $\mu_x(h) = h(x)$ _pour tout_ $x \in X$, $h \in H$. _En particulier, pour toute fonction_ g _sur_ $Ch_H(T)$ _bornée, universellement mesurable à valeurs dans_ $\underset{\sim}{K}$, _l'application_ $x \to \mu_x(g)$ _est dans_ E .

Remarque. - Soit $\underset{\sim}{K}$ identique à $\underset{\sim}{R}$. Alors on dit que T est un H-simplex, si le dual H' muni de son ordre naturel est réticulé. En ce cas, on a une application canonique de $X \subset T$ dans M , à savoir celle qui fait correspondre à tout $x \in X$ la mesure maximale unique μ_x de la masse totale égale à 1 , qui représente x par rapport à H . Soit maintenant $1 \in H$, et soit E la fermeture de $\text{rest}_X H$ dans $\mathcal{C}(X , \underset{\sim}{R})$ par rapport à τ_k . Alors on peut montrer, que l'application $x \to \mu_x$ est E-morphe, si la boule unité H_1 de H par rapport à la norme uniforme est équicontinue sur X. La démonstration de cette proposition se fait sans recourir à la théorie des espaces nucléaires.

Nous essayons maintenant d'exprimer les mesures représentant μ_x par des densités par rapport à une mesure positive θ sur T. D'abord on cherche des conditions suffisantes pour que l'énoncé suivant soit valable pour une mesure $\theta \in \mathfrak{M}^+(T)$.

$B^p(\theta , H , E)$ $(1 < p \leqslant \infty)$. – <u>Il existe une application</u> E-<u>morphe</u> $x \to k_x$ <u>de</u> X <u>dans l'espace normé</u>

$$L^p(\theta) = L^p_{\underset{\sim}{K}}(\theta) \qquad \underline{\text{avec}} \quad h(x) = \int hk_x \, d\theta \, , \quad \underline{\text{pour tout}} \quad h \in H \, , \quad x \in X \, .$$

Il est facile de voir qu'une condition nécessaire pour la validité de $B^p(\theta , H , E)$ est la propriété suivante de θ (q conjugué de p).

$A^q(\theta , H)$. – <u>Pour tout ensemble compact</u> $K \subset X$, <u>il existe une constante</u> $\alpha_K > 0$ <u>avec</u>

$$\sup_{y \in K} |h(y)| \leqslant \alpha_K \, N_q(h , \theta) = \alpha_K \left(\int |h|^q \, d\theta\right)^{1/q} \qquad \underline{\text{pour tout}} \quad h \in H \, .$$

Cette condition veut dire que la boule unité de H par rapport à la norme $N_q(\cdot , \theta)$ est, après sa restriction à X, bornée dans $\mathcal{C}(X , \underset{\sim}{K})$ par rapport à la topologie de la convergence compacte. D'après la proposition 5, la condition $A^q(\theta , H)$ assure donc l'admissibilité de la paire (H , E), si on munit H de la norme $N_q(\cdot , \theta)$, en supposant que E soit du type de Montel par rapport à τ_k.

Considérons maintenant la forme locale de la condition $A^q(\theta , H)$, qu'on peut utiliser comme axiome pour les espaces $H_X = \mathrm{rest}_X H$.

$A^q(H_X)$. – <u>Pour tout</u> $x \in X$, <u>il existe un voisinage compact</u> K_x <u>de</u> x <u>dans</u> X, <u>et une mesure</u> $\theta_x \in \mathfrak{M}^+(X)$ <u>à support compact telle que</u>

$$\sup_{y \in K_x} |h(y)| \leqslant N_q(h , \theta_x) \qquad \underline{\text{pour tout}} \quad h \in H \, .$$

Il est équivalent de dire que la topologie τ_k sur H_X est définie par les semi-normes du type L^p, définies par les mesures positives à support compact dans X. Il est évident que $A^q(H_X)$ implique $A^{q'}(H_X)$ pour tout $q' \geqslant q$. En outre, on sait que le plus fort de ces axiomes, $A^1(H_X)$, implique la nucléarité de H_X par rapport à la topologie τ_k (critère de PIETSCH [16]). En démontrant l'inverse, on voit, que les espaces qui vérifient les axiomes A^q, pour $q > 1$, forment des classes qui généralisent la classe des espaces nucléaires (toujours par rapport à la topologie τ_k) :

THÉORÈME 9. - Soient X un espace localement compact, et E un sous-espace linéaire de $\mathcal{C}(X, \underset{\sim}{K})$. Alors E, muni de la topologie τ_k, est nucléaire, si et seulement si l'axiome $A^1(E)$ est vérifié.

On voit que les axiomes $A^q(H_X)$ sont étroitement liés à la topologie τ_k. Pour établir l'énoncé $B^p(\theta, H, E)$, nous supposerons désormais les deux conditions supplémentaires suivantes :

1° E est muni de la topologie τ_k et est complet ;

2° X est dénombrable à l'infini [pour assurer que E soit métrisable].

PROPOSITION 10. - Soit E nucléaire. Alors, pour toute mesure θ, vérifiant la condition $A^q(\theta, H)$ $(1 \leqslant q < \infty)$, on a la proposition $B^p(\theta, H, E)$ avec p conjugué de q.

Démonstration. - E est du type $\mathfrak{F}$. Si on munit H de la norme $N_q(\cdot, \theta)$, on a $\varphi_x \in H'$ $(\forall x \in X)$, et la paire (H, E) est admissible, d'après $A^q(\theta, H)$ (proposition 6). Soit p l'homomorphisme canonique de $M = L^p(\theta)$ (p conjugué de q) sur H' (qui est isomorphe à un espace quotient de $L^p = (L^q)'$). Alors on peut appliquer le théorème 7.

X étant supposé dénombrable à l'infini, il est facile de voir que, pour tout espace H, satisfaisant à l'axiome $A^q(H_X)$, il existe une mesure $\theta \in \mathfrak{M}^+(T)$ avec $A^q(\theta, H)$. Pour concentrer cette mesure sur les H-frontières de T, on se sert du lemme suivant, qui est immédiat :

LEMME 11. - Soient $\sigma, \theta \in \mathfrak{M}^+(T)$, $\sigma \succ \theta$. Alors,

$$A^q(\theta, H) \Longrightarrow A^q(\sigma, H) .$$

A l'aide de ce lemme, on déduit aussitôt l'existence d'une H-représentation E-morphe de X par des densités essentiellement bornées et intégrables par rapport à une mesure maximale :

PROPOSITION 12. - Soient E nucléaire, et S une H-frontière compacte de T. Alors il existe une mesure maximale $\sigma \in \mathfrak{M}^+(T)$ concentrée sur S, avec $B^\infty(\sigma, H, E)$.

Les représentations E-morphes, dont l'existence est assurée dans les deux dernières propositions, sont d'elles-mêmes continues, parce qu'on a la proposition suivante.

PROPOSITION 13. - Soit E nucléaire (par rapport à τ_k). Alors, toute application E-morphe de X dans un espace l. c. s. F est continue.

La démonstration de cette proposition se fait facilement à partir de la proposition 3.

Les résultats que nous venons d'énoncer ont encore quelques défauts. Premièrement, nous avons supposé que E soit nucléaire, ce qui entraîne que les axiomes $A^q(H_X)$ soient vérifiés pour tout $q \geqslant 1$. Mais tous ces axiomes ne sont pas nécessaires si on n'exige que la validité de $B^p(\theta , H , E)$ pour un p fini. On présume qu'il suffirait de supposer l'axiome $A^q(H_X)$, où q est conjugué de p , pour établir la proposition B^p (Cependant, on ne sait pas encore pour quels $q \geqslant 1$ l'axiome $A^1(H_X)$ est strictement plus fort que $A^q(H_X)$. D'après une remarque de THOMAS, la déduction du critère de Pietsch, donnée par SCHAEFFER [17], démontre que les axiomes $A^q(H_X)$, avec $1 \leqslant q \leqslant 2$, sont tous équivalents.)

Le deuxième défaut des résultats précédents est que nous avons seulement construit des densités k_x , qui sont des classes de fonctions. On se demande, s'il est possible de choisir des représentants $Q(x , .)$ des k_x tels que, pour tout $y \in T$, les applications $x \to Q(x , y)$ sur X soient dans E . Le théorème des noyaux [17] permet de démontrer assez facilement qu'un tel choix est possible.

THÉORÈME 15. - Soit E nucléaire. Alors, pour toute mesure positive σ sur T vérifiant la condition $A^1(\sigma , H)$, il existe un noyau $Q(x , y)$ sur $X \times T$ tel que :

(i) $x \to Q(x , y)$ est dans E pour tout $y \in T$;

(ii) $y \to Q(x , y)$ est dans $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$ pour tout $x \in X$;

(iii) $L(x) = \int h(y)\, Q(x , y)\, d\sigma(y)$ $(\forall\, x \in X ,\ h \in H)$;

(iv) L'application $Q : x \to Q_x$, qui à tout $x \in X$ fait correspondre la classe $Q_x \in L^\infty(\sigma)$ de $Q(x , .)$, est E-morphe et continue. En particulier, pour tout $f \in L^1(\sigma)$, la fonction $H_\rho : x \to \int f(y)\, Q(x , y)\, d\sigma(y)$ est dans E .

COROLLAIRE 16. - Soit E nucléaire. Alors, pour toute H-frontière compacte S de T , il existe une mesure maximale $\sigma \in \mathcal{M}^+(T)$ concentrée sur S et un noyau $Q(x , y)$ sur $X \times S$, vérifiant les conditions (i) à (iv) du théorème 15 (avec S au lieu de T).

Applications

Le plus souvent, les résultats que nous venons d'exposer s'appliquent aux cas où les espaces fonctionnels E et H sont donnés par un faisceau de fonctions continues. Nous rassemblons quelques critères pour la nucléarité d'un tel faisceau.

Soient Y un espace localement compact d'une base dénombrable, $E : U \to E(U)$ un faisceau de fonctions continues réelles ou complexes tel que, pour tout ouvert U de Y, $E(U)$ est fermé dans $\mathcal{C}(U, \underset{\sim}{K})$ par rapport à la topologie τ_k de la convergence compacte. On dit que le faisceau est nucléaire, si les espaces vectoriels $E(U)$ munis de la topologie τ_k sont nucléaires. Si on pose

$$H(U) = \{h \in \mathcal{C}(\overline{U}, \underset{\sim}{K}) ; \; \mathrm{rest}_U\, h \in E(U)\} \quad ,$$

pour tout ouvert U de Y, on peut donner la caractérisation suivante.

PROPOSITION 17. - E est nucléaire si, et seulement si, une des conditions suivantes est remplie pour tous les ensembles relativement compacts X d'une base $\mathfrak{A}$ de Y :

(i) La restriction H_X de $H(X)$ sur X est nucléaire ;
(ii) $A^1(H_X)$;
(iii) Il existe une mesure positive σ sur $\overline{X}$ telle qu'on a $B^\infty(\sigma , H(X) , E(X))$;
(iv) Il existe une mesure positive σ sur $\overline{X}$ vérifiant $A^1(\sigma , H(X))$;
(v) Pour tout $x \in X$, il existe une mesure positive sur X à support compact, un voisinage $U \subset X$ de x, et une application continue $k : y \to k_y$ de U dans $L^\infty(\theta)$ telle que l'on a

$$\int hk_y \, d\theta = h(y) \qquad \text{pour tout } y \in U , \quad h \in H \quad .$$

Dans cette liste figurent, comme conditions équivalentes, des hypothèses et des conclusions des propositions que nous avons énoncées ci-dessus, ce qui démontre leur dépendance mutuelle au cas d'un faisceau. A chaque faisceau E, qui vérifie une de ces conditions pour tous les ensembles relativement compacts d'une base de Y, on peut appliquer le théorème 15 et son corollaire, qui donnent des énoncés beaucoup plus riches que chacune de ces conditions.

La condition (v) est particulièrement intéressante. Elle suppose l'existence locale des H-représentations continues par des densités essentiellement bornées et mesurables. Les méthodes de la théorie des espaces nucléaires, dont nous nous sommes servis, permettent donc d'obtenir des H-représentations globales E-morphes à partir des H-représentations locales continues par des densités essentiellement bornées et mesurables. C'est justement ce procédé qu'ont choisi GLEASON et BEAR dans une axiomatique des fonctions harmoniques ou paraboliques abstraites, sans utiliser la théorie des espaces nucléaires [2].

Appliquons maintenant nos résultats aux fonctions harmoniques et aux fonctions holomorphes.

1° Soit $U \to \mathcal{H}(U)$ le faisceau des fonctions harmoniques sur un espace harmonique Y au sens de BAUER. Alors la généralisation suivante de l'inégalité de Harnack est valable :

Soient $\mu \in \mathfrak{M}^+(Y)$, et K un ensemble compact, continu dans l'intérieur de l'ensemble absorbant A_{T_μ} , engendré par le support T_μ de μ . Alors, il existe une constante $\alpha > 0$, telle que

$$\sup h(K) \leqslant \alpha \int h \, d\mu \qquad \text{pour tout} \quad h \in \mathcal{H}_+(Y) \quad .$$

Remarque. - Dans la théorie de Brelot, l'espace Y est elliptique et connexe ; donc le seul ensemble absorbant non vide est l'espace tout entier. Le théorème de Harnack apparaît alors sous sa forme connue :

Soient K un ensemble compact d'un espace de Brelot X (connexe), et $x \in X$. Alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\sup h(K) \leqslant \alpha h(x) \qquad \text{pour toute} \quad h \in \mathcal{H}_+(X) \quad .$$

A l'aide de l'inégalité de Harnack il est maintenant facile de vérifier la nucléarité du faisceau $\mathcal{H}$.

Soient X un ouvert relativement compact de Y , et K un sous-ensemble compact de X . D'après le critère (iii), il faut trouver une mesure $\sigma \in \mathfrak{M}^+(\overline{X})$ telle que

$$\sup_K |h(x)| \leqslant \int |h| \, d\sigma \qquad \text{pour toute} \quad h \in H(X) \quad .$$

Comme X est séparable, il existe une mesure $\mu \in \mathfrak{M}^+(X)$, bornée, dont le support est identique à X . D'après l'inégalité de Harnack, il s'ensuit :

$$\sup h(K) \leqslant \alpha \int h \, d\mu \qquad \text{pour toute} \quad h \in \mathcal{H}_+(X) \quad ,$$

parce que $K \subset X = \overset{\circ}{T}\mu$, donc en particulier :

$$\sup H_f^X(K) \leqslant \alpha \int H_f^X \, d\mu$$

pour toute solution généralisée H_f^X du problème de Dirichlet correspondant à une fonction réelle continue positive sur la frontière ∂X de X . On en déduit, pour toute $h \in H(X)$,

$$\sup_K |h(x)| \leqslant \sup_K \int |h| \, d\rho_x^X = \sup H_{|h|}^X(K) \leqslant \alpha \int H_{|h|}^X \, d\mu = \int |h| \, d\sigma$$

avec

$$\sigma = \alpha \int \rho_x^X \, \mu(dx) \in \mathfrak{M}(\partial X) \quad ,$$

ce qui démontre la nucléarité du faisceau.

Dans la théorie de Brelot, on n'a pas besoin de la séparabilité de l'espace, il suffit alors de choisir pour σ une mesure harmonique ρ_x^X quelconque $(x \in X)$ et d'appliquer l'inégalité de Harnack dans sa forme classique :

$$\sup_K |h(x)| \leqslant \sup_K \int |h| \, d\rho_x^X = \sup_K H_{|h|}^X(x) \leqslant \alpha_{K,x} \, H_{|h|}^X(x) = \alpha_{K,x} \int |h| \, d\rho_x^X \; .$$

Pour les deux théories axiomatiques, nous avons donc à notre disposition le corollaire 16 qui donne une réponse affirmative à notre question initiale, si les fonctions harmoniques séparent les points de Y . Pour les solutions de l'équation de la chaleur, la condition de séparation est vérifiée : il y a donc, dans ce cas, une mesure σ positive, concentrée sur l'ensemble des points réguliers, et un noyau $Q(x\ ,\ y)$ sur $X \times \partial X$, qui est harmonique dans sa première variable et σ-essentiellement borné dans la seconde, tel que les mesures $Q(x\ ,\ .)\, d\sigma$ représentent les points de X par rapport à l'espace $H(X)$ des fonctions réelles continues sur $\overline{X}$, harmoniques sur X . Ces mesures ne sont pas en général identiques aux mesures harmoniques.

On dit qu'une application f d'un ouvert $U \subset Y$ dans un espace l. c. complet F est faiblement harmonique, si, pour toute forme linéaire continue y' sur F , $y' \circ f$ est harmonique. Alors f est faiblement harmonique si, et seulement si, f est $\mathcal{H}(U)$-morphe. De cette remarque, il s'ensuit que toute application $f : U \to F$ faiblement harmonique est continue, et peut même être approchée par des fonctions de la forme $\sum f_i \, y_i$ avec $y_i \in F$, $f_i \in \mathcal{H}(U)$ (proposition 3). Toute application faiblement harmonique est donc fortement harmonique dans ce sens : pour tout ensemble régulier V dans U , f est ρ_x^V-intégrable $(x \in V)$, et on a

$$f(x) = \int f \, d\rho_x^V \; .$$

2° Soient Y un espace analytique, et $U \to \mathcal{O}(U)$ le faisceau des fonctions holomorphes sur Y . Pour démontrer la nucléarité de ce faisceau, on peut, en vertu du caractère local du critère (ii), supposer que Y soit un sous-ensemble (fermé) analytique d'un domaine holomorphiquement complet G dans $\underset{\sim}{C}^n$. Soit E l'espace vectoriel de toutes les fonctions holomorphes sur G , muni de la topologie τ_k , et soit ψ l'application linéaire continue, qui à toute $f \in E$ fait correspondre sa restriction à Y . D'après le théorème B de Cartan, ψ est un homomorphisme topologique de E sur $\mathcal{O}(Y)$. Or, E est nucléaire ; car les parties réelles des fonctions $f \in E$ sont harmoniques, donc vérifient le critère (ii), et c'est évident que, si $\Re E$ suffit à cette condition, E le fait aussi. L'espace $\mathcal{O}(Y)$, topologiquement isomorphe à un espace quotient d'un espace nucléaire, est donc nucléaire.

Appliquons le corollaire 16 et la proposition 3. Soit X un ouvert relativement compact métrisable d'un espace analytique $(Y , \mathcal{O})$, et soit H un sous-espace de

$$H(X) = \{f \in \mathcal{C}(\overline{X} , \underset{\sim}{C}) ; \ \mathrm{rest}_X f \in \mathcal{O}(X)\}$$

qui sépare les points de X . Alors il existe une mesure $\sigma \in \mathfrak{M}^+(\partial X)$, portée par la frontière fine $\mathrm{Ch}_H(\overline{X})$, et un noyau $Q(x , y) \longmapsto X \times \partial X$, tels que :

(i) $x \to Q(x , y)$ est holomorphe sur X pour tout $y \in \partial X$;

(ii) $y \to Q(x , y)$ est dans $\mathfrak{L}^\infty(\sigma)$ pour tout $x \in X$;

(iii) $h(x) = \int h(y)\, Q(x , y)\, d\sigma(y)$ pour tout $x \in X$, $h \in H$;

(iv) L'application $x \to Q_x$ de X dans l'espace de Banach $L^\infty(\sigma)$ est holomorphe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (Heinz). - Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 22).

[2] BEAR (H. S.) and GLEASON (A. M.). - An integral formula for abstract harmonic or parabolic functions, Amer. math. Soc., Notices, t. 13, 1966, p. 348.

[3] BRELOT (Marcel). - Lectures on potential theory. - Bombay, Tata Institute, 1960 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures in Mathematics, 19).

[4] BUNGART (L.). - Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas, Trans. Amer. math. Soc., t. 111, 1964, p. 317-344.

[5] BUNGART (L.). - Cauchy integral formulas and boundary kernel functions in several complex variables, Proceedings of the Conference on complex analysis [1964. Minneapolis], p. 7-18. - Berlin, Springer-Verlag, 1965.

[6] CHOQUET (G.) et MEYER (P.-A.). - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, fasc. 1, p. 139-154.

[7] GLEASON (Andrew M.). - The abstract theorem of Cauchy-Weil, Pacific J. of Math., t. 12, 1962, p. 511-525.

[8] GROTHENDIECK (Alexander). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).

[9] GUNNING (R. C.) and ROSSI (H.). - Analytic functions of several variables. - Englewood Cliffs (N. J.), Prentice-Hall, 1965 (Prentice-Hall Series in modern Analysis).

[10] HINRICHSEN (D.). - Adapted integral representations by measures on Choquet boundaries, Bull. Amer. math. Soc., t. 72, 1966, p. 888-891.

[11] HINRICHSEN (D.). - Randintegrale und nukleare Funktionenräume, Thèse Sc. math. Univ. Erlangen-Nüremberg, 1966.

[12] LOEB (P. A.) and WALSH (B.). - The equivalence of Harnack's principle and Harnack's inequality in the axiomatic system of Brelot, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 15, 1965, fasc. 2, p. 597-600.

[13] LOEB (P. A.) and WALSH (B.). - Nuclearity in axiomatic potential theory, Bull. Amer. math. Soc., t. 72, 1966, p. 685-689.

[14] LUMER (G.). - Analytic functions and Dirichlet problem, Bull. Amer. math. Soc., t. 70, 1964, p. 98-104.

[15] MEYER (Paul-André). - Probabilité et potentiel. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1318 ; Publ. Inst. math. Univ. Strasbourg, 14).

[16] PIETSCH (Albrecht). - Nukleare lokalkonvexe Räume. - Berlin, Akademie-Verlag, 1965 (Schriftenreihe der Institute für Mathematik, Reihe A, Heft 1).

[17] SCHAEFER (H. H.). - Topological vector spaces. - New York, The Macmillan Company, 1966 (Macmillan Series in advanced Mathematics and theoretical Physics).