Gabriel Mokobodzki

Daniel Sibony

Cônes de fonctions et théorie du potentiel II. Résolvantes et semi-groupes subordonnés à un cône de fonctions

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 11 (1966-1967), exp. nº 9, p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1966-1967__11__A5_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
11e année, 1966/67, n° 9

12 janvier 1967

CÔNES DE FONCTIONS ET THÉORIE DU POTENTIEL

II. RÉSOLVANTES ET SEMI-GROUPES SUBORDONNÉS À UN CÔNE DE FONCTIONS.

par Gabriel MOKOBODZKI et Daniel SIBONY

Introduction. - Dans la partie I de ce travail [1], nous avons entre autres démontré qu'étant donné un cône convexe $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ vérifiant nos quatre axiomes, on peut, à tout $v \in C$, associer un noyau V unique subordonné à C avec $V1 = v$ et un opérateur A ("de Dynkin généralisé") tel que $AV\varphi = \varphi$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$. Il s'agit maintenant de construire la résolvante et le semi-groupe associés à un tel noyau.

En fait, nous allons élargir le cadre du travail et résoudre le problème plus général suivant :

Soit $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ un cône convexe adapté, linéairement séparant et stable par sommes continues. Soit V un noyau subordonné à C, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $C - C$ telle que :

(a) $V(\mathcal{C}_K^+(\Omega)) \subset C$

(b) $\operatorname{Supp} V\varphi \subset S\varphi$ (cf. (I)).

Alors, ce noyau possède une résolvante achevée et un semi-groupe dont on précisera les domaines naturels, les extensions, et l'interprétation au moyen des mesures pseudo-portées par le support fin $\delta(V)$ du noyau V.

Première partie :

Résolvante et semi-groupes. Cas sous-markovien.

Nous allons d'abord traiter le cas "sous-markovien", car, outre qu'il correspond au cas de la théorie de Hunt, il met en évidence certains arguments qui seront par la suite généralisés.

HYPOTHÈSES.

1° C est un cône convexe adapté, $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$, linéairement séparant.

---

[1] Cf. Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 11e année, 1966/67, n° 8, 35 p.

2° La fonction 1 est C-surmédiane (on dira aussi C-dominante) c'est-à-dire

$$(u \in C\ ,\ 1 \geq u \text{ sur } \operatorname{Supp} u) \implies (1 \geq u \text{ dans } \Omega)\ .$$

1. Résolvante.

Le théorème général suivant fournit la résolvante associée à un noyau V subordonné à C tel que $V1 = v_0 \in C$ et soit borné.

THÉORÈME 1. - Soit V une application linéaire positive de $\mathcal{C}_b(\Omega)$ dans lui-même, vérifiant le principe de domination (2). Alors, il existe une famille $(V_\lambda)_{\lambda>0}$, et une seule, d'opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{C}_b$ dans lui-même telle que :

$$V - V_\lambda = \lambda V V_\lambda = \lambda V_\lambda V\ , \qquad \forall\ \lambda > 0\ .$$

Ces opérateurs vérifient l'équation résolvante :

$$V_\lambda - V_\mu = -(\lambda - \mu) V_\lambda V_\mu\ , \qquad \forall\ \lambda\ ,\ \mu > 0\ ,$$

et sont des opérateurs positifs.

Démonstration.

1° Unicité. - Si une telle famille existe, on a nécessairement, pour tout $\lambda > 0$,

$$(I - \lambda V_\lambda)(\lambda V + I) = I \qquad (\ I : \text{application identique})\ .$$

et

$$(\lambda V + I)(I - \lambda V_\lambda) = I\ .$$

L'opérateur $I - \lambda V_\lambda$, donc V_λ, est par suite unique s'il existe. (Considérer le groupe des éléments inversibles dans $\mathcal{L}(\mathcal{C}_b\ ,\ \mathcal{C}_b)$.)

2° Existence. - Pour $\lambda > 0$ assez petit (c'est-à-dire tel que $\|\lambda V\| < 1$), on pose : $V_\lambda = \sum_{k\geq 0} (-\lambda)^k V^{k+1}$, ce qui a un sens. Si V_λ et V_μ sont définis, ils vérifient l'équation résolvante. En effet :

(1)
$$V_\lambda = V - \lambda V_\lambda V$$

(2)
$$V_\mu = V - \mu V_\mu V$$

---

(2) c'est-à-dire : $(V\varphi \leq V\psi \text{ sur } (\varphi > 0)) \implies (V\varphi \leq V\psi \text{ partout})$.

$$V_\lambda = V - \lambda V_\lambda [V_\mu + \mu V_\mu V] = V - \lambda V_\lambda V_\mu - \lambda\mu V_\lambda V_\mu V$$

$$V_\mu = V - \mu[V_\lambda + \lambda V_\lambda V] V_\mu = V - \mu V_\lambda V_\mu - \lambda\mu V_\lambda V_\mu V$$

d'où, par différence, le résultat.

V_λ , <u>s'il existe est un opérateur</u> ≥ 0 . En effet, V_λ est un opérateur borné. Soit $g \in \mathcal{C}_b^+(\Omega)$; Vg est un élément borné du cône C . On a

$$V_\lambda\, g = V(g - \lambda V_\lambda\, g)$$

$g - \lambda V_\lambda\, g$ étant borné, le second membre a un sens. Il suffit donc de démontrer que $\lambda V_\lambda\, Vg \leq Vg$. Posons $u = Vg$.

$$\lambda V_\lambda\, u = V[\lambda(u - \lambda V_\lambda\, u)] = V\varphi$$

où $\varphi = \lambda(u - \lambda V_\lambda\, u)$ est borné. On a $u \geq V\varphi$ sur l'ensemble $[\varphi \geq 0]$ (c'est évident), donc partout. Donc $\lambda V_\lambda\, u \leq u$.

C. Q. F. D.

L'ensemble e des $\lambda > 0$, tels que V_λ existe, est ouvert (complémentaire du spectre de $-V$). Il est fermé, si $(\lambda_n) \subset e$, $\lambda_n \to \mu$,

$$\|V_{\lambda_n} - V_{\lambda_m}\| \leq |\lambda_n - \lambda_m|\ \|V\|^2 \to 0 .$$

Donc V_λ existe pour tout $\lambda > 0$.

La démonstration ci-dessus est pratiquement identique à celle de MEYER dans [6].

<u>Définitions</u>.

1° Soit u borélienne bornée positive dans Ω ($u \in \mathcal{B}^+$) ; u est dite surmédiane par rapport à la résolvante (V_λ) si on a :

$$\lambda V_\lambda\, u \leq u , \qquad \forall\ \lambda > 0 .$$

2° Soit $u \in \mathcal{B}^+$, u est dite V-dominante, V étant un noyau subordonné à C si pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_b(\Omega)$,

$$(u \geq V\varphi \text{ sur } S\varphi) \Longrightarrow (u \geq V\varphi \text{ dans } \Omega)$$

3° Soit $u \in \mathcal{B}^+$; u est dite C-dominante si pour tout $v \in C$,

$$(u \geq v \text{ sur } \operatorname{Supp} v) \Longrightarrow (u \geq v \text{ dans } \Omega) .$$

Remarque. - On a évidemment l'équivalence :

$$(\ u \text{ est C-dominante}) \Longleftrightarrow (\ \hat{u} \text{ est C-dominante})$$

où $\hat{u}$ est la régularisée s. c. i. de u .

PROPOSITION 2. - Les fonctions V-dominantes et (V_λ)-surmédianes dans Ω sont les mêmes.

La démonstration est identique à celle de P.-A. MEYER ([7], p.)

COROLLAIRE 3. - Toute fonction C-dominante s. c. i. est (V_λ)-surmédiane pour tout noyau V subordonné à C .

En particulier, les fonctions de C sont (V_λ)-surmédianes.

THÉORÈME 4. - Soit V subordonné à C avec $V1 = v_0$ borné > 0 et strictement concave. Soit (V_λ) la résolvante associée à V . Alors on a :

$$u = \sup_{\lambda>0} \lambda V_\lambda u \ , \qquad \forall\, u \in C \ .$$

Démonstration. - Soit u une fonction (V_λ)-surmédiane (c'est-à-dire par rapport à la résolvante). On a, pour tout $x \in \Omega$,

$$\lambda V_\lambda\, u(x) \leqslant \mu V_\mu\, u(x) \qquad \forall\, \lambda \leqslant \mu \ ;$$

et, on peut écrire $\lambda V_\lambda\, u(x) = \int u\, d\mu_{x,\lambda}$, où $\mu_{x,\lambda}$ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur Ω , car $u \to \lambda V_\lambda\, u(x)$ est une forme linéaire croissante sur C , qui est un cône adapté. On pose

$$T(u) = \sup_{\lambda>0} \lambda V_\lambda\, u(x) \ , \qquad \forall\, u \in C \ .$$

T est une forme linéaire sur C - C , croissante sur C , donc c'est une mesure $\geqslant 0$, μ_x (C-intégrable). On a évidemment

$$\int u\, d\mu_x \leqslant u(x) \ , \qquad \forall\, u \in C \ .$$

Si on avait $\mu_x \neq \varepsilon_x$, comme v_0 est strictement concave, on aurait

$$\int v_0\, d\mu_x < v_0(x)$$

or

$$\int v_0\, d\mu_x = \sup_{\lambda>0} \lambda V_\lambda\, v_0(x) = \sup_{\lambda>0} \lambda V_\lambda\, V1(x)$$

De plus, $V - V_\lambda = \lambda V_\lambda V$, $\forall \lambda > 0$. Soit donc $\varphi \in \mathcal{C}_K^+$. Il existe $\alpha > 0$ réel tel que $\varphi \leq \alpha v_0$.

$$\lambda V_\lambda(\varphi) \leq \alpha \lambda V_\lambda v_0 \leq \alpha v_0 .$$

Donc $V_\lambda \varphi \leq \frac{\alpha}{\lambda} v_0$. Donc $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda V\varphi = V\varphi$ où encore $\int V\varphi \, d\mu_x = V\varphi(x)$ or

$$\int v_0 \, d\mu_x = \sup_{\substack{0\leq\varphi\leq 1 \\ \varphi\in\mathcal{C}_K^+(\Omega)}} \int V\varphi \, d\mu_x = v_0(x)$$

Donc $\mu_x = \varepsilon_x$.

COROLLAIRE 5. - <u>Les mesures</u> $(\mu_{x,\lambda})_{\lambda>0}$ <u>convergent</u> C-<u>faiblement vers</u> ε_x , $\forall x \in \Omega$ <u>quand</u> $\lambda \to +\infty$, <u>c'est-à-dire</u>,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int u \, d\mu_{x,\lambda} = u(x) , \qquad \forall u \in C .$$

COROLLAIRE 6. - <u>Tout élément de</u> C <u>peut s'écrire</u> $u = \sup V\varphi_n$ <u>où</u> $V\varphi_n$ <u>est une suite croissante avec</u> $(\varphi_n) \subset \mathcal{C}_b^+(\Omega)$. <u>Plus généralement toute</u> u , <u>telle que</u> $u = \sup\limits_n u_n$ <u>où</u> $(u_n) \subset C$, <u>et</u> (u_n) <u>croissante, peut s'écrire</u> :

$$u = \sup_p V\varphi_p \quad \underline{\text{avec}} \quad (V\varphi_p) \quad \underline{\text{croissante et}} \quad (\varphi_p) \subset \mathcal{C}_b^+(\Omega) .$$

<u>Démonstration</u>. - On a, pour toute u bornée, $u \in C$,

$$u = \sup_{\lambda>0} \lambda V_\lambda u = \sup_{\lambda>0} V[\lambda(u - \lambda V_\lambda u)] = \sup_n V\varphi_n$$

et

$$n(u - nV_n u) = \varphi_n \in \mathcal{C}_b^+(\Omega) , \qquad \forall n$$

car u est bornée, donc $V_n u$ aussi.

Supposons maintenant $u = \sup u_n$ avec $(u_n) \subset C$ et (u_n) croissante. On peut toujours écrire $u = \sup\limits_n u'_n$ avec $(u'_n) \subset C$, u'_n bornée pour tout n et (u'_n) croissante. La suite double $(pV_p u'_n)_{n,p}$ est croissante, u , étant s. c. i., s'écrit comme $\sup \alpha_n$ où $\alpha_n \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$, (α_n) croissante, $\alpha_n < u \ \forall n$.

Pour tout i , on peut trouver p_i et n_i tels que

$$p_i V_{p_i} u'_{n_i} > \alpha_i \qquad \text{sur } S\alpha_i .$$

Donc, en extrayant au besoin une sous-suite de (p_i , n_i) , on a

$$u = \sup_i k_i V_{k_i} u'_{j_i} = \sup_i V[k_i(u'_{j_i} - k_i V_{k_i} u'_{j_i})] = \sup_i V\varphi_i$$

avec $(\varphi_i) \subset C_b^+$ et $(V\varphi_i)$ croissante.

THÉORÈME 7. - Soit M^+ l'ensemble des mesures ≥ 0 sur Ω , C-intégrables. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur M^+ , convergeant C-faiblement vers $\mu \in M^+$ (c'est-à-dire $\lim_{\mathfrak{F}} \int v\, d\nu = \int v\, d\mu$, $\forall\, v \in C$). Alors, pour toute u continue, C-majorée (c'est-à-dire telle que $|u| \leq w$ avec $w \in C$), on a :

$$\lim_{\mathfrak{F}} \int u\, d\nu = \int u\, d\mu .$$

Démonstration. - Soit $(M^+ , \mathcal{T})$ l'ensemble M^+ muni de la topologie $\mathcal{T}$ associée au filtre $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire que $(A \cup \{\mu\})_{A \in \mathfrak{F}}$ est le filtre des voisinages de μ pour cette topologie.

Toute v de la forme $v_1 - v_2$ $(v_i \in C)$ est continue sur cet espace topologique et toute φ continue, C-majorée, s'écrit

$$\int \varphi\, d\nu = \inf_{\substack{v_1 - v_2 \geq \varphi \\ v_i \in C}} \int (v_1 - v_2)\, d\nu .$$

Donc φ est s. c. s. pour la topologie $\mathcal{T}$ (comme inf de fonctions continues).

Le même raisonnement appliqué à $(-\varphi)$ montre que l'application $\nu \to \int \varphi\, d\nu$ est continue sur $(M^+ , \mathcal{T})$.

COROLLAIRE 8. - Pour toute u s. c. i., $u \geq 0$ (V_λ)-surmédiane, on a :

$$u = \sup_n \{V\varphi_n \ ; \ (V\varphi_n)_n \text{ croissante, } \varphi_n \text{ borélienne } \geq 0 , \ \forall\, n\} .$$

Démonstration. - En effet, comme v_0 est > 0 et $\inf(nv_0 , u)$ est (V_λ)-surmédiane, on peut se ramener au cas où u est bornée.

u étant s. c. i. peut s'écrire comme $\sup \psi_n$ où (ψ_n) croissant, et $(\psi_n) \subset C_K^+$; chaque ψ_n , étant C-majorée, est continue sur $(M^+ , \mathcal{T})$. Donc u est s. c. i. sur $(M^+ , \mathcal{T})$. Donc

$$\liminf_\lambda \int u\, d\mu_{x,\lambda} \geq u(x) .$$

Par ailleurs,

$$\int u \, d\mu_{x,\lambda} = \lambda V_\lambda \, u(x) \leq u(x) \quad \text{pour tout} \quad \lambda > 0$$

car u est (V_λ)-surmédiane. Donc $u = \sup_{\lambda>0} \lambda V_\lambda \, u$, et en écrivant à nouveau $u = \sup_{\lambda>0} V(\lambda(u - \lambda V_\lambda \, u))$, on obtient le résultat.

PROPOSITION 9. - Les propriétés suivantes sont équivalentes, pour $u \in \mathcal{B}^+$:

(a) u est C-dominante ;

(b) u est V-dominante pour tout noyau V subordonné à C associé à un élément $v \in C$ (c'est-à-dire $V1 = v$) ;

(c) u est V-dominante pour un noyau V subordonné à C associé à une fonction strictement C-concave.

Démonstration. - (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) : c'est immédiat.

(c) $\Longrightarrow$ (a) , car si u est V-dominante, $\hat{u}$ l'est aussi, donc

$$\hat{u} = \sup_n V\varphi_n \, ,$$

et par suite $\hat{u}$ est C-dominante, donc u l'est aussi.

Remarque. - Les fonctions C-dominantes peuvent donc être appelées fonctions C-surmédianes, puisqu'elles sont surmédianes par rapport à tout noyau subordonné à C . On verra qu'on peut associer à des cônes plus généraux que C une notion de fonction surmédiane.

2. Construction du semi-groupe.

Soit toujours un noyau V subordonné à C tel que $V1 = v_0 \in C$ soit une fonction bornée. Soit (V_λ) la résolvante achevée du noyau V .

PROPOSITION 10. - Il existe un semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ fortement continu d'opérateurs linéaires ≥ 0 sur $H = V(\mathcal{C}_K)$ tel que, pour tout $u \in C$, $P_t \, u$ est s. c. i.

Démonstration. - On pose $S_\lambda = \lambda(\lambda V_\lambda - I)$. S_λ est un opérateur linéaire borné dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$. Soit

$$Q_t^\lambda = e^{tS_\lambda} \qquad (\lambda > 0) \, .$$

Pour tout $u \in C$, on a $Q_t^\lambda u \leq u$, car :

$$Q_t^\lambda u = e^{-\lambda t} \sum_{n\geq 0} \frac{t^n \lambda^n (\lambda V_\lambda)^n u}{n!}$$

et on a $\lambda V_\lambda u \leq u$, donc $(\lambda V_\lambda)^n u \leq u$, $\forall n$.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre de Frechet sur $\underset{\sim}{N}$. On pose

$$P_t u(x) = \lim_{\mathcal{U}} Q_t^\lambda u(x) \qquad (x \in \Omega) .$$

L'application $u \to P_t u(x)$ est une forme linéaire sur $C - C$, croissante sur C , donc il existe une mesure, et une seule, $\mu_{x,t} \geq 0$ sur Ω telle que :

$$P_t u(x) = \int u \, d\mu_{x,t} , \qquad \forall u \in C .$$

D'après le théorème de Hille-Yosida, pour toute $u = V\varphi$ $(\varphi \in \mathcal{C}_b)$, $P_t u$ est continue, et on a

$$P_{t+t'} u = P_{t'}(P_t u) , \qquad \forall t , t' \in \underset{\sim}{R}^+ ;$$

cette propriété de semi-groupe se prolonge à tous les éléments de $C - C$, et tout $u \in C$ s'écrivant $u = \sup_n V\varphi_n$; $P_t u$ est s. c. i.

Remarquons que P_t se prolonge à l'espace vectoriel des fonctions φ continues C-majorées (c'est-à-dire telles qu'il existe $w \in C$, $|\varphi| \leq w$) en vertu de la formule

$$\int \varphi \, d\mu = \inf_{\substack{v\in C-C \\ v\geq\varphi}} \int v \, d\mu \qquad \text{pour toute } \mu \text{ , mesure } \geq 0 \text{ C-intégrable.}$$

COROLLAIRE 11. - Soit H_C l'espace vectoriel des fonctions continues C-majorées. Alors, le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ opère de H_C dans H_C .

En effet, on a, par construction de (P_t) ,

$$P_t u \leq u , \qquad \forall u \in C \quad \text{et} \quad \forall t \geq 0 .$$

Donc si $\varphi \in H_C$,

$$|P_t \varphi| \leq P_t w \leq w \quad \text{pour un} \quad w \in C ,$$

et $P_t \varphi$ est continue. (Cf. [13].)

Définition. - Une fonction f est dite excessive, si elle est ε_x V-mesurable, $\forall x$, et telle que

$$\lambda V_\lambda f \leq f \quad \text{et} \quad f = \sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda f$$

COROLLAIRE 12. - Si une fonction f est excessive, elle est telle que

$$P_t f \leq f , \quad \forall t > 0 \quad \text{et} \quad f = \sup_{t>0} P_t f$$

En effet, le théorème de Hille-Yosida nous apprend que

$$\lim_{t\to 0} P_t V\varphi = V\varphi , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_b .$$

Cette relation est vraie pour toute φ borélienne. En effet, on voit sans peine qu'elle l'est pour les φ s. c. i. ou s. c. s. De plus,

$$P_t V\varphi = \sup_{\substack{\psi \text{s.c.s.} \\ \psi \leq \varphi}} P_t V\psi$$

D'où :

$$\sup_t P_t V\varphi = \sup_\psi \sup_t P_t V\psi = \sup_\psi V\psi = V\varphi .$$

Remarques.

1° Les opérateurs P_t , pour tout $t > 0$, sont des opérateurs linéaires continus de H_C dans H_C , muni de la topologie de l'ordre.

2° L'opérateur A , défini au moyen de $v_0 = V1$, est le générateur infitésimal du semi-groupe (P_t) : A est défini sur l'espace $V(\mathcal{C}_b(\Omega))$ qui est dense dans H_C .

THÉORÈME 13. - On a

$$Vf = \int_0^\infty P_t f \, dt$$

$$V_\lambda f = \int e^{-\lambda t} P_t f \, dt , \qquad \forall f \in H_C .$$

Deuxième partie :

Construction de la résolvante et du semi-groupe dans le cas général.

On se propose de faire cette construction sans supposer que la fonction 1 est C-surmédiane. Autrement dit, on se propose d'associer une résolvante et un semi-groupe à tout noyau V subordonné à C. Pour cela, on adapte la méthode de LION ([5]), en l'étendant dans un cadre plus général. On désigne toujours par H_C l'espace vectoriel des fonctions continues C-majorées (c'est-à-dire telles que, $\forall f \in H_C$, $\exists w \in C : |f| \leq w$).

Rappelons la définition d'un noyau subordonné.

Définition.

1° On appelle noyau subordonné à C, une application linéaire positive V de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans H_C telle que :

(i) $V(\mathcal{C}_K^+(\Omega)) \subset C$;

(ii) $\operatorname{Supp} V\varphi \subset S\varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$

2° Une résolvante (V_λ) est dite achevée (selon MEYER [7]) si $\sup\limits_{\lambda>0} V_\lambda = V_0$ est un noyau.

C est un cône adapté, linéairement séparant avec $C = C_\sigma$.

LEMME 1. - Soit V un noyau subordonné à C, tel qu'il existe une famille d'opérateurs (V_λ) linéaires ≥ 0 de H_C dans H_C, vérifiant

$$V = V_\lambda + \lambda V_\lambda V = V_\lambda + \lambda V V_\lambda \ , \qquad \forall \lambda > 0 \ .$$

Alors, pour toute g borélienne ≥ 0 dans Ω telle que $Vg < +\infty$, on a

$$(\lambda V_\lambda g \leq g) \iff g = (I + \lambda V)f \quad \text{avec } f \text{ borélienne } \geq 0 \ .$$

Démonstration. - Si $\lambda V_\lambda g \leq g$ et $Vg < \infty$, on a :

$$g = (I + \lambda V)(g - \lambda V_\lambda g) = (I + \lambda V)f \ ,$$

et réciproquement.

En particulier, le lemme s'applique si g est C-dominante telle que Vg est finie.

1. Etude de la résolvante.

Définition. - Un noyau V subordonné à C est dit C-majorable, s'il existe $w > 0$ dans Ω, w C-dominante, telle que Vw existe, soit continue et $Vw \leq kw$ dans Ω (pour un certain k réel > 0). (Cf. [13].)

PROPOSITION 2. - Tout noyau V subordonné à C et C-majorable admet une résolvante.

Démonstration. - Soit H_w l'espace vectoriel des fonctions continues f telles qu'il existe $\alpha > 0$ réel avec $|f| \leq \alpha w$.

V se prolonge en un opérateur linéaire dans H_w, borné pour la norme déduite de la norme suivante sur H_w

$$\|f\|_w = \inf\{\lambda > 0 \ ; \ |f| \leq \lambda w\} .$$

H_w est complet pour cette norme, donc $L(H_w , H_w)$ aussi.

Pour $\lambda > 0$ assez petit, $(\lambda < \frac{1}{\|V\|_w})$, on pose

$$V_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \lambda^k V^{k+1} .$$

V étant itérable, cette série converge normalement (pour la norme $\|V\|_w$), et V_λ est un opérateur linéaire borné dans H_w pour la norme relative à w, et

$$\|V_\lambda\|_w \leq \|V\|_w .$$

V_λ, quand il existe, est un opérateur ≥ 0 (démonstration standard). Enfin, l'ensemble e des $\lambda > 0$, tels que V_λ existe, est ouvert (complémentaire du spectre de $-V$) et fermé grâce à l'inégalité

$$\|V_{\lambda_n} - V_{\lambda_m}\|_w \leq |\lambda_n - \lambda_m| \ \|V\|_w^2 ,$$

déduite de l'équation résolvante vérifiée par les V_λ pour $\lambda \in e$. Donc $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ existe pour tout $\lambda > 0$, et V_λ est un opérateur linéaire borné sur H_w, et on a

$$\|V_\lambda\|_w \leq \frac{1}{\lambda} , \qquad \forall \lambda > 0 .$$

PROPOSTION 3. - Si V est subordonné à C et C-majorable, sa résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ est telle que :

$$V_\lambda(H_C) \subset H_C , \qquad \forall \lambda > 0 ;$$

et V_λ est un opérateur linéaire continu dans H_C , $\forall \lambda > 0$.

Démonstration. - En effet, si $\varphi \in C_K^+(\Omega)$, $V_\lambda \varphi \in H_C$, comme on le voit facilement. Pour achever la démonstration, on applique un théorème général sur les opérateurs C-bornés [13].

Le lemme suivant est très commode pour l'approximation d'un noyau subordonné quelconque.

LEMME 4. - *Soient* U , V , W *trois noyaux subordonnés à* C *et* C-*majorables, tels que* $U = V + W$ *dans* H_C , (U_λ) , (V_λ) *et* (W_λ) *leurs résolvantes (qui existent). Alors, pour tout* $g \in C$, *on a*

$$U_\lambda\, g \geq V_\lambda\, g \quad \text{et} \quad U_\lambda\, g \geq W_\lambda\, g \ , \qquad \forall \lambda > 0 .$$

De plus, $U_\lambda \leq V_\lambda + W_\lambda$, $\forall \lambda > 0$.

Démonstration. - En effet, de $U = V + W$ on tire que

$$\begin{aligned} U_\lambda(I + \lambda U) &= V_\lambda(I + \lambda V) + W \\ &= V_\lambda(I + \lambda U) + (I - \lambda V_\lambda)W . \end{aligned}$$

Soit $w > 0$ C-dominante, assurant l'itérabilité de U . Soit $g \in C$, w-majorable. D'après le lemme 1 , g s'écrit $g = (I + \lambda U)f$ avec f continue ≥ 0 w-majorable (car U et U_λ opèrent dans H_w). Donc :

$$U_\lambda\, g = U_\lambda(I + \lambda U)f \geq V_\lambda(I + \lambda U)f$$

c'est-à-dire

$$U_\lambda\, g \geq V_\lambda\, g .$$

(De la même manière, $U_\lambda\, g \geq W_\lambda\, g$.)

Pour passer à $g \in C$, g quelconque, on écrit

$$g = \sup_n\, (g , nw) ,$$

et on a le droit d'écrire

$$U_\lambda\, g = \sup_n U_\lambda\, g_n .$$

Il en est de même pour V_λ et W_λ .

Pour démontrer que $U_\lambda \leq V_\lambda + W_\lambda$, on écrit

$$V_\lambda + W_\lambda - U_\lambda = (U_\lambda - V_\lambda)V + (U_\lambda - W_\lambda)W ,$$

et on applique la partie précédente à toute $g \in C \cap H_W$ (tous ces opérateurs opèrent dans le même espace H_W), puis à toute $g \in C$.

Dans ce qui suit, on se propose d'associer à tout noyau subordonné à C une résolvante achevée, en utilisant l'approximation d'un tel noyau par des noyaux subordonnés à C et C-majorables.

<u>La donnée est ici un cône convexe</u> $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ <u>tel que</u> $\mathcal{C}_K(\Omega) \subset H_C$, <u>linéairement séparant et stable par sommes continues</u>.

Soit $(U^\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille filtrante croissante d'opérateurs linéaires positifs de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$, subordonnés à C telle que :

(a) $(\alpha , \beta \in I , \alpha < \beta) \Longrightarrow (U^\beta - U^\alpha)$ est subordonné à C ;

(b) Pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$, $\sup\limits_\alpha U^\alpha \varphi \in o(C) \cap C$, ce qui entraîne que $U = \sup\limits_\alpha U^\alpha \varphi$ est subordonné à C ;

(c) Pour tout $\alpha \in I$, il existe une famille résolvante $(U_\lambda^\alpha)_{\lambda > 0}$ telle que :

1° U_λ^α est un opérateur linéaire positif de $o(C)$ dans lui-même pour $\alpha \in I$ et $\lambda > 0$;

2° Pour tout $g \in C \cap o(C)$, on a :

$$\lambda U_\lambda^\alpha g \leq g , \qquad \forall \alpha \in I \quad \text{et} \quad \forall \lambda > 0 ;$$

3° Pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda U_\lambda^\alpha \varphi = 0$, et

$$U^\alpha \varphi = U_\lambda^\alpha \varphi + \lambda U_\lambda^\alpha U^\alpha \varphi = U_\lambda^\alpha \varphi + \lambda U^\alpha (U_\lambda^\alpha \varphi)$$

$\forall \alpha \in I , \lambda > 0 , \varphi \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$;

(d) Pour $\alpha < \beta$, $\lambda > 0$ et tout $g \in C \cap o(C)$, on a :

$$U_\lambda^\beta g \geq U_\lambda^\alpha g .$$

Ces conditions sont nécessairement vérifiées si tous les noyaux U^α sont C-majorables avec $U^\alpha(\mathcal{C}_K^+) \subset C \cap o(C)$, $\forall \alpha \in I$. On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 5. - <u>Le noyau</u> $U = \sup\limits_\alpha U_\alpha$ <u>subordonné à</u> C <u>admet une résolvante</u> (U_λ) <u>qui satisfait à la condition</u> (c) <u>ci-dessus et vérifie de plus</u> :

1° <u>Pour tout</u> $\varphi \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$, $U_\lambda \varphi = \lim\limits_\alpha U_\lambda^\alpha \varphi$

2° <u>Pour tout</u> $h \in o(C)$, $U_\lambda h = \lim\limits_\alpha U_\lambda^\alpha h$.

Démonstration. - Soit $\varphi \in C_K^+(\Omega)$, et soient $g = U\varphi$, $g_\alpha = U^\alpha \varphi$, $g_1 \in C$, $g_1(x) \geq 1$ pour tout $x \in S\varphi$.

1° Montrons que, pour tout $\varphi \in C_K^+(\Omega)$, $\lim\limits_\alpha U_\lambda^\alpha \varphi = U_\lambda \varphi$ existe, et que c'est une fonction s. c. s.

Pour $\beta > \alpha$, on a $g_\beta > g_\alpha$ et, d'après (d),

$$g \geq \lambda U_\lambda^\beta g \geq \lambda U_\lambda^\beta g_\beta \geq \lambda U_\lambda^\beta g_\alpha \geq \lambda U_\lambda^\alpha g_\alpha$$

La fonction $t = \sup\limits_\alpha \lambda U_\lambda^\alpha g_\alpha$ est donc s. c. i.

La famille g_α converge uniformément sur tout compact, en croissant vers g , par suite,

$$\lim_\alpha U_\lambda^\alpha \varphi = \lim_\alpha g_\alpha - \lim_\alpha \lambda U_\lambda^\alpha g_\alpha$$

existe et

$$U_\lambda \varphi = \lim_\alpha U_\lambda^\alpha \varphi$$

est s. c. s.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α_0 tel que $(\alpha > \alpha_0) \Longrightarrow (g - g_\alpha < \varepsilon$ sur $S\varphi)$, par suite $g - g_\alpha \leq \varepsilon g_1$ sur $S\varphi$, donc partout ; on en déduit

$$\lambda U_\lambda^\alpha g - \lambda U_\lambda^\alpha g_\alpha \leq \varepsilon \lambda U_\lambda^\alpha g_1 \leq \varepsilon g_1$$

ou encore

$$\lim_\alpha \lambda U_\lambda^\alpha U\varphi = \lim_\alpha \lambda U_\lambda^\alpha U^\alpha \varphi .$$

La famille $(U_\lambda^\alpha)_\alpha$ est uniformément C-bornée, par suite, pour tout $h \in o(C)$, $\lim\limits_\alpha U_\lambda^\alpha h$ existe, et

$$U_\lambda h = \lim_\alpha U_\lambda^\alpha h = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq h \\ \varphi \in C_K^+}} U_\lambda \varphi .$$

2° Montrons que $U_\lambda h$ est continue pour tout $h \in o(C)$. Pour cela, on utilise le lemme suivant :

LEMME 6. - <u>Soit</u> $C \subset C^+(\Omega)$ <u>un cône convexe avec</u> $C_K \subset H_C$. <u>Soit</u> U <u>un opérateur C-borné. Si, pour toute</u> $\varphi \in C_K^+$, $U\varphi$ <u>est s. c. s., alors</u> Uh <u>est s. c. s.</u>, $\forall\, h \in o(C)$, $h \geq 0$.

La démonstration figure dans [13].

Soit $\varphi \in C_K^+$. On a

$$U^\alpha \varphi = U_\lambda^\alpha \varphi + \lambda U_\lambda^\alpha U^\alpha \varphi .$$

On a démontré que :

$$\lim_\alpha U_\lambda^\alpha U\varphi = \lim_\alpha U_\lambda^\alpha U^\alpha \varphi$$

est s. c. s. car $U\varphi \in o(C)$.

Donc $\lim\limits_\alpha U_\lambda^\alpha U^\alpha \varphi$ est continue, $\lim\limits_\alpha U^\alpha \varphi$ est aussi continue ; il en est donc de même pour $\lim\limits_\alpha U_\lambda^\alpha \varphi$.

Le lemme précédent permet donc de conclure que $\lim\limits_\alpha U_\lambda^\alpha h$ est continue pour toute $h \in o(C)$.

3° Pour tout $h \in o(C)$, on a : $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda U_\lambda h = 0$. En effet, pour tout $\varphi \in C_K^+$,

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda U_\lambda \varphi = 0 ,$$

car, de $g_\alpha = U_\lambda^\alpha \varphi + \lambda U_\lambda^\alpha g_\alpha$ on tire

$$U_\lambda^\alpha \varphi \leq g_\alpha \leq g$$

d'où

$$U_\lambda \varphi \leq g \qquad \text{et} \qquad \lim_{\lambda\to 0} \lambda U_\lambda \varphi = 0 .$$

Il en résulte, d'après un théorème de [13], que, pour tout $h \in H_C$, $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda U_\lambda h = 0$, car la famille $(\lambda U_\lambda)_{\lambda>0}$ est uniformément C-bornée.

4° La famille (U_λ) est une résolvante. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α_0 tel que

$$(\alpha > \alpha_0) \implies (g - g_\alpha) \leq \varepsilon g' \quad (g \in o(g') , \quad g' \in C) .$$

On a l'égalité

$$g - U_\lambda \varphi - \lambda U_\lambda g = (g - g_\alpha) - (U_\lambda \varphi - U_\lambda^\alpha \varphi) - (\lambda U_\lambda g - \lambda U_\lambda^\alpha g) - \lambda U_\lambda^\alpha (g - g_\alpha)$$

et comme $\lambda U_\lambda^\alpha (g - g_\alpha) \leq \varepsilon g'$, par passage à la limite, on obtient $g - U_\lambda \varphi - \lambda U_\lambda g = 0$ ou encore

$$U\varphi = U_\lambda \varphi + \lambda U_\lambda U\varphi .$$

Lorsque $\lambda \to 0$, $\lim_{\lambda\to 0} \lambda U_\lambda(U\varphi) = 0$ puisque $U\varphi \in o(C)$, on a donc

$$U\varphi = \sup_{\lambda\to 0} U_\lambda \varphi \text{ , pour tout } \varphi \in C_K^+ .$$

Comme U est un noyau, pour toute $h \in o(C)$, $h \geq 0$, on a

$$U(h) = \sup_{\substack{0\leq\varphi\leq h \\ \varphi\in C_K^+}} U\varphi = \sup_{\substack{0\leq\varphi\leq h \\ \varphi\in C_K^+}} [\sup_\lambda U_\lambda \varphi]$$

d'où $U(h) = \sup U_\lambda(h)$, égalité vérifiée même si $U(h)$ n'est pas finie.

Pour tout λ , $\mu > 0$, $\lambda < \mu$, et tout α , tout $\varphi \in o(C)$, on a :

$$U_\lambda^\alpha \varphi = U_\mu^\alpha \varphi + (\mu - \lambda)U_\lambda^\alpha U_\mu^\alpha \varphi = U_\mu^\alpha \varphi + (\mu - \lambda)U_\mu^\alpha U_\lambda^\alpha \varphi$$

par passage à la limite, on en tire

$$U_\lambda \varphi = U_\mu \varphi + (\mu - \lambda)U_\lambda U_\mu \varphi = U_\mu \varphi + (\mu - \lambda)U_\mu U_\lambda \varphi$$

Supposons $\varphi \geq 0$, et faisons tendre λ vers 0 . On a $\lim_{\lambda\to 0} \lambda U_\lambda U_\mu \varphi = 0$, d'où

$$U\varphi = \sup_{\lambda\to 0} U_\lambda \varphi = U_\mu \varphi + \mu(\sup_{\lambda\to 0} U_\lambda U_\mu \varphi)$$

$$U\varphi = U_\mu \varphi + \mu U(U_\mu \varphi) ,$$

égalité qui a un sens même si $U\varphi$ et $U(U_\mu \varphi)$ ne sont pas finies partout ; mais, si $\varphi \in C_K^+$, alors $U\varphi$ est finie, donc $U(U_\mu \varphi)$ aussi.

COROLLAIRE 7. - <u>Tout noyau</u> U <u>subordonné à</u> C <u>tel que</u> $U(C_K(\Omega)) \subset o(C)$, <u>admet une résolvante</u> U_λ <u>telle que</u> $U_\lambda(o(C)) \subset o(C)$, <u>et pour toute</u> $\varphi \in (o(C))^+$,

$$U\varphi = \sup_{\lambda\to 0} U_\lambda \varphi .$$

<u>Démonstration</u>. - Considérons la famille $(\psi_\alpha) \subset C_K^+(\Omega)$, où $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$, de sorte que $\sup \psi_\alpha = 1$. Posons $U^\alpha : \varphi \longmapsto U(\psi_\alpha \varphi) = U^\alpha \varphi$, pour $\varphi \in C_K(\Omega)$. Les noyaux U^α sont subordonnés à C et C-majorables, ils admettent donc des résolvantes. D'autre part, la famille U^α satisfait aux conditions de la proposition précédente.

COROLLAIRE 8. - <u>Soient</u> U , V , W <u>des noyaux subordonnés à</u> C <u>qui envoient</u> $C_K(\Omega)$ <u>dans</u> $o(C)$, (U , V , W ne sont plus supposés C-majorables). <u>Alors, pour tout</u> $g \in C$ <u>et tout</u> $\lambda > 0$,

$$U_\lambda g \geq V_\lambda g \quad \text{et} \quad U_\lambda g \geq W_\lambda g .$$

De plus, $U_\lambda \leqslant V_\lambda + W_\lambda$ sur C .

Démonstration. - Considérons la famille $(\psi_\alpha) \subset \mathcal{C}_K^+$, comme dans le corollaire précédent. Alors, pour tout α ,

$$U_\lambda^\alpha g \geqslant V_\lambda^\alpha g \ , \quad \forall\ g \in C \quad \text{et} \quad U_\lambda^\alpha \geqslant V_\lambda^\alpha + W_\lambda^\alpha \quad \text{sur} \quad C \ ,$$

et, pour tout $h \in o(C)$,

$$U_\lambda\ h = \lim_\alpha U_\lambda^\alpha\ h \ ;$$

il en est, de même pour V_λ et W_λ , ce qui démontre le corollaire.

2. Construction du semi-groupe associé à un noyau.

Nous utiliserons le théorème de Hille-Yosida sous la forme suivante :

THÉORÈME 9. - Soit E un e. l. c. séparé complet pour les suites. Soit $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille d'opérateurs linéaires de E dans E , telle que :

1° $V_\lambda - V_\mu = (\mu - \lambda) V_\lambda V_\mu = (\mu - \lambda) V_\mu V_\lambda$;

2° La famille d'opérateurs $[(\lambda V_\lambda)^n]_{n\in\underline{N},\lambda\in\underline{R}^+}$ est équicontinue.

Alors si F est l'adhérence de l'image commune des opérateurs V_λ , il existe un semi-groupe (P_t) équicontinu sur F , et un seul, tel que :

1° $\lim_{t\to 0} P_t\ x = x$, $\forall\ x \in F$;

2° $V_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\ P_t\ dt$ sur F .

Démonstration. - On a évidemment $V_\lambda(E) = V_\mu(E)$, $\forall\ \mu$, $\lambda > 0$. Par continuité, on a $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda\ x = x$, $\forall\ x \in V_\mu(E)$, donc $\forall\ x \in F$. Il s'ensuit que les opérateurs V_λ sont injectifs sur F . On peut donc définir l'opérateur A sur $V_\lambda(E)$ tel que $(\lambda I - A)^{-1} = V_\lambda$, et on se trouve ramené au théorème de Hille-Yosida (cf. [16], p. 246).

On se donne maintenant un cône convexe $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$, tel que :

1° $C = C_\sigma$ (C stable par sommes continues) ;

2° C linéairement séparant.

On sait que tout noyau V subordonné à C , à valeurs dans l'espace $o(C)$, admet une résolvante achevée (V_λ), telle que $V_\lambda(o(C)) \subset o(C)$.

Rappelons que $o(C)$ est un espace adapté de Fréchet pour sa topologie de l'ordre définie par la suite de semi-normes :

$$p_n(\varphi) = \inf_{\substack{f \in C \\ f \geq |\varphi|}} (\sup_{x \in K_n} f(x)) \qquad (\text{cf. } [13]).$$

où (K_n) est une suite fortement croissante de compacts telle que $\bigcup_n K_n = \Omega$.

LEMME 10. - <u>Soit</u> $E = \overline{V_\lambda(o(C))}$ (<u>adhérence dans</u> $o(C)$). <u>On a</u> $\overline{V_\lambda(E)} = E$, $\forall\ \lambda > 0$, <u>et la famille</u> $(\lambda V_\lambda)^n$ <u>pour</u> $n \in \mathbb{N}$ <u>et</u> $\lambda > 0$ <u>est équicontinue</u>.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de démontrer que, pour tout n , on a

$$p_n(\lambda V_\lambda\ \varphi) \leq p_n(\varphi) \qquad \text{pour } \varphi \in o(C) .$$

Soient $\varepsilon > 0$, et $f \in C$ tel que

$$f \geq |\varphi| \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in K_n} f(x) < p_n(\varphi) + \varepsilon$$

Comme $\lambda V_\lambda\ f \leq f$, on a encore $f \geq |\lambda V_\lambda\ \varphi|$, donc $p_n(\lambda V_\lambda\ \varphi) < p_n(\varphi) + \varepsilon$.

PROPOSITION 11. - <u>Il existe un semi-groupe</u> (P_t) <u>d'opérateurs positifs continus dans l'espace de Fréchet</u> $E = V_\lambda(o(C))$, <u>tel que</u> :

1° <u>Pour toute</u> $\varphi \in E$, <u>on a</u>

$$\lim_{t \to 0} P_t\ \varphi = \varphi \qquad (\text{pour la topologie de } E) ;$$

2° (P_t) <u>est équicontinu sur</u> E ;

3° $V_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\ P_t\ dt$ <u>sur</u> E ;

4° $V = \int_0^\infty P_t\ dt$ <u>sur</u> $V_\lambda(E)$.

<u>Démonstration</u>. - Pour 1°, 2° et 3°, il suffit d'appliquer le théorème. Pour obtenir 4°, on applique le théorème de Lebesgue de la manière suivante : Soit f_μ l'application $t \to e^{-\mu t}\ P_t\ V_\lambda\ \varphi(x)$ où $\varphi \geq 0$, $\varphi \in o(C)$. f_μ est positive, $f_\mu \geq f_{\mu'}$, si $\mu \leq \mu'$, et $\sup_{\mu \to 0} V_\mu\ V_\lambda\ \varphi(x) < \infty$, $\forall\ x$, car

$$(\lambda - \mu) V_\mu\ V_\lambda\ \varphi(x) \leq V\varphi(x)$$

donc

$$V_\mu\ V_\lambda\ \varphi(x) \leq \frac{2}{\lambda}\ V\varphi(x) , \qquad \forall\ \mu > 0 .$$

Donc $\int_0^\infty P_t\ V_\lambda\ \varphi(x)\ dt$ existe. Pour voir que c'est égal à $VV_\lambda\ \varphi(x)$, il suffit de remarquer que $\lim_{\mu\to 0} V_\mu \varphi = V\varphi$ pour $\varphi \in o(C)$. Cela résulte de

$$\lim_{\mu\to 0} \mu V_\mu \varphi = 0 \ , \qquad \forall \ \varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$$

et de la densité de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $o(C)$ (cf. démonstration du théorème 5).

<u>Remarque</u>. - Soit $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ un cône convexe tel que $C = C_\sigma$ et $H_C \supset \mathcal{C}_K(\Omega)$. On peut voir que $o(C)$ est un espace de Fréchet pour la topologie induite par celle de H_C , qui est aussi la topologie de l'ordre sur $o(C)$. $\mathcal{C}_K(\Omega)$ est dense dans $o(C)$ pour cette topologie.

En conséquence, les hypothèses faites sur le noyau V , c'est-à-dire V subordonné à C et à valeurs dans $o(C)$, ne seraient qu'apparemment améliorées si on supposait seulement V subordonné à C, et $V(\mathcal{C}_K)$ contenu dans l'adhérence de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans H_C .

3. Semi-groupes et mesures représentatives.

Voici d'abord un théorème de Stone-Weierstrass pour les espaces adaptés.

THÉORÈME 12. - <u>Soit</u> $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ <u>un cône convexe stable par enveloppe inférieure, linéairement séparant et adapté. Alors, l'espace vectoriel</u> $C - C$ <u>est dense dans</u> $o(C)$ $(= H_C)$ <u>pour la topologie de l'ordre</u>.

<u>Démonstration</u>.

1° Pour tout $x \in \Omega$, et tout ouvert ω relativement compact $\omega \ni x$, il existe $f \in C - C$ avec $f = 0$ dans $\complement\omega$ et $f(x) > 0$.

En effet, dans le cas contraire, pour un $\omega_0 \ni x$, pour tous $f , g \in C$, on a

$$(g \geqslant f \quad \text{sur} \quad \omega_0) \implies (g(x) \geqslant f(x)) \ .$$

Soit $H = (C - C)|_{\complement\omega_0}$. L'application

$$(f - g) \longmapsto f(x) - g(x)$$

définit une forme linéaire croissante sur H qui est adapté ; elle se représente donc par une mesure, μ positive sur $\complement\omega_0$. Cette mesure μ commute avec $\inf$, c'est-à-dire

$$\mu(\inf(f \ , \ g)) = \inf(\mu(f) \ , \ \mu(g)) \ .$$

Donc μ est de la forme $\lambda\varepsilon_y$ $(\lambda > 0)$, et $y \in \complement\omega_0$. On aurait donc $f(x) = \lambda f(y)$, $\forall \ f \in C$, ce qui est impossible puisque C est linéairement séparant.

2° $(C - C)$ est dense dans $\mathcal{C}_K(\Omega)$ pour la topologie de l'ordre de $o(C)$.

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, et $v_1 \in C - C$ telle que $|\varphi - v_1| < \varepsilon$ sur K . Soit $v_0 \in C - C$, $v_0 > |\varphi|$ sur $S\varphi$, et $v_0 = 0$ hors d'un voisinage de $S\varphi$

$$v_2 = \sup(- v_0 , \inf(v_0 , v_1))$$

approche φ à ε près dans $o(C)$.

C. Q. F. D.

LEMME 13. - <u>Pour tout</u> $x \in \Omega$, <u>les mesures</u> $\varepsilon_\lambda V$ (<u>où</u> V <u>est un noyau subordonné à</u> C) <u>sont portées par l'ensemble</u>

$$\Omega_0 = \complement\{y \in \Omega \ ; \ V\varphi(y) = 0 \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)\} \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Si K est un compact, $K \subset \complement\Omega_0$, la fonction $V(\varphi.1_K)$, où $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$ et 1_K est l'indicatrice de K , est telle que :

$$(u \in C \ , \ u \geq V(\varphi.1_K) \text{ sur } K) \implies u \geq V(\varphi.1_K) \text{ partout.}$$

or $V(\varphi.1_K) = 0$ sur K , donc partout.

<u>Remarque</u>.

1° Si Ω est réunion dénombrable de compacts, il en est de même de Ω_0 .

2° Si on restreint le noyau V à l'espace Ω_0 (c'est-à-dire si on considère le noyau $\psi \to V\psi$, où $\psi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$, $S\psi \subset \Omega_0$) et si on restreint le cône C à Ω_0 , alors le noyau V est subordonné à $C_{|\Omega_0}$ et à valeurs dans $o(C_{|\Omega_0})$.

PROPOSITION 14. - <u>Si on se restreint à l'espace</u> Ω_0 , <u>le cône</u> $C \cap o(C)$ <u>est dense dans</u> C <u>pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (de</u> Ω_0).

<u>Démonstration</u>. - En effet, il existe $(\varphi_\alpha) \subset \mathcal{C}_K^+(\Omega)$, $S\varphi_\alpha \subset \Omega_0$, telle que $(V\varphi_\alpha)$ soit une famille filtrante croissante avec $\sup V\varphi_\alpha = +\infty$ sur Ω_0 .

Soit $u \in C_{|\Omega_0}$. On a :

$$u = \sup_\alpha (\inf(u \ , \ V\varphi_\alpha))$$

d'où le résultat d'après le lemme de Dini.

<u>Remarque</u>. - Soit $C' = C \cap o(C)$. C étant stable par sommes continues, il en est de même pour C' . De plus, C' est adapté (d'après un théorème de [13]) et, d'après le théorème précédent, $C' - C'$ est dense dans $o(C')$.

<u>Les considérations précédentes montr nt qu'on peut toujours supposer le noyau</u> V <u>strictement positif (au sens que</u> : $\forall\ x \in \Omega$, $\exists\ \varphi \in C_K^+$: $V\varphi(x) > 0$) <u>et le cône</u> C <u>adapté, ce qu'on fera désormais</u>.

L'espace vectoriel $C - C$ est alors dense dans $o(C)$. Nous allons maintenant représenter le semi-groupe (P_t) construit ci-dessus au moyen de mesures de Radon dans Ω .

THÉORÈME 15. - <u>Pour toute</u> $\varphi \in o(C)$, $\lambda V_\lambda\ \varphi$ <u>admet une limite en tout point</u> $x \in \Omega$ <u>quand</u> $\lambda \to +\infty$.

<u>Démonstration</u>. - Cette limite existe si $\varphi \in C - C$. La famille $(\lambda V_\lambda)_{\lambda > 0}$ est une famille d'opérateurs uniformément C-borné au sens de [13]. Donc, d'après un théorème de densité établi dans ce mémoire, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda\ \varphi(x)$ existe, $\forall\ \varphi \in o(C)$.

<u>Notation</u>. - Posons $\hat{\varphi}(x) = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda\ \varphi(x)$. Posons aussi $\delta(V) = \delta(C - V(C_K^+))$ (support fin de V). Les résultats qui suivent généralisent ceux obtenus par RAY (cf. [15]) dans le cas d'un noyau avec résolvante sous-markovienne à valeurs dans $C_0(\Omega)$, dans le cas où les fonctions λ-surmédianes séparent Ω .

PROPOSITION 16. - <u>On a les propriétés suivantes</u> :

1° <u>L'opérateur</u> $P_0 : \varphi \to \hat{\varphi}$ $(\varphi \in o(C)$ <u>est linéaire, positif</u>, C-<u>borné</u> (cf. [13]) ;

2° <u>Pour toute</u> $\varphi \in o(C)$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda\ \hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(x)$, $\forall\ x \in \Omega$;

3° $\hat{\varphi}$ <u>est une fonction borélienne de Baire</u> : $\hat{\varphi} = \lim\limits_{n\to\infty} nV_n\ \varphi$;

4° $\hat{\varphi}(x) = \int \varphi\ d\mu_x$, $\forall\ x \in \Omega$ où μ_x <u>est une mesure minimale balayée de</u> ε_x <u>pour le balayage défini par le cône convexe</u> $(C - V(C_K^+))$;

5° <u>Pour toute</u> $\varphi \in o(C)$, <u>on a l'équivalence</u> :

$$(\varphi = \hat{\varphi}) \iff (\varphi \in \overline{V_\lambda(o(C))})$$

<u>où</u> $\overline{V_\lambda(o(C))}$ <u>désigne l'adhérence pour la topologie de</u> $o(C)$, <u>et si</u> $\varphi \in C$, <u>on a</u> : $\hat{\varphi} \leq \varphi$;

6° <u>Pour toute</u> $\varphi \in o(C)$ <u>et toute mesure</u> $\mu \geq 0$ <u>pseudo-portée par</u> $\delta(V)$, <u>on a</u> :

$$\int \hat{\varphi}\ d\mu = \int \varphi\ d\mu$$

$$(\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)) \iff (x \in \delta(V1))$$

et toute mesure $\mu \geq 0$ pseudo-portée par $\delta(V)$ est minimale ;

7° Si (μ_α) converge faiblement vers μ , μ_α et μ étant des mesures positives pseudo-portées par $\delta(V1)$, alors

$$\lim_\alpha \int \hat{\varphi}\, d\mu_\alpha = \int \hat{\varphi}\, d\mu\,, \qquad \forall\ \varphi \in o(C) \ ;$$

8° Pour tout $x \in \Omega$ et tout $\lambda \geq 0$, la mesure $\varepsilon_x V_\lambda$ est portée par $\delta(V)$ au sens (le plus strict) que tout compact disjoint de $\delta(V)$ est de mesure nulle pour $\varepsilon_x V_\lambda$. Il en est de même de toute mesure μV_λ où μ est une mesure positive sur Ω (car pour toute fonction φ borélienne nulle sur $\delta(V)$, $V\varphi \equiv 0$).

Démonstration.

1° P_0 est C-borné, car $\hat{1} \leq v$, $\forall\ v \in C$.

2° En effet, pour toute $\varphi \in C$ (donc aussi dans $o(C)$), on a

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \mu\to\infty}} \lambda V_\lambda\, \mu V_\mu\, \varphi(x) \quad \text{existe}\,, \qquad \forall\ x \in \Omega\,,$$

Car, pour toute $v \in C$,

$$\lambda V_\lambda\, v = \lambda V(v - \lambda V_\lambda\, v) \in C\,.$$

Donc, pour toute $\varphi \in C$, si $\lambda' > \lambda$ et $\mu' > \mu$, on a

$$\lambda' V_{\lambda'}\, \mu' V_{\mu'}\, \varphi \geq \lambda V_\lambda\, \mu V_\mu\, \varphi$$

donc la limite double existe (convergence monotone).

3° C'est immédiat.

4° Sur $o(C)$, la forme linéaire $\varphi \to \hat{\varphi}(x)$ $(x \in \Omega)$ définit une mesure μ_x . μ_x est balayée de ε_x pour le balayage défini par le cône $C - V(\mathcal{C}_K^+)$.

Soit μ une balayée quelconque de ε_x relativement au cône $C - V(\mathcal{C}_K^+)$. On a

$$\int V_\lambda\, \varphi\, d\mu = V_\lambda\, \varphi(x)\,, \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$$

car

$$V_\lambda\, \varphi = V(\varphi - \lambda V_\lambda\, \varphi)\,.$$

On se ramène donc à montrer que

$$\int V\psi\, d\mu = V\psi(x)\,, \qquad \forall\ \psi \in \mathcal{C}_K(\Omega)\,,$$

ce qui est immédiat.

Il en résulte que si μ est une balayée de ε_x pour le cône $C - V(C_K^+)$, on a $\mu_x \prec \mu$, cela résulte du lemme suivant :

LEMME 17. - Si μ est une mesure positive C-intégrable, si on pose

$$\hat{\mu}(v) = \int \hat{v}\, d\mu , \qquad \forall\, v \in C ,$$

on a $\hat{\mu} \prec \mu$ (où $\prec$ désigne le balayage par rapport au cône $C - V(C_K^+)$).

En effet, on a :

$$\int \lambda V_\lambda\, v\, d\mu \leq \int v\, d\mu , \qquad \forall\, v \in C$$

donc en passant à la limite,

$$\int \hat{v}\, d\mu = \int v\, d\hat{\mu} \leq \int v\, d\mu$$

et on a

$$\int V1\, d\mu = \int V1\, d\hat{\mu} , \quad \text{car} \quad \widehat{V1} = V1 .$$

Il en résulte bien que μ_x est minimale.

5° Si $\varphi = \hat{\varphi}$, on a $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda\, \varphi = \varphi$ (convergence simple) et il existe $v \in C$ avec $\lambda V_\lambda\, \varphi \leq v$, $\forall\, \lambda$. Le théoreme de Lebesgue montre que $\lambda V_\lambda\, \varphi \to \varphi$ faiblement et, par Hahn-Banach, on voit que $\varphi \in \overline{V_\lambda(o(C))}$. La réciproque est immédiate.

6° $(\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)) \implies x \in \delta(V1)$.

En effet, soit $\mu \prec \varepsilon_x$, on a

$$\hat{\varphi}(x) = \int \hat{\varphi}\, d\mu = \int \varphi\, d\hat{\mu}$$

Donc $\hat{\mu} = \hat{\varepsilon}_x = \mu_x$. Si donc $\varepsilon_x = \hat{\varepsilon}_x$, on a : $\varepsilon_x = \hat{\mu} \prec \mu \prec \varepsilon_x$, d'où $\mu = \varepsilon_x$ et $x \in \delta(V1)$.

Réciproquement, si $x \in \delta(V1)$, $\hat{\varepsilon}_x \prec \varepsilon_x$, donc $\hat{\varepsilon}_x = \varepsilon_x$, et

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi(x) , \qquad \forall\, \varphi \in o(C) .$$

On en déduit bien que si μ est pseudo-portée par $\delta(V1)$, on a

$$\int \hat{\varphi}\, d\mu = \int \varphi\, d\mu , \qquad \forall\, \varphi \in o(C)$$

car l'ensemble $\{y \,;\, \hat{\varphi}(y) \neq \varphi(y)\}$ est un borélien de Baire disjoint de la frontière, donc de μ-mesure nulle.

7° Cela résulte du 6°, car $\int \hat{\varphi}\, d\mu = \int \varphi\, d\mu$ pour toute mesure μ pseudo-portée.

8° Cela résulte, pour $\varepsilon_x V$, d'un théorème antérieur (cf. I) où nous avons montré que $\varepsilon_x V$ est strictement porté par $\delta(V)$. Il en est donc de même pour les mesures $\varepsilon_x V_\lambda$ qui sont plus petites que $\varepsilon_x V$.

Etude de l'espace $E = \overline{V_\lambda(o(C))}$. - On a déjà vu la caractérisation de E :

$$E = \{\varphi \in o(C) \ ; \ \varphi = \hat{\varphi}\} .$$

on va montrer ici que $E = E^+ - E^+$ où $E^+ = E \cap C^+(\Omega)$. Pour cela, on introduit l'opérateur $\varphi \to \overline{\varphi}$ ainsi défini :

Définition. - Pour toute $\varphi \in E$, on pose

$$\overline{\varphi} = \inf\{u \in C \ ; \ u \geq \varphi \ \text{dans} \ \Omega\} .$$

La fonction φ n'est pas nécessairement dans E^+ .

Propriétés de la fonction $\overline{\varphi}$.

1° $\overline{\varphi + \psi} \leq \overline{\varphi} + \overline{\psi}$, $\forall \varphi , \psi \in E$;

2° Continuité.

LEMME 18. - Soit $\psi \in C$, $\varphi , \varphi' \in E$ tels que :

$$|\varphi - \varphi'| \leq \psi .$$

Alors, $|\overline{\varphi} - \overline{\varphi}'| \leq \psi$.

Démonstration. - On a $\varphi \leq \varphi' + \psi < \inf\limits_{\substack{v \in C \\ v \geq \varphi'}} \{v + \psi\}$. D'où $\overline{\varphi} \leq \overline{\varphi}' + \psi$.

LEMME 19. - Soit $(\varphi_n) \subset o(C)$ convergeant vers $\varphi \in o(C)$ pour la topologie de $o(C)$. Alors, il existe $v \in C$ et une sous-suite (φ_{n_k}) tels que (φ_{n_k}) converge vers φ dans l'espace $o(v)$ muni de la topologie induite sur $o(v)$ par l'espace de Banach H_v (des fonctions continues v-majorables).

Démonstration. - La topologie de $o(C)$ est définie par la suite des semi-normes:

$$p_i(\varphi) = \inf_{\substack{f \in C \\ f \geq |\varphi|}} (\sup_{y \in K_i} f(y))$$

où (K_i) est une suite fortement croissante exhaustive de compacts.

1° Il existe $f \in C$ tel que $|\varphi_{n_k}| \leq f$ et $|\varphi| \leq f$, pour une sous-suite (φ_{n_k}) de (φ_n) .

En effet, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha(i)$, suite de $\mathbb{N}$ telle que

$$|\varphi - \varphi_{\alpha(i)}| \leq f_i \ , \qquad f_i \in C \quad \text{et} \quad \sup_{y \in K_i} f_i(y) < \frac{1}{2^i}$$

Soit $w \in C$ tel que $|\varphi| \leq w$. On a

$$|\varphi_{\alpha(i)}| \leq w + \sum_i f_i = v \in C \ .$$

Le lemme résulte alors de la proposition suivante :

PROPOSITION 20. - <u>Soit</u> $(\varphi_n) \subset o(C)$ <u>convergeant vers</u> $\varphi \in o(C)$ <u>et telle que</u> $|\varphi_n| \leq f$ <u>pour un</u> $f \in C$. <u>Alors</u> (φ_n) <u>converge vers</u> φ <u>dans l'espace</u> $o(v)$ (v <u>tel que</u> $f \in o(v)$, $v > 0$) <u>muni de la topologie induite par la topologie de l'espace de Banach</u> H_v.

La démonstration est immédiate.

PROPOSITION 21. - <u>Soient</u> v <u>une fonction s. c. i. sur</u> Ω <u>et</u> V-<u>excessive (c'est-à-dire</u> $\lambda V_\lambda v \leq v$, $\forall \lambda > 0$, <u>et</u> $v = \sup_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda v$). <u>Alors</u> v <u>vérifie les inégalités</u> :

$$v(x) \geq \int v \, d\mu$$

<u>pour tout couple</u> (x , μ) <u>où</u> μ <u>est une mesure de Radon positive sur</u> Ω <u>balayée de</u> ε_x <u>relativement au cône</u> C.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de démontrer la proposition pour des fonctions du type $v = \lambda V_\lambda u$ où u est surmédiane s. c. i. On peut toujours supposer u majorée par un élément positif de C, $u \leq v_0$.

1° $V(u - \lambda V_\lambda u)$ est alors bien défini et vaut $V_\lambda u$. En effet :

$$V_\lambda u = V_\mu(u - \lambda V_\lambda u) + \mu V_\mu V_\lambda u \ .$$

or $\lim_{\mu\to 0} \mu V_\mu V_\lambda u \leq \lim_{\mu\to 0} \frac{\mu}{\lambda} V_\mu v_0 = 0$, car $v_0 \in C$, et on sait que $\lim_{\mu\to 0} \mu V_\mu \varphi = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_K$, donc, par un argument de densité pour toute $h \in o(C)$, $V_\mu(u - \lambda V_\lambda u)$ est décroissant en μ , et

$$\sup_{\mu\to 0} V_\mu(u - \lambda V_\lambda u) = V(u - \lambda V_\lambda u) = V_\lambda u \ .$$

2° Pour toute fonction borélienne $\psi \geq 0$ telle que $V\psi$ soit finie, on a :

$$\int V\psi \, d\mu \leq V\psi(x)$$

pour tout couple (x , μ) avec $\mu \underset{(C)}{<} \varepsilon_x$. En effet, on peut se ramener au cas où

ψ est s. c. s. bornée, car

$$\int V\psi \, d\mu = \sup_{\substack{\varphi \leq \psi \\ \varphi \text{ s.c.s.} \geq 0 \\ S\varphi \text{ compact}}} \int V\varphi \, d\mu \, .$$

or $\int V\varphi \, d\mu = \inf\{\int Vg \, d\mu$, g continue, ≥ 0 , Sg compact, $g \geq \varphi\}$, et l'inégalité cherchée est vraie pour les Vg , car le noyau V est tel que $V(C_K^+) \subset C$.

PROPOSITION 22. - <u>Pour toute</u> $\varphi \in E = \overline{V_\lambda(o(C))}$, <u>la fonction</u> $\overline{\varphi}$ <u>est excessive continue, et</u> $\overline{\varphi} \in E \cap C$.

<u>Démonstration</u>.

1° D'après un résultat démontré dans [13], on a :

$$\overline{\varphi}(x) = \sup_{\substack{\mu \underset{(C)}{<} \varepsilon_x}} \int \varphi \, d\mu \, , \qquad \forall \ \varphi \in o(C) \, .$$

Par conséquent, $\overline{\varphi}$ est une fonction surmédiane s. c. s.

2° Si v est surmédiane mesurable, sa régularisée s. c. i. $\tilde{v}$ est surmédiane car les noyaux V_λ sont continus.

Soit v surmédiane (mesurable), $v \geq \varphi$. On a :

$$\tilde{v} \geq \varphi \qquad \text{et} \qquad \hat{\tilde{v}} = \sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda \, \tilde{v} \geq \hat{\varphi} = \varphi$$

et, d'après la proposition précédente, $\hat{\tilde{v}}$, qui est excessive s. c. i. vérifie

$$\hat{\tilde{v}}(x) \geq \int \hat{\tilde{v}} d\mu \geq \int \varphi \, d\mu \, , \qquad \forall \ \mu \underset{(C)}{<} \varepsilon_x$$

donc $\hat{\tilde{v}} \geq \overline{\varphi}$.

3° Il en résulte que $\overline{\varphi}$ est la plus petite fonction surmédiane majorant φ . Elle est donc (surmédiane) s. c. i., car φ est continue. Donc $\overline{\varphi}$ est continue. Donc, d'après le lemme de Dini dans $o(C)$, on a $\overline{\varphi} \in \overline{C}$ adhérence de C dans $o(C)$. De plus,

$$\hat{\overline{\varphi}} = \sup_{\lambda} \lambda V_\lambda \, \overline{\varphi} = \overline{\varphi} \, .$$

Donc $\overline{\varphi} \in E$. On peut toujours supposer que C est fermé dans $o(C)$.

COROLLAIRE 23. - <u>On a</u> : $E = E^+ - E^+$ <u>où</u> $E^+ = E \cap \mathcal{C}^+(\Omega)$.

COROLLAIRE 24.

1° Toute forme linéaire positive sur E est continue.

2° Toute forme linéaire positive sur E se représente d'une manière unique par une mesure $\mu \geqslant 0$ pseudo-portée par $\delta(V)$.

3° Le dual E' de E est réticulé et s'identifie à l'espace des mesures C-intégrables pseudo-portées par $\delta(V)$.

Démonstration.

1° E est un Fréchet engendré par E^+ .

2° Pour toute forme linéaire T positive sur E , il existe une forme linéaire positive sur $o(C)$, donc une mesure $\mu \geqslant 0$ telle que $\mu \geqslant T$ sur E^+ . Posons alors

$$\hat{T}(u) = \sup_{\lambda \to \infty} T(\lambda V_\lambda u) , \qquad \forall u \in C .$$

Ce sup est fini, et définit une forme affine croissante sur C qui se représente de manière unique par une mesure positive qui est minimale.

3° Cette propriété montre que E est d'une certaine manière "adapté".

Voici une extension de la proposition.

PROPOSITION 25. - Soient $\varphi_1 , \varphi_2 , \ldots , \varphi_n$ une suite finie d'éléments de E , $\varphi = \sup_n (\varphi_1 , \ldots , \varphi_n)$ leur enveloppe supérieure. Alors

$$\overline{\varphi} = \inf\{u \in C \; ; \; u \geqslant \varphi_i , \; \forall i \leqslant n\}$$

est une fonction continue excessive $\overline{\varphi} \in E \cap C$ et $\overline{\varphi} = \hat{\varphi}$.

La démonstration est identique à celle déjà faite.

Application.

PROPOSITION 26. - Soit φ une fonction excessive s. c. i. Alors, il existe un ordonné filtrant croissant (v_α) de fonctions excessives continues tel que :

$$\varphi = \sup_\alpha v_\alpha .$$

Démonstration. - On écrit $\varphi = \sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda \varphi = \sup_{\lambda, \alpha} \lambda V_\lambda \varphi_\alpha$ où $(\varphi_\alpha) \subset C_K^+$ est croissante telle que $\varphi = \sup \varphi_\alpha$.

Soit $\psi_F = \sup\{\lambda V_\lambda \varphi_\alpha \; ; \; \lambda$ et α parcourant un ensemble fini d'indices $F\}$.

On a : $\overline{\psi}_F \in E \cap C$, $\overline{\psi}_F \leq \varphi$ et $(\overline{\psi}_F)$ est un ordonné filtrant croissant, avec $\sup_F \overline{\psi}_F = \varphi$.

PROPOSITION 27. - Pour toute φ fonction surmédiane s. c. i. C-majorée, on a $\varphi = \hat{\varphi} = \sup_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda \varphi$ sur $\delta(V)$.

Démonstration. - En effet, la famille de mesures $(\varepsilon_x \lambda V_\lambda)_{\lambda > 0}$ converge faiblement vers ε_x pour tout $x \in \delta(V)$. Donc φ étant s. c. i.

$$\varphi(x) \leq \liminf_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda \varphi(x) \leq \hat{\varphi}(x) .$$

Donc $\varphi(x) = \hat{\varphi}(x)$.

Signalons enfin un résultat standard sur le semi-groupe (P_t) construit plus haut.

THÉORÈME 28. - Il existe un semi-groupe $(\tilde{P}_t)$ d'opérateurs linéaires positifs, mesurable sur l'espace mesurable $(\Omega , \mathcal{B}_0(\Omega))$, où $\mathcal{B}_0(\Omega)$ est la tribu borélienne de Baire, qui coïncide avec le semi-groupe (P_t) sur l'espace $E = \overline{V_\lambda(o(C))}$, tel que, pour toute $f \in o(C)$ et tout $x \in \Omega$, la fonction $t \mapsto P_t f(x)$ est continue à droite. $(\tilde{P}_t)$ est unique ; les égalités

$$V_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \tilde{P}_t \, dt$$

$$V = \int_0^\infty P_t \, dt$$

se prolongent aux fonctions boréliennes de Baire.

Un prochain mémoire précisera l'étude des semi-groupes subordonnés à un cône adapté.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave). - Theory of capacities. - Lawrence, University of Kansas, Department of Mathematics, 1954 ; et Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 5, 1953/54, p. 131-295.

[2] CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 36, 1957, p. 179-189.

[3] HERVÉ (Rose-Marie). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-571 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[4] HUNT (G. A.). - Markoff processes and potentials, Illinois J. of Math., t. 1, 1957, p. 44-93 et p. 316-369.

[5] LION (Georges). - Famille d'opérateurs et frontières en théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, p. 389-453.

[6] MEYER (Paul-André). - Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 357-372.

[7] MEYER (Paul-André). - Probabilités et potentiel. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1318 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 14).

[8] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes de fonctions continues, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, 1967, Série A, p. 15-18.

[9] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Théorie globale du potentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, 1967, Série A, p. 238-241.

[10] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes et espaces de fonctions continues, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, Série A, p. 506-509.

[11] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Noyaux, résolvantes, semi-groupes, subordonnés à un cône adapté de fonctions continues, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, Série A, p. 21-24.

[12] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes de fonctions et potentiels. Remarques sur un travail de Wolfbrard Hansen, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, Série A, p. 102-105.

[13] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du potentiel, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t. 6, 1966/67, n° 5, 35 p.

[14] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Principe du minimum et maximalité en théorie locale du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).

[15] RAY (Daniel). - Resolvents, transition functions, and strongly markovian processes, Annals of Math., Series 2, t. 70, 1959, p. 43-72.

[16] YOSIDA (Kôsaku). - Functional analysis. - Berlin, Springer-Verlag, 1965 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 123).