Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Masanori Kishi

Autour du théorème d'existence par rapport à un noyau non symétrique

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 11 (1966-1967), exp. nº 2, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1966-1967__11__A2_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
11e année, 1966/67, n° 2
3 novembre et 1er décembre 1966

AUTOUR DU THÉORÈME D'EXISTENCE PAR RAPPORT À UN NOYAU NON SYMÉTRIQUE

par Masanori KISHI

En théorie du potentiel, par rapport à un noyau symétrique, non négatif, semi-continu inférieurement, G , on a le théorème suivant :

THÉORÈME. - *Soient X un compact, et $u(x)$ une fonction non négative, finie, semi-continue supérieurement sur X . Alors il existe une mesure positive μ , portée par X , telle que*

$$G\mu(x) \geqslant u(x) \quad \text{à p. p. p. sur } X \ ,$$

$$G\mu(x) \leqslant u(x) \quad \text{sur } S\mu \ , \text{ le support de } \mu \ .$$

Ici, l'expression "à p. p. p. sur X " veut dire que l'ensemble exceptionnel $\{x \in X \ ; \ G\mu(x) < u(x)\}$ est de mesure nulle pour toute mesure positive d'énergie finie.

Ce théorème sert à montrer l'existence d'une mesure d'équilibre ou d'une mesure balayée, et il est vérifié par la variation de Gauss, cependant cette variation ne convient pas pour un noyau non symétrique.

L'auteur a donné, concernant un noyau non symétrique, le théorème d'existence suivant ([1]) :

THÉORÈME. - *Soit $u(x)$ une fonction non négative finie s. c. s. sur X . Si le noyau adjoint $\check{G}$ satisfait au principe de continuité, la mesure ci-dessus existe.*

Comparant ces deux théorèmes, on se pose les problèmes suivants :

1° Chercher une famille (plus grande) d'ensembles exceptionnels avec laquelle l'existence de la mesure ci-dessus est assurée sans le principe de continuité. Cette famille sera plus petite que la famille des deux théorèmes.

([1]) Voir [10], [13], et NAKAI [16].

2° Supposant le principe de continuité, chercher une famille (plus grande) d'ensembles exceptionnels avec laquelle le théorème analogue est vrai. Ceci concerne intimement le problème de capacitabilité.

Dans le paragraphe 1, nous donnons une famille, correspondant au premier problème, et un lemme fondamental, duquel se déduisent deux théorèmes d'existence : un sans l'hypothèse, l'autre avec l'hypothèse sur le noyau adjoint. Le paragraphe 2 concerne une application des théorèmes d'existence aux mesures balayées. Dans le paragraphe 3, nous considérons l'énergie d'une mesure balayée. Dans le paragraphe suivant, nous donnons une application du lemme fondamental du paragraphe 1. A propos du deuxième problème ci-dessus, nous considérons, dans le dernier paragraphe, la capacitabilité des ensembles analytiques relativement à la capacité définie par l'énergie.

<u>Notations.</u>

X : l'espace compact ;

G : l'application $X \times X \longrightarrow [0, \infty]$ semi-continue inférieurement et positive sur la diagonale ;

$\check{G}$: le noyau adjoint de G défini par $\check{G}(x, y) = G(y, x)$;

$\mathfrak{M}$: l'espace des mesures positives sur X muni de la topologie vague ;

$\mathfrak{M}^1$: la totalité des mesures $\mu \in \mathfrak{M}$ de masse totale 1 .

Quelles que soient μ, $\nu \in \mathfrak{M}$, on définit

$$G\mu(x) = \int G(x, y)\, d\mu(y) \quad ,$$

$$\check{G}\mu(x) = \int \check{G}(x, y)\, d\mu(y) \quad ,$$

$$(\mu, \nu)_G = \int G\mu(x)\, d\nu(x) \quad ,$$

$$\|\mu\|_G^2 = \int G\mu(x)\, d\mu(x) = \text{l'énergie de } \mu \ .$$

1. Théorèmes d'existence.

LEMME FONDAMENTAL. - <u>Soient</u> V <u>un espace vectoriel topologique localement convexe,</u> U <u>un sous-ensemble de</u> V, W <u>un compact convexe de</u> V <u>tel que</u> $U \cap W \neq \emptyset$, et g <u>une application</u> $W \times W \to [0, \infty]$ <u>telle que</u> :

1° g <u>soit s. c. i. sur</u> $W \times W$;

2° <u>Quel que soit</u> $v \in U \cap W$, $g(w, v)$ <u>soit une fonction continue de</u> w <u>sur</u> W ;

3° Quels que soient w, $v_i \in W$ $(i = 1, 2)$, si $g(w, v_i) \leqslant \alpha$, $a_i \geqslant 0$, $a_1 + a_2 = 1$, alors $g(w, a_1 v_1 + a_2 v_2) \leqslant \alpha$.

Sous ces hypothèses, il existe $w_0 \in W$ tel que

$$g(w_0, w_0) \leqslant g(w_0, z) \quad \text{pour tout} \quad z \in U \cap W .$$

En effet, on pose, quel que soit $w \in W$,

$$\varphi(w) = \{v \in W ; \; g(w, v) \leqslant \inf_{z \in U \cap W} g(w, z)\} .$$

Alors $\varphi(w)$ est non vide et convexe, et l'application $\varphi : w \to \varphi(w)$ est fermée. Donc, d'après le théorème de point fixe de Glicksberg-Fan (2), il existe $w_0 \in W$ tel que $w_0 \in \varphi(w_0)$.

Pour appliquer ce lemme au théorème d'existence, définissons une famille d'ensembles exceptionnels. Posons comme suit :

$$\mathcal{C} = \{\mu \in \mathfrak{M} ; \; \check{G}\mu \text{ fini continu dans } X\} ,$$

$$\check{c}(K) = \sup\{\lambda(K) ; \; \lambda \in \mathcal{C} , \; S\lambda \subset K , \; \check{G}\lambda \leqslant 1 \text{ sur } K\} ,$$

K étant compact. Pour un ensemble arbitraire A,

$$\check{c}_*(A) = \sup\{\check{c}(K) ; \; K \text{ compact } \subset A\} .$$

Alors $\check{c}_*$ est :

(i) monotone,

(ii) sous-additive dénombrablement sur des ensembles mesurables pour toutes les $\lambda \in \mathcal{C}$.

LEMME (sans hypothèse sur $\check{G}$). - Si u est finie s. c. s., il existe une mesure $\mu \in \mathfrak{M}$ telle que

$$G\mu \geqslant u \quad \text{sur} \quad X \quad (\text{sauf sur un ensemble } E , \text{ avec } \check{c}_*(E) = 0) ,$$

$$\int G\mu \, d\mu = \int u \, d\mu .$$

Démonstration. - Sans diminuer la généralité, on peut supposer que l'ensemble $X' = \{x \in X ; \; u(x) > 0\}$ soit de capacité intérieure positive, $\check{c}_*(X') > 0$. Alors

(2) Voir [6], [9].

$\mathcal{C} \neq \{0\}$ et $\mathcal{C} \cap \mathfrak{M}^1 \neq \emptyset$.

Posons, quelles que soient μ, $\nu \in \mathfrak{M}^1$,

$$g(\mu , \nu) = \frac{\int G\mu \, d\nu}{\int u \, d\nu} .$$

La fonction g satisfait aux trois conditions du lemme fondamental, et il existe $\mu_0 \in \mathfrak{M}^1$ telle que

$$\frac{\int G\mu_0 \, d\mu_0}{\int u \, d\mu_0} \leqslant \frac{\int G\mu_0 \, d\lambda}{\int u \, d\lambda} ,$$

pour toute $\lambda \in \mathcal{C} \cap \mathfrak{M}^1$. D'après nos conditions, G est positif sur la diagonale, et $\check{c}_*(X') > 0$,

$$a = \frac{\int G\mu_0 \, d\mu_0}{\int u \, d\mu_0}$$

est positif fini. Donc

$$\mu = a^{-1} \mu_0$$

est la mesure que nous cherchons.

THÉORÈME 1 (sans hypothèse sur $\check{G}$). - Si u est une fonction s. c. s. non négative finie sur X, il existe une mesure telle que

$$G\mu \geqslant u \quad \text{sur } X \quad (\text{sauf sur } E \text{ , avec } \check{c}_*(E) = 0) ,$$

$$G\mu \leqslant u \quad \text{sur } S\mu .$$

Démonstration. - Prenons un filtre croissant (G_α) des fonctions non négatives finies continues sur $X \times X$, tel que

$$G_\alpha(x , y) \nearrow G(x , y) .$$

D'après le lemme précédent, pour chaque α, il existe $\mu_\alpha \in \mathfrak{M}$ telle que

$$G_\alpha \mu_\alpha \geqslant u \quad \text{sur } X ,$$

$$G_\alpha \mu_\alpha \leqslant u \quad \text{sur } S\mu_\alpha .$$

Puisque G est positif sur la diagonale, il est facile de voir que (μ_α) est borné dans $\mathfrak{M}$ à partir d'un indice convenable. Donc on peut supposer que le filtre

(μ_α) converge vaguement vers une mesure $\mu \in \mathfrak{M}$. On obtient l'inégalité

(1) $$G\mu(x) \leqslant u(x) \quad \text{sur} \quad S\mu \quad ,$$

à cause de la semi-continuité supérieure de u . Montrons l'inégalité

(2) $$G\mu(x) \geqslant u(x) \quad \text{sauf sur} \quad E \quad \text{avec} \quad \check{c}_*(E) = 0 \quad .$$

Supposons que l'ensemble $E = \{x \; ; \; G\mu(x) < u(x)\}$ contienne un compact K avec $\check{c}(K) > 0$. Alors il existe une mesure λ $(\neq 0) \in \mathfrak{M}$, portée par K , telle que $\check{G}\lambda$ soit fini continu dans X . Donc,

$$\int u \, d\lambda > \int G\mu \, d\lambda = \int \check{G}\lambda \, d\mu = \lim \int \check{G}\lambda \, d\mu_\alpha$$

$$= \lim \int G\mu_\alpha \, d\lambda \geqslant \lim\sup \int G_\alpha \, \mu_\alpha \, d\lambda \geqslant \int u \, d\lambda \quad .$$

Cette contradiction montre l'inégalité (2).

Définition. - Nous disons que le noyau adjoint $\check{G}$ est admissible, si tous les compacts avec $\check{c}(K) = 0$ ne portent que des mesures positives d'énergie infinie.

Notons que, si $\check{G}$ satisfait au principe de continuité, $\check{G}$ est admissible, mais la réciproque n'est pas vraie.

THÉORÈME 2. - *Si $\check{G}$ est admissible, il existe une mesure positive μ telle que*

$$G\mu \geqslant u \quad \text{à p. p. p. sur} \quad X \quad ,$$

$$G\mu \leqslant u \quad \text{sur} \quad S\mu \quad .$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 1.

2. Une application du théorème d'existence. Définitions des principes.

Principe de domination k-dilaté $(k \geqslant 1)$.

$$\begin{pmatrix} \mu , \nu \in \mathfrak{M} , \; \mu \text{ d'énergie finie} \\ \\ G\mu \leqslant G\nu \text{ sur } S\mu \end{pmatrix} \Longrightarrow (G\mu \leqslant k \, G\nu \text{ dans } X) .$$

Principe de domination élémentaire k-dilaté $(k \geqslant 1)$.

$$\begin{pmatrix} \mu \in \mathfrak{M} \text{ d'énergie finie, } x \in X \\ \\ G\mu \leqslant G\varepsilon_x \text{ sur } S\mu \end{pmatrix} \Longrightarrow (G\mu \leqslant k \, G\varepsilon_x \text{ dans } X) .$$

<u>Principe du balayage</u> k-<u>dilaté</u> $(k \geqslant 1)$.

$$\left(\begin{array}{l} \mu \in \mathfrak{M} \text{ dont le potentiel } G\mu \not\equiv \infty \text{ sur tout ouvert non vide} \\ K \text{ compact} \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{il existe } \mu' \in \mathfrak{M} \text{ portée par } K \text{ , telle que} \\ G\mu' \leqslant k\, G\mu \text{ dans } X \\ G\mu' \geqslant G\mu \text{ à p. p. p. sur } K \end{array}\right) .$$

<u>Principe du balayage élémentaire</u> k-<u>dilaté</u> $(k \geqslant 1)$.

$$(K \text{ compact, } x \notin K) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{il existe } \mu' \in \mathfrak{M} \text{ portée par } K \text{ , telle que} \\ G\mu' \leqslant k\, G\varepsilon_x \text{ dans } X \\ G\mu' \geqslant G\varepsilon_x \text{ à p. p. p. sur } K \end{array}\right) .$$

En utilisant le théorème 2, on obtient les relations suivantes entre ces principes :

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{G dom. él. k-dil.} \arrow[drr, Rightarrow, "\check{G}\ f"] & & \\
\text{G dom. k-dil.} \arrow[urr, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow, "\check{G}"'] & & \text{G bal. k-dil.} \arrow[rr, Rightarrow, "f"'] & & \text{G bal. él. k-dil.} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{G bal. él. k-dil.} \arrow[u, Rightarrow] & & \text{G bal. k-dil.} \arrow[ll, Rightarrow, "\check{f}"] & & \text{G dom. k-dil.} \arrow[ll, Rightarrow, "G"] \arrow[dll, Rightarrow] \\
 & & \text{G dom. él. k-dil.} \arrow[ull, Rightarrow, "G\ \check{f}"] & &
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, les signes mis sous les flèches montrent que l'implication est vraie si on suppose que

G (resp. $\check{G}$) : G (resp. $\check{G}$) soit admissible,
f (resp. $\check{f}$) : $G(x, y) \not\equiv \infty$ (resp. $\check{G}(x, y) \not\equiv \infty$) sur tout ouvert non vide, quel que soit y fixé.

Employant le théorème 1, on obtient un diagramme analogue.

On trouve d'autres applications du théorème d'existence dans [11], [12].

3. L'énergie d'une mesure balayée.

En supposant que G satisfasse au principe du balayage k-dilaté, on se pose la question suivante : Est-ce que, si μ est d'énergie finie, la mesure balayée μ' est aussi d'énergie finie ?

Définition. - Nous disons que G est héréditaire, quand l'implication suivante est vraie :

$$\begin{pmatrix} G\mu \geq G\nu \text{ dans } X \\ \\ \mu \text{ d'énergie finie} \end{pmatrix} \Longrightarrow (\nu \text{ d'énergie finie}) .$$

Dans ce paragraphe, nous considérons le problème suivant : Est-ce que G est héréditaire s'il satisfait au principe du balayage dilaté (3) ?

Ce n'est pas vrai, en général. Il existe un noyau G tel que G et $\check{G}$ satisfassent au principe du balayage dilaté tandis que G n'est pas héréditaire, cependant que $\check{G}$ est héréditaire (4).

Nous donnons une condition suffisante pour qu'un noyau, satisfaisant au principe du balayage k-dilaté, soit héréditaire.

Définition. - Nous disons que G est régulier (5) si, pour tout compact K et pour tout ouvert $\omega \supset K$, il existe un compact L, $K \subset L \subset \omega$, qui possède la propriété suivante :

$$(\star) \qquad \begin{pmatrix} \check{G}\mu \geq f \text{ à p. p. p. sur } L \\ \\ \mu \in \mathfrak{M}, \quad f \geq 0 \text{ finie continue} \end{pmatrix} \Longrightarrow (\check{G}\mu \geq f \text{ sur } L) .$$

THÉORÈME 3. - Soit G un noyau admissible satisfaisant au principe du balayage k-dilaté, tel que $\check{G}$ soit admissible et régulier. Supposons que tout ouvert non vide soit de capacité positive (6). Alors G est héréditaire.

Démonstration. - D'après le diagramme du paragraphe 2, G et $\check{G}$ satisfont au principe de domination k-dilaté. Donc le noyau $\hat{G} = G + \check{G}$ satisfait au principe du maximum dilaté et, d'après NINOMIYA et CHOQUET (7), il existe une constante M

---

(3) Ce problème a été posé par DURIER.

(4) Voir [15].

(5) Cela correspond à la régularité de la frontière par rapport au problème de Dirichlet.

(6) Cela veut dire que tout ouvert non vide contient au moins un compact qui porte une mesure positive non nulle d'énergie finie.

(7) Voir [1], [17].

telle que

$$(\lambda , \tau)_G \leq M\|\lambda\|_G \|\tau\|_G \quad \text{pour toutes} \quad \lambda , \tau \in \mathfrak{M} .$$

Soient μ et ν des mesures positives telles que

$$G\nu \leqslant G\mu , \quad \mu \text{ d'énergie finie} ,$$

et posons

$$E_n = \{x ; \ G\nu(x) \leq n\} \quad (n = 1 , 2 , \ldots) ,$$

$$\nu_n = \text{la restriction de } \nu \text{ à } E_n .$$

Alors ν_n est d'énergie finie, et

$$\|\nu_n\|_G^2 = \int G\nu_n \, d\nu_n \leqslant \int G\nu \, d\nu_n \leqslant \int G\mu \, d\nu_n \leq M\|\mu\|_G \|\nu_n\|_G ,$$

$$\|\nu_n\|_G \leq M\|\mu\|_G .$$

Par conséquent, la mesure $\nu' = \lim \nu_n$ est d'énergie finie.

Donc, il nous suffit de montrer $\nu' = \nu$. Ceci se déduit du lemme suivant.

LEMME (sous les mêmes hypothèses). - Si $(\nu , \lambda)_G < \infty$ pour toute λ d'énergie finie, dans ces conditions, ou bien $\nu = 0$, ou bien le support $S\nu$ est de capacité positive (8).

Utilisant ce lemme, nous montrons $\nu' = \nu$, c'est-à-dire

$$\nu(E_\infty) = 0 , \ E_\infty = \{x ; \ G\nu(x) = \infty\} .$$

Si cette mesure n'est pas nulle, il existe une restriction $\tau \neq 0$ de ν dont le support est contenu dans l'ensemble E_∞ . Puisque E_∞ est contenu dans l'ensemble $\{x ; G\mu(x) = \infty\}$ et μ est d'énergie finie, $S\tau$ est de capacité nulle. C'est en contradiction avec le lemme, parceque

$$(\tau , \lambda)_G \leqslant (\nu , \lambda)_G \leqslant (\mu , \lambda)_G \leq M\|\mu\|_G \|\lambda\|_G < \infty ,$$

pour toute mesure λ d'énergie finie.

---

(8) C'est-à-dire, le support porte au moins une mesure positive non nulle d'énergie finie.

<u>Démonstration du lemme</u>. - Supposons $\nu \neq 0$, et montrons que le compact $K = S\nu$ est de capacité positive. Pour cela, nous considérons la contenance définie par

$$\operatorname{cont} K = \inf\{\tau(X) \; ; \; \tau \in \mathfrak{M} \, , \; \check{G}\tau \geq 1 \text{ sur } K\} \; .$$

D'abord, nous démontrons $\operatorname{cont} K > 0$. Sinon, pour une suite de nombres positifs (ε_n) telle que $\sum_n \varepsilon_n < \infty$, il existe des mesures $\tau_n \in \mathfrak{M}$ telles que

$$\tau_n(X) < \varepsilon_n^2 \, , \quad \check{G}\tau_n \geq 1 \quad \text{sur} \quad K \; .$$

Comme $\check{G}$ est régulier, il existe un compact $L \supset K$ qui possède la propriété (☆). Prenons une mesure $\lambda_0 \in \mathfrak{M}$ telle que $\check{G}\lambda_0$ soit fini continu et $\check{G}\lambda_0 \geq 1$ sur L . D'après le théorème 2 et le principe de domination k-dilaté, il existe une suite (τ'_n) de mesures positives portées par L telles que

$$\check{G}\tau'_n(x) \geq \min\{\check{G}\tau_n(x) \, , \, \check{G}\lambda_0(x)\} \quad \text{sur} \quad L \; ,$$

$$\check{G}\tau'_n(x) \leq k \min\{\check{G}\tau_n(x) \, , \, \check{G}\lambda_0(x)\} \quad \text{dans} \quad X \; .$$

Alors τ'_n est d'énergie finie. Encore une fois, selon le théorème 2, il existe $\sigma \in \mathfrak{M}$ portée par $S\tau'_n$ telle que

$$G\sigma \geq 1 \quad \text{à p. p. p. sur} \quad S\tau'_n \; ,$$

$$G\sigma \leq 1 \quad \text{sur} \quad S\sigma \quad (\text{donc} \quad G\sigma \leq k' \quad \text{sur} \quad X\,) \; .$$

Alors,

$$\tau'_n(X) = \int d\tau'_n \leq \int G\sigma \, d\tau'_n = \int \check{G}\tau'_n \, d\sigma \leq k \int \check{G}\tau_n \, d\sigma$$

$$= k \int G\sigma \, d\tau_n \leq kk' \; \tau_n(X) < kk' \; \varepsilon_n^2 \; ,$$

$$\|\tau'_n\|_G^2 = \int \check{G}\tau'_n \, d\tau'_n \leq k \int G\lambda_0 \, d\tau'_n \leq M' \, k^2 \, k' \, \varepsilon_n^2 \; ,$$

$$(M' = \max_X \check{G}\lambda_0) \; ,$$

c'est-à-dire qu'il existe une constante M'' telle que

$$\|\tau'_n\|_G \leq M'' \, \varepsilon_n \; .$$

Par conséquent, en posant $\tau = \sum_n \tau'_n$, nous obtenons

$$\tau(X) < \infty \ ,$$

$$\|\tau\|_G^2 = \sum_{n,m} \int G\tau'_n \, d\tau'_m \leq M \sum_{n,m} \|\tau'_n\|_G \, \|\tau'_m\|_G < M(M'' \sum_n \varepsilon_n)^2 < \infty \ .$$

D'autre part, $\check{G}\tau'_n \geq 1$ sur K, et $\check{G}\tau = \infty$ sur K. Donc

$$(\nu \ , \ \tau)_G = \int G\nu \, d\tau = \int \check{G}\tau \, d\nu = \infty \ .$$

C'est une contradiction, donc cont K est positive. Alors, d'après le théorème de Fuglede [9],

$$\gamma(K) = \sup\{\mu(K) \ ; \ \mu \in \mathfrak{M} \ , \ S\mu \subset K \ , \ G\mu \leq 1 \ \text{dans} \ X\}$$

est positive, et K porte une mesure non nulle d'énergie finie.

COROLLAIRE. - Sous les mêmes hypothèses, toutes les mesures balayées d'une mesure d'énergie finie sont d'énergie finie [10].

De la même façon, on peut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 4. - Soit G un noyau satisfaisant au principe du maximum dilaté tel que $\check{G}$ soit régulier et satisfasse au principe du maximum dilaté. Alors G est héréditaire.

Notons que, dans le théorème 4, tout ouvert non vide n'est pas nécessairement de capacité positive.

4. Mesures des condensateurs.

Nous donnons une application du lemme fondamental du paragraphe 1. Ceci concerne les mesures des condensateurs.

Définition. - Soit $\langle K_1 \ , K_0 \rangle$ une paire ordonnée de compacts disjoints. Une mesure réelle $\sigma = \mu_1 - \mu_0$, μ_1 , $\mu_0 \in \mathfrak{M}$, est dite mesure des condensateurs, si

$$\mu_i \ \text{est portée par} \ K_i \quad (i = 0 \ ; \ 1) \ ,$$

$$G\sigma = i \ \text{à p. p. p. sur} \ K_i \ ,$$

$$0 \leq G\sigma \leq 1 \ \text{sur} \ X \ .$$

---

(9) Voir [8].

(10) L'auteur ignore s'il existe au moins une mesure balayée d'énergie finie pour toute mesure d'énergie finie, quand G satisfait au principe du balayage dilaté.

Dans ce paragraphe, nous supposons que G soit positif hors de la diagonale, et que tout ouvert non vide soit de capacité positive ([11]). L'existence des mesures des condensateurs implique quelques principes. Précisément, s'il existe une mesure des condensateurs pour toute paire $\langle K_1 , K_0 \rangle$, et si G est admissible, alors G satisfait au principe complet du maximum, c'est-à-dire

$$(\mu , \nu \in \mathfrak{M} , \quad G\mu \leqslant G\nu + a \quad \text{sur } S\mu , \quad \mu \text{ d'énergie finie}, \quad a \geqslant 0) \Longrightarrow (G\mu \leqslant G\nu + a \quad \text{dans } X) .$$

Si, en outre, G est régulier, G satisfait au principe d'unicité, c'est-à-dire

$$(G\mu = G\nu \quad \text{à p. p. p. sur } X , \quad \mu , \nu \in \mathfrak{M} \text{ d'énergie finie}) \Longrightarrow (\mu = \nu) .$$

Nous allons montrer l'existence des mesures des condensateurs sous l'hypothèse : G satisfait au principe complet du maximum et au principe d'unicité, et $\check{G}$ est admissible.

Soit $\langle K_1 , K_0 \rangle$ une paire ordonnée de compacts disjoints. Pour une mesure $\mu \in \mathfrak{M}^1$ portée par K_1 , nous désignons par μ' une mesure balayée de μ sur K_0 . Cette mesure est unique. Quelles que soient $\mu , \nu \in \mathfrak{M}^1$ portées par K_1 , posons

$$g(\mu , \nu) = \int (G\mu - G\mu') \, d\nu .$$

Alors la fonction g vérifie les conditions du lemme fondamental du paragraphe 1. Donc il existe une mesure $\mu_0 \in \mathfrak{M}^1$ portée par K_1 telle que

$$g(\mu_0 , \mu_0) \leqslant g(\mu_0 , \lambda) ,$$

pour toute $\lambda \in \mathcal{C}$ portée par K_1 . D'après le principe d'unicité,

$$a = g(\mu_0 , \mu_0) \neq 0 ,$$

et pour $\nu = a^{-1} \mu_0$,

$$\int (G\nu - G\nu') \, d\lambda \geqslant 1 ,$$

quelle que soit $\lambda \in \mathcal{C}$ portée par K_1 ; en d'autres mots,

$$G\nu - G\nu' \geqslant 1 \quad \text{à p. p. p. sur } K_1 ,$$
$$G\nu - G\nu' \leqslant 1 \quad \text{sur } S\nu .$$

([11]) Avec le même sens qu'à la note ([6]).

L'existence des mesures des condensateurs est aussi prouvée par l'approximation successive [12].

5. Capacitabilité par rapport à la capacité définie par l'énergie.

D'abord, nous nous rappelons quelques sortes de capacité. Soit K un compact. Posons

$$\check{c}(K) = \sup\{\mu(K) \ ; \ \mu \in \mathcal{C} \ , \ S\mu \subset K \ , \ \check{G}\mu \leqslant 1 \ \text{sur} \ S\mu\} \ ,$$

$$\check{\gamma}(K) = \sup\{\mu(K) \ ; \ \mu \in \mathfrak{M} \ , \ S\mu \subset K \ , \ \check{G}\mu \leqslant 1 \ \text{sur} \ X\} \ ,$$

$$\check{V}(K) = \inf\{ \sup_{x \in S\mu} \check{G}\mu(x) \ ; \ \mu \in \mathfrak{M}^1 \ , \ S\mu \subset K\} \ ,$$

$$W(K) = \inf\{\|\mu\|_G^2 \ ; \ \mu \in \mathfrak{M}^1 \ , \ S\mu \subset K\} \ .$$

De la même façon, nous définissons des capacités $c(K)$, $\gamma(K)$, $V(K)$ par des potentiels $G\mu$. Les relations entre ces capacités sont les suivantes :

$$\check{\gamma}(K) \leqslant \check{V}(K)^{-1} \leqslant W(K)^{-1} \ , \quad \check{c}(K) \leqslant \check{V}(K)^{-1} \ ,$$

$$\check{\gamma}(K) = 0 \implies \check{c}(K) = 0 \ ,$$

$$V(K) = \check{V}(K) \quad (^{13}) \ .$$

Si G est symétrique, $V(K) = W(K)$.

Si G est admissible,

$$\check{c}(K) = 0 \iff W(K) = \infty \iff \check{V}(K) = \infty \iff \check{\gamma}(K) = 0 \ .$$

A chaque capacité correspondent comme toujours ses capacité intérieure et extérieure. Nous les notons $\check{c}_*(A)$, $\check{c}^*(A)$, ... , $W_*(A)$, $W^*(A)$.

Les capacités extérieures sont dénombrablement sous-additives. Par exemple,

$$W^*(\bigcup_n A_n)^{-1} \leqslant \sum_n W^*(A_n)^{-1} \ .$$

Le théorème 2, dans le paragraphe 1, dit que si $\check{G}$ est admissible et si $u \geqslant 0$ finie s. c. s., il existe une mesure $\mu \in \mathfrak{M}$ telle que

$$G\mu \geqslant u \ \text{sur} \ X \ (\text{sauf sur un ensemble} \ E \ \text{avec} \ W_*(E) = \infty) \ ,$$

$$G\mu \leqslant u \ \text{sur} \ S\mu \ .$$

---

(12) Voir [14].
(13) Voir [18]. Selon une lettre de W. J. BACH, ceci se déduit du théorème 1.

Remarquons que l'ensemble exceptionnel E , ci-dessus, est un K_σ , et donc il est de capacité extérieure 0 , c'est-à-dire

$$W^*(E)^{-1} = \check{V}^*(E)^{-1} = \check{\gamma}^*(E) = \check{c}^*(E) = 0 \quad ,$$

puisque $\check{G}$ est admissible. Pour avoir ceci, il suffit de noter la capacitabilité d'un compact et la sous-additivité dénombrable.

Quand à la capacitabilité d'un ensemble K-analytique, FUGLEDE l'a démontrée relativement à la capacité γ_* , γ^* , sous certaines hypothèses (14). Cependant, la capacitabilité relativement à la capacité définie par l'énergie, W_* , W^* , n'est pas encore résolue. C'est seulement pour un noyau consistant de Fuglede que cela a été résolu de soi-même (15).

Dans ce paragraphe, nous considérons la capacitabilité relativement à W . Il suffit de supposer que G est symétrique, car pour le noyau $\hat{G} = G + \check{G}$, nous avons $\|\mu\|^2_{\hat{G}} = 2\|\mu\|^2_G$.

Si G satisfait au principe de maximum dilaté, et s'il vérifie les conditions de FUGLEDE (16), alors

$$W_*(A) = \infty \implies W^*(A) = \infty \quad \text{pour tout K-analytique } A \ .$$

Le principe de maximum dilaté implique l'existence d'une constante M telle que

$$(\mu \ , \ \nu)_G \leqslant M\|\mu\|_G \ \|\nu\|_G \ , \ \text{pour toute } \mu \ , \ \nu \in \mathfrak{M} \ ;$$

cependant la réciproque n'est pas vraie.

Il est donc intéressant de considérer la capacitabilité sous l'hypothèse suivante :

(☆☆) Il existe une constante M , telle que

$$(\mu \ , \ \nu)_G \leqslant M\|\mu\|_G \ \|\nu\|_G \ , \ \text{pour toutes } \mu \ , \ \nu \in \mathfrak{M} \ .$$

Posons, pour un ensemble quelconque A ,

$$\text{enc}\, A = \inf\{\|\mu\|_G \ ; \ G\mu \geqslant 1 \ \text{ sur } A \text{ , sauf sur } E \text{ avec } V^*(E) = \infty\} \ .$$

---

(14) Voir [8].
(15) Voir [7].
(16) Voir [8].

Le premier but est de montrer l'égalité

$$\mathrm{enc}_* A = \mathrm{enc}^* A \quad (^{17}), \text{ pour tout K-analytique } A \ ,$$

c'est-à-dire A est capacitable relativement à l'encombrement. Rappelons les résultats fondamentaux de CHOQUET concernant la capacité et l'encombrement [18] :

(I) Si tout compact est capacitable, $\mathrm{enc}_* K = \mathrm{enc}^* K$, et si $(A_n \nearrow A)$ implique $(\mathrm{enc}^* A \nearrow \mathrm{enc}\ A)$, alors tout K-analytique A est capacitable,

$$\mathrm{enc}_* A = \mathrm{enc}^* A \ .$$

(II) Si :

(a) (compacts $K_n \searrow K$) implique $(\mathrm{enc}\ K_n \searrow \mathrm{enc}\ K)$, et si

(b) (ensembles quelconques $A_n \nearrow A$) implique $(\mathrm{enc}\ A_n \nearrow \mathrm{enc}\ A)$,

alors, pour tout K-analytique A ,

$$\mathrm{enc}\ A = \mathrm{enc}_* A \ .$$

(III) Pour que la propriété (b) soit établie, il suffit que

$$(\mu_n \longrightarrow \mu \text{ vaguement}) \Longrightarrow (G\mu = \liminf G\mu_n \text{ , sauf sur } E \text{ avec } V^*(E) = \infty) \ .$$

CHOQUET a donné aussi une condition suffisante pour que la propriété (a) soit vraie. Mais sa condition n'est pas applicable à notre encombrement.

Nous supposons que G soit fini continu hors de la diagonale, et qu'il satisfasse au principe de continuité et à l'hypothèse (☆☆). Il est facile de vérifier les lemmes suivants.

LEMME 1. - $\mathrm{enc}\ (A \cup B) \leq \mathrm{enc}\ A + M\ \mathrm{enc}\ B$.

LEMME 2. - $(\mathrm{enc}^* A)^2 \leq M^2\ V^*(A)^{-1}$.

LEMME 3. - Si μ est d'énergie finie, $G\mu$ est quasi-continu en ce sens que, pour tout nombre positif ε , il existe un ouvert ω tel que $V(\omega) > \varepsilon^{-1}$, et tel que $G\mu$ soit fini continu comme fonction sur $\complement\omega$.

LEMME 4. - Si les mesures μ_n sont d'énergie finie, et si elles convergent vaguement vers μ , alors

$$G\mu = \liminf G\mu_n \quad (\text{sauf sur } E \text{ , avec } V^*(E) = \infty) \ .$$

---

(17) Ce sont des encombrements intérieur et extérieur définis par $\mathrm{enc}\ K$.

(18) Voir [2], [3].

<u>Donc</u> $(A_n \nearrow A)$ <u>implique</u> $(\mathrm{enc}\ A_n \nearrow \mathrm{enc}\ A)$.

COROLLAIRE. - <u>Pour tout ensemble</u> $K_\sigma \in A$,

$$\mathrm{enc}_* A = \mathrm{enc}\ A \quad .$$

Nous allons montrer la proposition suivante :

PROPOSITION. - <u>Si tout ouvert est</u> K_σ , <u>alors</u>, <u>pour un ensemble quelconque</u> A ,

$$\mathrm{enc}^* A = \mathrm{enc}\ A \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Pour tout ouvert $\omega \supset A$, on a

$$\mathrm{enc}\ A \leqslant \mathrm{enc}\ \omega = \mathrm{enc}_* \omega \quad ,$$

donc $\mathrm{enc}\ A \leqslant \mathrm{enc}^* A$. Alors il suffit de montrer $\mathrm{enc}\ A \geqslant \mathrm{enc}^* A$, en supposant l'encombrement de A fini. Pour un nombre positif donné ε , il existe une mesure $\nu \in \mathfrak{M}$ telle que

$$\|\nu\|_G \leqslant \mathrm{enc}\ A + \varepsilon \quad ,$$

$$G\nu \geqslant 1 \quad \text{sur} \quad A \quad (\text{sauf sur } E \text{ , avec } V^*(E) = \infty \text{) } .$$

L'ouvert $\omega_n = \{x \ ; \ G\nu(x) > 1 - n^{-1}\}$ contient l'ensemble $A - E$, et

$$\mathrm{enc}^*(A - E) \leqslant \mathrm{enc}^* \omega_n = \mathrm{enc}\ \omega_n \leqslant \frac{n}{n-1} \|\nu\|_G \quad ,$$

$$\mathrm{enc}^*(A - E) \leqslant \mathrm{enc}\ A + \varepsilon \quad .$$

D'autre part, d'après le lemme 2, $\mathrm{enc}^* E = 0$. Par conséquent,

$$\mathrm{enc}^* A \leqslant \mathrm{enc}^*(A - E) + M\ \mathrm{enc}^* E \leqslant \mathrm{enc}\ A \quad .$$

COROLLAIRE. - <u>Tout compact est capacitable</u>,

$$\mathrm{enc}_* K = \mathrm{enc}^* K \quad .$$

Alors nous obtenons que tout ensemble K-analytique est capacitable relativement à notre encombrement. Voici la relation entre l'encombrement et W^* :

$$W^*(A)^{-1} \leqslant M^2(\mathrm{enc}^* A)^2 \quad .$$

En conséquence, nous venons d'obtenir le théorème suivant :

THÉORÈME 5. - <u>Soit</u> G <u>un noyau fini continu hors de la diagonale, tel qu'il satisfasse au principe de continuité et à la condition</u> :

$$(\mu , \nu)_G \leq M \|\mu\|_G \|\nu\|_G \quad \text{pour toutes} \quad \mu , \nu \in \mathfrak{M} .$$

Si tout ouvert ω de X est K_σ , alors, pour tout ensemble K-analytique A ,

$$W_*(A) = \infty \implies W^*(A) = \infty .$$

Remarque. - Si on suppose que, pour tout compact,

$$(c(K) = 0) \implies \left(\begin{array}{l}\text{il existe une mesure } \lambda \in \mathfrak{M} \text{ d'énergie finie} \\ \text{telle que } G\lambda = \infty \text{ sur } K\end{array}\right) ,$$

alors l'hypothèse "tout ouvert est K_σ " est superflue. En effet, d'après la condition de CHOQUET, on a $\text{enc}\ \omega = \text{enc}_*\ \omega$ pour tout ouvert ω .

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave). - L'intégrale d'énergie en théorie du potentiel, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, 3e année, 1958/59, n° 3, 11 p.

[2] CHOQUET (Gustave). - Théorèmes de convergence, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, 3e année, 1958/59, n° 12, 9 p.

[3] CHOQUET (Gustave). - Etude des encombrements et capacités associés à un noyau, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, 3e année, 1958/59, n° 13, 10 p.

[4] DURIER (Roland). - Principe des condensateurs pour un noyau dissymétrique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, 1966, Série A, p. 58-60.

[5] DURIER (Roland). - Principe des condensateurs pour un noyau dissymétrique, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, 10e année, 1965/66, n° 9, 22 p.

[6] FAN (Ky). - Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 38, 1952, p. 121-126.

[7] FUGLEDE (Bent). - On the theory of potentials in locally compact spaces, Acta Math., Uppsala, t. 103, 1960, p. 139-215.

[8] FUGLEDE (Bent). - Le théorème du minimax et la théorie fine du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 15, 1965, p. 65-87.

[9] GLICKSBERG (I. L.). - A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points, Proc. Amer. math. Soc., t. 3, 1952, p. 170-174.

[10] KISHI (Masanori). - Maximum principles in the potential theory, Nagoya math. J., t. 23, 1963, p. 165-187.

[11] KISHI (Masanori). - Weak domination principle, J. Sc. Hiroshima Univ., Series A I, t. 28, 1964, p. 1-17 ; t. 29, 1965, p. 147.

[12] KISHI (Masanori). - A remark on a lower envelope principle, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 14, 1964, p. 473-484.

[13] KISHI (Masanori). - An existence theorem in potential theory, Nagoya math. J., t. 27, 1966, p. 133-137.

[14] KISHI (Masanori). - Sur l'existence des mesures des condensateurs, Nagoya math. J. (à paraître).

[15] KISHI (Masanori). - Sur l'énergie en théorie du potentiel par rapport à un noyau non symétrique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).

[16] NAKAI (Mitsuru). - On the fundamental existence theorem of Kishi, Nagoya math. J., t. 23, 1963, P. 189-198.

[17] NINOMIYA (Nobuyuki). - Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique, J. Inst. Polyt., Osaka City Univ., Series A, t. 8, 1957, p. 147-179.

[18] OHTSUKA (Makoto). - An application of the minimax theorem to the theory of capacity, J. Sc. Hiroshima Univ., Series A I, t. 29, 1965, p. 217-221.