MAKOTO OHTSUKA

Applications du théorème de dualité en théorie du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 11 (1966-1967), exp. nº 19, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1966-1967__11__A11_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
11e année, 1966/67, n° 19

8 juin 1967

APPLICATIONS DU THÉORÈME DE DUALITÉ EN THÉORIE DU POTENTIEL

par Makoto OHTSUKA

1. Théorème de dualité.

On commence avec le théorème de dualité dans un espace topologique localement convexe (voir [1] et [2] pour ce théorème).

Soient X et Y des espaces topologiques localement convexes, et soient X' et Y' les espaces définis par les formes linéaires continues sur X et Y respectivement ; on n'a besoin de considérer aucune topologie sur X' et Y'. La valeur $x'(x)$ sera notée $\langle x , x' \rangle$. Un sous-ensemble $C \subset X$ est appelé un cône convexe, si $x_1 , x_2 \in C$ et $\alpha_1 , \alpha_2 \geqslant 0$ entraînent $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in C$. Définissons le dual C^+ par

$$C^+ = \{x' , X' ; \langle x , x' \rangle \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in C\} .$$

Evidemment, c'est un cône convexe dans X'. De la même manière, définissons $\langle y , y' \rangle$, les cônes convexes dans Y et ses cônes convexes duals dans Y'.

Soit Φ une application linéaire continue de X dans Y. Alors il existe une application duale Φ' de Y' dans X' qui est linéaire et satisfait à

$$\langle \Phi x , y' \rangle = \langle x , \Phi' y' \rangle \qquad \text{pour tous } x \in X \text{ et } y' \in Y' .$$

THÉORÈME 1 (Théorème de dualité). - <u>Soient Φ une application linéaire continue de X dans Y, $C \subset X$ et $D \subset Y$ des cônes convexes, $a' \in X'$ et $b \in Y$. Supposons qu'il existe $c \in C$ tel que $b - \Phi c$ soit un point intérieur de D. Si la valeur</u>

$$M = \sup\{\langle x , a' \rangle ; x \in C , b - \Phi x \in D\}$$

<u>est finie, il existe $y'_0 \in D^+$ tel que $\Phi' y'_0 - a' \in C^+$ et</u>

$$M = \langle b , y'_0 \rangle = \min\{\langle b , y' \rangle ; y' \in D^+ , \Phi' y' - a' \in C^+\} .$$

2. Première application.

Pour simplifier les discussions, nous nous plaçons dans R^3, dans tout ce qui suit. Soient X l'espace métrique des fonctions boréliennes bornées dans R^3, muni de la distance $\sup|f - g|$ pour $f , g \in X$, et C le sous-ensemble formé par les fonctions non négatives. Soient $Y = X$ et $D = C$. Désignons par $X_0 = Y_0$ le sous-ensemble de X dont les fonctions sont continues et tendent vers zéro au point à l'infini.

Soit λ une mesure de Radon non négative de masse totale finie, telle que le potentiel newtonien

$$U^{\lambda}(P) = \int \frac{1}{\overline{PQ}}\, d\lambda(Q)$$

appartienne à X_0. Définissons Φf pour $f \in X$ par

$$\Phi f(P) = \int \frac{1}{\overline{PQ}} f(Q)\, d\lambda(Q) \quad .$$

Si $0 \leqslant f \leqslant M < \infty$ dans R^3, $MU^{\lambda}(P) = \Phi f(P) + \int \overline{PQ}^{-1}(M - f(Q))\, d\lambda(Q)$, et donc Φf appartient à X_0. C'est le même pour toute $f \in X$, parce que

$$f = \max(f , 0) + \min(f , 0) \quad .$$

On voit que X' et Y' contiennent les mesures de Radon de signe quelconque à variation bornée ; si σ est une telle mesure, $\langle f , \sigma \rangle$ signifiera $\int f\, d\sigma$ pour chaque $f \in X$. Pour tout $y' \in Y'$, il existe une mesure unique de Radon σ telle que $\langle h , y' \rangle$ soit égale à $\int h\, d\sigma$ pour toute $h \in Y_0$. On a

$$\langle f , \Phi' y' \rangle = \langle \Phi f , y' \rangle = \int \Phi f\, d\sigma = \iint \frac{1}{\overline{PQ}} f(Q)\, d\lambda(Q)\, d\sigma(P) = \int f U^{\sigma}\, d\lambda$$

pour toute $f \in X$. Si une mesure appartient à $C^+ = D^+$, elle est non négative.

Prenons λ pour $a' \in X'$ et $g \in Y$, semi-continue inférieurement avec $\inf g > 0$ pour $b \in Y$. Alors, pour $c = 0$, $b - \Phi c = g$ est un point intérieur de D. On a le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - <u>Si la valeur</u>

$$M = \sup\{\int f\, d\lambda \ ; \ f \geqslant 0 \text{ , \underline{borélienne et bornée},} \int \frac{1}{\overline{PQ}} f(Q)\, d\lambda(Q) \leqslant g(P)\}$$

<u>est finie, il existe</u> $\nu_0 \geqslant 0$ <u>telle que</u> $\int_B U^{\nu_0}\, d\lambda \geqslant \lambda(B)$ <u>pour tout ensemble borélien</u> B <u>et</u>

$$(1) \qquad M = \int g\, d\nu_0$$

$$= \min\{\int g\, d\nu \ ; \ \nu \geqslant 0 \ , \ \int_B U^{\nu}\, d\lambda \geqslant \lambda(B) \text{ \underline{pour tout ensemble borélien} } B\} \ .$$

En effet, à cause du théorème 1, il existe $y'_0 \in Y'$ tel que $\langle f , y'_0 \rangle \geqslant 0$ et $\int f\, d\lambda \leqslant \langle f , \Phi' y'_0 \rangle$ pour toute $f \in C = D$, et tel que

(2) $M = \langle g , y_0' \rangle$

$$= \min\{ \langle g , y' \rangle ; \langle f , y' \rangle \geqslant 0 \text{ et } \int f \, d\lambda \leqslant \langle f , \Phi' y' \rangle \text{ pour toute } f \in C \} .$$

Etant donné $y' \in D^+$, on définit une mesure non négative ν uniquement par la relation $\langle f , y' \rangle = \int f \, d\nu$ valable pour toute $f \in X_0$. Démontrons que

$$\langle g , y' \rangle \geqslant \langle g , \nu \rangle .$$

Pour toute $g' \in X_0$, $0 \leqslant g' \leqslant g$, on a $\langle g' , \nu \rangle = \langle g' , y' \rangle \leqslant \langle g , y' \rangle$, et donc $\langle g , \nu \rangle = \sup_{g'} \langle g' , \nu \rangle \leqslant \langle g , y' \rangle$. Par conséquent, on peut remplacer y' par ν dans (2). (1) est ainsi démontré.

Si, en particulier, $g \equiv 1$, si B_0 est un ensemble borélien de mesure de Lebesgue finie, et si λ est la restriction de la mesure de Lebesgue à B_0, on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - Si la valeur

$$M = \sup\{\mu(B_0) ; \mu \geqslant 0 , \mu \text{ absolument continue, } U^\mu \leqslant 1 \text{ dans } R^3\}$$

est finie, il existe $\nu_0 \geqslant 0$ telle que $U^{\nu_0} \geqslant 1$ p. p. (presque partout) sur B_0 et

$$M = \nu_0(R^3) = \min\{\nu(R^3) ; \nu \geqslant 0 , U^\nu \geqslant 1 \text{ p. p. sur } B_0\} .$$

CIESIELSKI a signalé oralement qu'il avait démontré une égalité de cet espace par une méthode probabiliste.

3. Deuxième application.

Soit X l'espace des mesures de Radon de signe quelconque à variation bornée dans R^3, muni de la distance entre σ et τ égale à la variation totale de $\sigma - \tau$. Soient B_0 un ensemble borélien borné dans R^3, et C le sous-ensemble de X qui est formé des $\mu \in \mathcal{E}$ satisfaisant à $\mu(R^3 - B_0) = 0$, où $\mathcal{E}$ signifie l'ensemble des mesures de Radon non négatives d'énergie finie par rapport au noyau newtonien. Soient S un espace localement compact, Y l'espace des fonctions boréliennes bornées dans S, muni de la distance définie par $\sup|f - g|$, et D le sous-ensemble de Y qui consiste en toutes les fonctions non négatives. Soit $\Psi(P , Q)$ une fonction continue bornée dans $S \times R^3$, telle que $\Psi(P , Q)$ tende vers zéro au point à l'infini d'Aleksandrov de S (si S n'est pas compact) uniformément par rapport à Q sur B_0. Alors $\Phi\sigma = \int \Psi(. , Q) \, d\sigma(Q)$ appartient à Y, et Φ est une application linéaire continue. On voit que X' contient les fonctions boréliennes bornées, que Y' contient les mesures de Radon de signe quelconque à variation bornée, que $\Phi\mu \in Y_0$ pour chaque $\mu \in C$, et que

$$\langle \mu , \Phi' y' \rangle = \langle \Phi\mu , y' \rangle = \langle \Phi\mu , \tau \rangle = \langle \mu , \Phi'\tau \rangle$$
$$= \int \left(\int \Psi(Q , .) \, d\tau(Q) \right) d\mu$$

pour tous $\mu \in C$ et $y' \in Y'$, où τ correspond à y' comme dans le § 2. Chaque fonction borélienne bornée dans C^+ est non négative à p. p. p. sur B_0, c'est-à-dire sauf sur un sous-ensemble de B_0 de capacité intérieure nulle.

Prenons, pour $a' \in X'$, une fonction f borélienne bornée, et, pour $b \in Y$, une fonction $g \in Y$ semi-continue inférieurement avec $\inf g > 0$. Le théorème 1 nous donne le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - <u>Si la valeur</u>

$$M = \sup\{\int f \, d\mu \; ; \; \mu \in \mathcal{E} , \; \mu(R^3 - B_0) = 0 , \; \Phi\mu \leqslant g\}$$

<u>est finie, il existe</u> $\nu_0 \geqslant 0$ <u>satisfaisant à</u> $\int \Psi(P , .) \, d\nu_0(P) \geqslant f$ <u>à p. p. p. sur</u> B_0 <u>et</u>

$$M = \int g \, d\nu_0 = \min\{\int g \, d\nu \; ; \; \nu \geqslant 0 , \; \int \Psi(P , .) \, d\nu(P) \geqslant f \text{ à p. p. p. sur } B_0\} .$$

Nous allons appliquer ce théorème à un problème de variation de Gauss. Soient B_0 un ensemble borélien borné dans R^3 de capacité positive, et f une fonction borélienne bornée. Soient Φ et g comme ci-dessus.

THÉORÈME 4. - <u>Considérons le problème de minimiser</u>

$$I(\mu) = \int U^\mu \, d\mu - 2 \int f \, d\mu ,$$

<u>où</u> μ <u>est dans</u> $\mathcal{E}$ <u>et satisfait à</u> $\mu(R^3 - B_0) = 0$ <u>et</u> $\Phi\mu \leqslant g$. <u>S'il existe</u> $\mu^* \in \mathcal{E}$, <u>satisfaisant à ces conditions, minimisant</u> I, <u>et donnant</u> U^{μ^*} <u>borné, il existe une mesure de Radon</u> $\nu^* \geqslant 0$ <u>telle que</u>

$$f - U^{\mu^*} \leqslant \int \Psi(P , .) \, d\nu^*(P) \qquad \text{à p. p. p. sur } B_0 ,$$
$$f - U^{\mu^*} = \int \Psi(P , .) \, d\nu^*(P) \qquad \mu^* \text{ p. p.} ,$$
$$g = \Phi\mu^* \qquad \nu^* \text{ p. p.} .$$

<u>Inversement, si</u> $\mu^* \geqslant 0$ <u>satisfait à ces trois relations avec quelque</u> $\nu^* \geqslant 0$, <u>et à</u> $\mu^*(R^3 - B_0) = 0$, μ^* <u>minimise</u> $I(\mu)$.

En effet, il est facile de montrer

$$\int(f - U^{\mu^*})\, d\mu \leqslant \int(f - U^{\mu^*})\, d\mu^* \quad ,$$

pour tout $\mu \in \mathcal{E}$ satisfaisant à $\mu(R^3 - B_0) = 0$ et $\Phi\mu \leqslant g$. Si $f^* = f - U^{\mu^*}$, $\int f^*\, d\mu \leqslant \int f^*\, d\mu^*$. A cause du théorème 3, il existe $\nu^* \geqslant 0$ telle que

$$\int \Psi(P\ ,\ .)\, d\nu^*(P) \geqslant f^* = f - U^{\mu^*} \text{ à p. p. p. sur } B_0 \quad \text{et} \quad \int f^*\, d\mu^* = \int g\, d\nu^* \ .$$

Il s'ensuit que

$$\int f^*\, d\mu^* \leqslant \int \Phi'\nu^*\, d\mu^* = \int \Phi\mu^*\, d\nu^* \leqslant \int g\, d\nu^* \ .$$

Donc, on a les égalités. Par conséquent, $\int(f - U^{\mu^*})\, d\mu^* = \int \Phi'\nu^*\, d\mu^*$, ce qui montre que $f - U^{\mu^*} = \Phi'\nu^*$ μ^* p. p. Aussi $\int \Phi\mu^*\, d\nu^* = \int g\, d\nu^*$, et donc $g = \Phi\mu^*$ ν^* p. p. La partie inverse suit du fait que le noyau newtonien est de type positif.

Si la condition $\Phi\mu \leqslant g$ est remplacée par $\Phi\mu = g$, mais autrement, sous la même hypothèse que dans le théorème 4, on trouve σ^* de signe quelconque qui satisfait à $f - U^{\mu^*} \leqslant \Phi'\sigma^*$ à p. p. p. sur B_0 et $f - U^{\mu^*} = \Phi'\sigma^*$ μ^* p. p. ; $\Phi\mu^* = g$ est la condition demandée préliminairement. A propos de ce résultat, voir [3], théorème 2.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIETER (U.). - Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen : Dualitätstheorie, Z. für Wahrscheinlichk. und verw. Geb., t. 5, 1966, p. 89-117.

[2] KRETSCHMER (K. S.). - Programmes in paired spaces, Canad. J. of Math., t. 13, 1961, p. 221-238.

[3] OHTSUKA (M.). - On potentials in locally compact spaces, J. of Sc. of Hiroshima Univ., Series A-I : Math., t. 25, 1961, p. 135-352.