Roland Durier

Principe des condensateurs pour un noyau dissymétrique

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 10, n° 2 (1965-1966), exp. n° 9, p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1965-1966__10_2_A4_0>

10 mars 1966

PRINCIPE DES CONDENSATEURS POUR UN NOYAU DISSYMÉTRIQUE

par Roland DURIER

Le cadre envisagé est celui de la théorie du potentiel pour un noyau fonction, non symétrique, positif, semi-continu inférieurement, sur un espace localement compact ou compact. Avec certaines hypothèses sur le noyau :

1° On compare des principes usuels (domination et balayage) ;

2° On établit une équivalence entre un principe complet du maximum et un principe des condensateurs ;

3° Enfin, on aborde un principe de contraction.

I. Introduction

1. Définitions. Notations.

X est un espace topologique localement compact, dont tous les compacts sont métrisables ; on appelle Δ la diagonale de l'ensemble-produit $X \times X$.

$\mathfrak{M}$ est l'ensemble des mesures de Radon sur X, positives et à support compact ; $\mathfrak{M}$ est muni de la topologie vague. On note S_μ le support d'une mesure μ de $\mathfrak{M}$.

On appellera noyau G sur X une fonction $(x , y) \longrightarrow G(x , y)$ définie sur $X \times X$, à valeurs dans $[0 , +\infty]$, et semi-continue inférieurement (s. c. i.). On supposera toujours $G > 0$ sur Δ. On note $\check{G}$ le noyau (adjoint de G) défini par $\check{G}(x , y) = G(y , x)$. Lorsque $G = \check{G}$, le noyau est dit symétrique. Cette hypothèse ne sera jamais faite dans la suite.

Soit G un noyau fixé sur X.

Le potentiel (ou G-potentiel) d'une mesure μ de $\mathfrak{M}$ est la fonction $G\mu$ à valeurs dans $[0 , +\infty]$ définie sur X par

$$G\mu(x) = \int G(x , y) \, d\mu(y) \quad .$$

L'énergie mutuelle de deux mesures μ et ν de $\mathfrak{M}$ est le nombre (fini ou $+\infty$) :

$$G(\mu , \nu) = \int G\mu(x) \, d\nu(x) \quad .$$

L'énergie de μ est le nombre (fini ou $+\infty$) : $G(\mu , \mu)$. Pour toute mesure μ non nulle, on a $G(\mu , \mu) > 0$ (car $G > 0$ sur Δ).

On note :

$$\mathcal{E} = \{\mu \in \mathfrak{M} \;,\; G(\mu \;,\; \mu) < +\infty\} \;,$$

$$\mathfrak{F} = \{\mu \in \mathfrak{M} \;,\; G\mu \;\text{ fini continu sur }\; X\} \;,$$

$$\check{\mathfrak{F}} = \{\mu \in \mathfrak{M} \;,\; \check{G}\mu \;\text{ fini continu sur }\; X\} \;,$$

et, K étant un compact de X,

$$\mathfrak{M}(K) = \{\mu \in \mathfrak{M} \;,\; S\mu \subset K\} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}^1(K) = \{\mu \in \mathfrak{M}(K) \;,\; \int d\mu = 1\}$$

On définit de façon analogue :

$$\mathcal{E}(K) \;,\; \mathcal{E}^1(K) \;,\; \mathfrak{F}(K) \;,\; \mathfrak{F}^1(K) \;,\; \check{\mathfrak{F}}(K) \;,\; \check{\mathfrak{F}}^1(K) \;.$$

L'énergie mutuelle définit une fonction (bilinéaire) $(\mu \;,\; \nu) \longrightarrow G(\mu \;,\; \nu)$ s. c. i. sur $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Pour $\nu \in \mathfrak{F}$ (resp. $\nu \in \check{\mathfrak{F}}$) fixé, l'application

$$\mu \longrightarrow G(\nu \;,\; \mu) \qquad (\text{resp. } \mu \longrightarrow G(\mu \;,\; \nu)\;)$$

est continue sur $\mathfrak{M}$. Si on suppose G fini continu hors de Δ, et si A et B sont deux compacts disjoints de X, la fonction

$$(\mu \;,\; \nu) \longrightarrow G(\mu \;,\; \nu)$$

est continue sur $\mathfrak{M}(A) \times \mathfrak{M}(B)$.

<u>Ensembles exceptionnels</u>. - Une partie e de X est dite exceptionnelle (pour G) si elle est de mesure nulle pour toute mesure de $\mathcal{E}$. Une propriété vraie en tout point du complémentaire d'un ensemble exceptionnel est dite vraie <u>à peu près partout</u> (en abrégé a. p. p. p.).

Un ouvert U de X est exceptionnel si, et seulement si, tout compact inclus dans U est exceptionnel. Donc, la réunion de tous les ouverts exceptionnels de X est un ouvert exceptionnel Ω. Le sous-espace $X' = \complement_X \Omega$ de X est un espace localement compact pour lequel tout ouvert non vide est non exceptionnel, ou encore toute propriété vraie a. p. p. p. a lieu sur un ensemble partout dense sur X'.

2. <u>Noyaux réguliers</u>.

On dit que le noyau G est <u>régulier</u> ou satisfait <u>au principe de continuité</u> si, quelle que soit la mesure μ de $\mathfrak{M}$, la continuité de la restriction de $G\mu$ à $S\mu$ entraîne la continuité de $G\mu$ sur X.

Si G est régulier, et si $\nu \in \mathcal{E}$, $\nu \neq 0$, alors il existe $\lambda \neq 0$, $\lambda \leqslant \nu$, et $\lambda \in \mathfrak{F}$. En fait, λ est la restriction de ν à un compact non vide de $S\nu$.

On a les conséquences suivantes :

1° Si G (resp. $\check{G}$) est régulier, un ensemble e est exceptionnel si, et seulement si, il est de mesure nulle pour toute mesure de $\mathfrak{F}$ (resp. $\check{\mathfrak{F}}$) ;

2° Si G (resp. $\check{G}$) est régulier, pour tout compact K de X, il existe $\nu \in \mathcal{E}^1(K)$ tel que :

$$\forall \mu \in \mathfrak{M} \qquad G(\nu , \mu) < +\infty \quad (\text{resp. } G(\mu , \nu) < +\infty) \quad ;$$

3° Si tout ouvert non vide est non exceptionnel, et si $\check{G}$ est régulier, alors, quelle que soit $\mu \in \mathfrak{M}$, $G\mu$ est finie sur un ensemble partout dense.

3. Théorème du point fixe de Fan et Glicksberg ([7] et [8]).

On utilisera l'important théorème suivant :

Soient E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, C un convexe compact non vide de E.

Soit Γ une application de C dans l'ensemble $\mathcal{P}(C)$ des parties de C telle que :

1° $\forall x \in C$, $\Gamma(x)$ est convexe non vide ;

2° Le graphe $\mathcal{G} = \{(x , y) \in C \times C : y \in \Gamma(x)\}$ de Γ est fermé dans $E \times E$.

Alors il existe $x_0 \in C$ tel que $x_0 \in \Gamma(x_0)$.

II. Principes de domination

KISHI a établi, pour un noyau G strictement positif, et satisfaisant à certaines conditions de régularité, l'équivalence entre des principes de domination et de balayage ([9] et [6]). On va étendre ce résultat au cas d'un noyau non négatif sur $X \times X$, et strictement positif sur Δ (théorèmes 1 et 2). On va prouver ensuite, avec des hypothèses convenables, l'équivalence entre diverses formes du principe de domination et du principe de balayage (théorème 3).

1. Lemmes préliminaires.

LEMME 1 (lemme de Kishi) ([9], [10] et [6]). - Soit G un noyau dont l'adjoint $\check{G}$ est régulier. Pour tout compact K et pour toute fonction $u \geqslant 0$, continue sur K, il existe σ dans $\mathcal{E}(K)$ tel que :

$$G\sigma \geqslant u \quad \text{a. p. p. p. sur } K \qquad \text{et} \qquad G\sigma \leqslant u \quad \text{sur } S\sigma \ .$$

La démonstration simple donnée ci-dessous utilise le théorème du point fixe de Fan et Glicksberg. Seul le cas $u > 0$ a été envisagé par KISHI. Le résultat pour $u \geqslant 0$ est nouveau, et il est nécessaire pour l'étude de noyaux pouvant s'annuler.

Démonstration. - On peut supposer K non exceptionnel. Sinon, la mesure $\sigma = 0$ convient.

(a) On suppose $u > 0$. - Pour μ appartenant à $\mathfrak{M}^1(K)$, on pose

$$\Gamma(\mu) = \{\nu \in \mathfrak{M}^1(K) \; ; \; \forall \lambda \in \check{\mathfrak{F}}^1(K) \; , \; \frac{G(\mu, \nu)}{\int u \, d\nu} \leqslant \frac{G(\mu, \lambda)}{\int u \, d\lambda}\} \; .$$

$\Gamma(\mu)$ est non vide, car il contient en particulier toute mesure ν de $\mathfrak{M}^1(K)$ réalisant le minimum sur $\mathfrak{M}^1(K)$ de la fonction s. c. i. : $\lambda \longrightarrow \frac{G(\mu, \lambda)}{\int u \, d\lambda}$. $\Gamma(\mu)$ est convexe. Le graphe de Γ est fermé, et on peut appliquer le théorème de Fan-Glicksberg.

Donc il existe $\mu \in \mathfrak{M}^1(K)$ tel que $\mu \in \Gamma(\mu)$, c'est-à-dire :

$$\forall \lambda \in \check{\mathfrak{F}}^1(K) \qquad G(\mu, \mu) \int u \, d\lambda \leqslant \int u \, d\mu \, G(\mu, \lambda) \; .$$

On pose

$$\sigma = \frac{\int u \, d\mu}{G(\mu, \mu)} \mu \; ,$$

et on a

$$\forall \lambda \in \check{\mathfrak{F}}^1(K) \qquad G(\sigma, \lambda) \geqslant \int u \, d\lambda \; ,$$

donc

$$G\sigma \geqslant u \quad \text{a. p. p. p. sur } K \; .$$

Or $G(\sigma, \sigma) = \int u \, d\sigma$, donc $\sigma \in \mathcal{E}(K)$ et

$$G\sigma \leqslant u \quad \text{sur } S\sigma \; .$$

(b) On suppose $u \geqslant 0$. - Soit (u_n) une suite décroissante de fonctions strictement positives sur K, continues, et

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{sur } K \; .$$

En fait, (u_n) converge uniformément sur K vers u (DINI). D'après (a), pour chaque n, il existe $\sigma_n \in \mathcal{E}(K)$ tel que

$$\forall \lambda \in \check{\mathfrak{F}}^1(K) \qquad G(\sigma_n, \lambda) \geqslant \int u_n \, d\lambda \quad \text{et} \quad G(\sigma_n, \sigma_n) = \int u_n \, d\sigma_n \; .$$

On pose :

$$A = \inf_{\alpha \in \mathfrak{M}^1(K)} G(\alpha , \alpha) , \quad A > 0 \qquad B = \sup_{x \in K} u_1(x) , \quad B < +\infty$$

et

$$\sigma_n = \alpha_n \int d\sigma_n .$$

On a

$$A(\int d\sigma_n)^2 \leqslant G(\alpha_n , \alpha_n)(\int d\sigma_n)^2 = G(\sigma_n , \sigma_n) = \int u_n \, d\sigma_n \leqslant B \int d\sigma_n .$$

Donc $\int d\sigma_n \leqslant \frac{B}{A}$ et $G(\sigma_n , \sigma_n) \leqslant \frac{B^2}{A}$.

La suite (σ_n) est relativement compacte ; il y a une sous-suite (qu'on note σ_n) qui converge vers σ .

D'abord $G(\sigma , \sigma) \leqslant \frac{B^2}{A}$, donc

$$\sigma \in \mathcal{E}(K) .$$

Ensuite, $\forall \lambda \in \mathfrak{F}^1(K)$, $G(\sigma , \lambda) \geqslant \int u \, d\lambda$, donc

$$G\sigma \geqslant u \quad \text{a. p. p. p. sur } K .$$

Enfin, $G(\sigma , \sigma) \leqslant \underline{\lim}\, G(\sigma_n , \sigma_n) = \lim \int u_n \, d\sigma_n = \int u \, d\sigma$ ($\lim \int u_n \, d\sigma_n$ existe et vaut $\int u \, d\sigma$ en utilisant la convergence uniforme de u_n vers u). Donc $G(\sigma , \sigma) = \int u \, d\sigma$ et

$$G\sigma \leqslant u \quad \text{sur } S\sigma .$$

LEMME 2. - <u>Soient</u> v <u>une fonction sur</u> X <u>finie sur un ensemble partout dense</u>, K <u>un compact de</u> X , <u>et</u> $\sigma \in \mathfrak{M}(K)$ <u>tel que</u> $G\sigma \leqslant v$ <u>sur</u> X . <u>Alors il existe</u> M , <u>indépendant de</u> σ , <u>tel que</u>

$$\int d\sigma \leqslant M .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit m un nombre tel que

$$0 < m < \inf_{x \in K} G(x , x) .$$

Pour tout x de K , il existe un voisinage U_x de x tel que

$$\forall s \in U_x , \ \forall t \in U_x \qquad G(s , t) \geqslant m \quad (G \text{ est s. c. i.}) .$$

Du recouvrement de K par les U_x , on peut extraire un recouvrement fini :

$$U_1 , U_2 , \ldots , U_p .$$

Appelons σ_j la restriction de σ à U_j $(j = 1 , 2 , \ldots , p)$. On a

$$G\sigma_j \leqslant G\sigma \leqslant v ,$$

et, sur U_j, il existe x_j tel que $v(x_j) < \infty$.

$$G\sigma_j(x_j) \leqslant v(x_j) \qquad \text{entraîne} \qquad \int d\sigma_j \leqslant \frac{v(x_j)}{m} .$$

D'où

$$\int d\sigma \leqslant \int d\sigma_1 + \dots + \int d\sigma_p \leqslant \frac{v(x_1) + \dots + v(x_p)}{m} = M < +\infty .$$

2. Définition des principes.

Maximum : on note (M) l'ensemble des noyaux G qui satisfont à :

$$\forall \mu \in \mathfrak{M} \qquad G\mu \leqslant 1 \text{ sur } S\mu \implies G\mu \leqslant 1 \text{ sur } X .$$

Equilibre : on note (E) l'ensemble des noyaux G qui satisfont à :

Pour tout compact K, il existe $\sigma \in \mathfrak{M}(K)$ tel que

$$G\sigma = 1 \text{ a. p. p. p. sur } K \qquad \text{et} \qquad G\sigma \leqslant 1 \text{ sur } X .$$

Domination : on note (D) (resp. (D^*)) l'ensemble des noyaux G qui satisfont à :

$\forall \mu \in \mathcal{E}$, $\forall \nu \in \mathfrak{M}$ (resp. $\forall \nu \in \mathcal{E}$),

$$G\mu \leqslant G\nu \text{ sur } S\mu \implies G\mu \leqslant G\nu \text{ sur } X .$$

(D^{**}) se définit comme (D^*), mais avec la conclusion :

$$G\mu \leqslant G\nu \text{ a. p. p. p. sur } X .$$

Balayage : on note (B) (resp. (B^*)) l'ensemble des noyaux G qui satisfont à :

Pour tout compact K et pour toute mesure $\mu \in \mathfrak{M}$ (resp. $\mu \in \mathcal{E}$), il existe $\mu' \in \mathfrak{M}(K)$ tel que :

$$G\mu' = G\mu \text{ a. p. p. p. sur } K \qquad \text{et} \qquad G\mu' \leqslant G\mu \text{ sur } X .$$

(B^{**}) se définit comme (B^*), mais avec

$$G\mu' \leqslant G\mu \text{ a. p. p. p. sur } X .$$

Remarques. - Lorsque G est, par exemple, dans (M), on dit que G vérifie le principe du maximum (M).

Les notations (D^*) et (B^*) ont été introduites par OHTSUKA ([14]) qui a montré, par un exemple, que (D) est différent de (D^*). Mais en fait, sous une hypothèse bien naturelle, on prouvera que (D) et (D^*) sont égaux, ainsi que (B) et (B^*).

Les principes (D^{**}) et (B^{**}) ne sont pas sans intérêt non plus. Les principes de domination et de balayage apparaissent sous cette forme dans d'autres cadres - en particulier lorsque les potentiels (d'énergie finie) sont des classes de fonctions définies à peu près partout.

3. Relations entre principes.

THÉORÈME 1.

(a) G régulier et $G \in (E) \Longrightarrow G \in (M)$.

(b) $\check{G}$ régulier et $G \in (M) \Longrightarrow G \in (E)$.

La démonstration se fait comme dans [9] (et [6]) en utilisant les lemmes 1 et 2.

THÉORÈME 2. - On considère des noyaux G pour lesquels tout ouvert non vide de X est non exceptionnel, et tels que G et $\check{G}$ soient réguliers. Alors :

$$G \in (D) \iff G \in (B) \iff \check{G} \in (D) \iff \check{G} \in (B) .$$

Démonstration.

(a) L'implication suivante est immédiate et bien connue :

$$G \in (B) \Longrightarrow \check{G} \in (D) .$$

On peut même remplacer : $G \in (B)$ par :

G vérifie le principe du balayage élémentaire, c'est-à-dire, pour tout compact K, pour tout x_0 n'appartenant pas à K, il existe τ dans $\mathfrak{M}(K)$ tel que :

$$G\tau = G\varepsilon_{x_0} \quad \text{a. p. p. p. sur } K \quad \text{et} \quad G\tau \leqslant G\varepsilon_{x_0} \quad \text{sur } X$$

(ε_{x_0} est la mesure de Dirac en x_0).

Les mêmes observations valent pour l'implication :

$$\check{G} \in (B) \Longrightarrow G \in (D) .$$

(b) En utilisant l'hypothèse : $\check{G}$ régulier, on prouve :

$$G \in (D) \Longrightarrow G \in (B) .$$

Ce résultat, connu pour un noyau strictement positif, s'étend au cas d'un noyau pouvant s'annuler hors de Δ , grâce à **la généralisation du lemme de Kishi (lemme 1)** et grâce au lemme 2.

Soient K un compact de X , et μ une mesure de $\mathfrak{M}$. Soit (u_n) une suite croissante de fonctions continues $\geqslant 0$ sur K telle que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = G\mu \quad .$$

D'après le lemme 1, il existe $\mu'_n \in \mathcal{E}(K)$ tel que :

$$G\mu'_n \geqslant u_n \quad \text{a. p. p. p. sur } K \qquad \text{et} \qquad G\mu'_n \leqslant u_n \quad \text{sur } S\mu'_n \quad .$$

On a $G\mu'_n \leqslant G\mu$ sur $S\mu'_n$, donc partout puisque G est dans (D) . Comme tout ouvert non vide de X est non exceptionnel, on sait (I, § 2) que $G\mu$ est fini sur un ensemble partout dense. La propriété :

$$G\mu'_n \leqslant G\mu \quad \text{sur } X$$

permet de conclure, avec le lemme 2, qu'il existe M tel que

$$\forall\, n \qquad \int d\mu'_n \leqslant M \quad .$$

La suite (μ'_n) est relativement compacte ; on peut en extraire une sous-suite, qu'on note encore (μ'_n) , qui converge vers une mesure μ' . On a :

$$G\mu' \leqslant G\mu \quad \text{sur } X \qquad (\, G \text{ est s. c. i.}) \quad .$$

Et, pour tout λ de $\check{\mathcal{E}}^1(K)$, on a :

$$G(\mu'_n , \lambda) \geqslant \int u_n \, d\lambda \qquad \text{donc} \qquad G(\mu' , \lambda) \geqslant G(\mu , \lambda) \quad ,$$

ce qui équivaut à :

$$G\mu' = G\mu \quad \text{a. p. p. p. sur } K \quad .$$

En utilisant l'hypothèse : G régulier, on prouve de même :

$$\check{G} \in (D) \implies \check{G} \in (B) \quad .$$

Ceci achève la démonstration.

<u>Remarque</u>. - Sous les hypothèses du théorème 2, les principes fort et complet du maximum sont équivalents pour les noyaux étudiés ici.

THÉORÈME 3. - <u>On considère des noyaux</u> G <u>continus hors de</u> Δ , <u>pour lesquels tout ouvert non vide de</u> X <u>est non exceptionnel, et tels que</u> G <u>et</u> $\check{G}$ <u>soient réguliers. Alors</u> :

$$(D) = (D^*) = (D^{**}) = (B) = (B^*) = (B^{**}) \quad .$$

Il est bien naturel de supposer que tout ouvert non vide de X est non exceptionnel, et c'est une hypothèse indispensable pour la validité de ce théorème.

Démonstration. - On a des relations d'inclusion évidentes :

$$(D) \subset (D^{*}) \subset (D^{**}) \qquad \text{et} \qquad (B) \subset (B^{*}) \subset (B^{**}) \quad .$$

Compte-tenu du théorème 2, il suffit de montrer que si G appartient à (D^{**}) ou à (B^{**}), alors G vérifie le principe du balayage élémentaire.

(a) Si $G \in (D^{**})$ ou si $G \in (B^{**})$, alors quels que soient les compacts A et B non exceptionnels disjoints, il existe $\sigma \in \mathcal{E}^{1}(A)$ et $\tau \in \mathcal{E}(B)$, tels que

$$G\sigma - G\tau \geqslant 0 \quad \text{a. p. p. p. sur } X \qquad \text{et} \qquad G\sigma - G\tau = 0 \quad \text{a. p. p. p. sur } B \quad .$$

On prend $\sigma \in \mathcal{E}^{1}(A)$ quelconque (σ existe, car A est non exceptionnel), et on prend pour τ :

- soit une mesure associée à la fonction $G\sigma$ sur le compact B, conformément au lemme 1 (lorsque $G \in (D^{**})$),
- soit une mesure "balayée" de $G\sigma$ sur B (lorsque $G \in (B^{**})$).

(b) On déduit de la propriété précédente le balayage élémentaire pour G.

Soit K un compact de X (qu'on peut supposer non exceptionnel), et soit $x_0 \notin K$. On considère une suite décroissante d'ouverts non vides (U_n), relativement compacts et tels que

$$\bigcap_n U_n = \{x_0\} \qquad \text{et} \qquad \overline{U_1} \cap K = \emptyset \quad .$$

Au couple $(\overline{U_n}, K)$, on peut associer $\sigma_n \in \mathcal{E}^{1}(\overline{U_n})$ et $\tau_n \in \mathcal{E}(K)$ tels que :

$$G\sigma_n - G\tau_n \geqslant 0 \quad \text{a. p. p. p. sur } X \qquad \text{et} \qquad G\sigma_n - G\tau_n = 0 \quad \text{a. p. p. p. sur } K \quad .$$

Donc

$$G(\tau_n , \tau_n) = G(\sigma_n , \tau_n) \quad .$$

Posons $A = \inf\limits_{\alpha \in \mathcal{M}^1(K)} G(\alpha , \alpha)$ et $B = \sup\limits_{x \in K, y \in \overline{U_1}} G(x , y)$. On a :

$$A\left(\int d\tau_n\right)^2 \leqslant G(\tau_n , \tau_n) = G(\sigma_n , \tau_n) \leqslant B \int d\tau_n \quad ,$$

donc $\int d\tau_n \leqslant \frac{B}{A}$. On peut prendre une sous-suite telle que $\lim\limits_{n \to \infty} \tau_n = \tau$. On a $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \varepsilon_{x_0}$. Le passage à la limite donne :

$$G\tau \leqslant G\varepsilon_{x_0} \quad \text{a. p. p. p. sur } X \qquad \text{et} \qquad G\tau = G\varepsilon_{x_0} \quad \text{a. p. p. p. sur } K \quad .$$

Sur $X - \{x_0\}$, $G\varepsilon_{x_0}$ est une fonction continue et $G\tau$ est semi-continue inférieurement. On a $G\tau \leqslant G\varepsilon_{x_0}$ sur un ensemble partout dense, donc partout sur $X - \{x_0\}$.

D'autre part, on a bien $G\varepsilon_{x_0}(x_0) \geqslant G\tau(x_0)$. Cette inégalité est vérifiée de façon triviale pour $G(x_0 , x_0) = + \infty$ et aussi pour $G(x_0 , x_0) < + \infty$, car alors $\{x_0\}$ n'est pas exceptionnel.

III. Principes des condensateurs

On ne considèrera désormais (dans les paragraphes III et IV) que des noyaux continus hors de Δ .

1. Un lemme préliminaire.

On établit, en utilisant le théorème du point fixe de Ky Fan et Glicksberg, un Lemme un peu analogue au lemme 1, mais pour deux compacts disjoints. OHTSUKA ([14]) a obtenu ce résultat dans le cas des noyaux symétriques, par des méthodes variationnelles qui sont inapplicables dans le cadre de cet exposé.

LEMME 3. - Soit G un noyau tel que $\check{G}$ soit régulier. Quels que soient les compacts A et B disjoints, A non exceptionnel, quelle que soit la fonction u continue strictement positive sur A , il existe :

$$\sigma \in \mathcal{E}^1(A) , \qquad \tau \in \mathcal{E}(B) \qquad \text{et} \qquad a \in \underset{\sim}{R}$$

tels que

$$\begin{cases} G\sigma - G\tau \geqslant au & \text{a. p. p. p. sur } A \\ G\sigma - G\tau \leqslant au & \text{sur } S\sigma \end{cases} \qquad \begin{cases} G\sigma - G\tau \leqslant 0 & \text{a. p. p. p. sur } B \\ G\sigma - G\tau \geqslant 0 & \text{sur } S\tau \end{cases} .$$

2. Démonstration du lemme 3.

Si le compact B est exceptionnel, on prend $\tau = 0$, et on est ramené au lemme 1 pour le compact A et la fonction u . On supposera ci-dessous B non exceptionnel.

(α) On prouve le résultat suivant :

Soit G un noyau tel que $\check{G}$ soit régulier. Quels que soient les compacts A et

B disjoints non exceptionnels, il existe :

$$\mu \in \mathcal{E}^1(A) \qquad \underline{\text{et}} \qquad \nu \in \mathcal{E}^1(B)$$

tels que

$$\forall\ \alpha \in \mathcal{E}^1(A) \qquad G(\mu , \mu)\, G(\nu , \nu) - G(\mu , \nu)\, G(\nu , \mu) \leqslant G(\mu , \alpha)\, G(\nu , \nu) - G(\mu , \nu)\, G(\nu , \alpha) \quad ,$$

$$\forall\ \beta \in \mathcal{E}^1(B) \qquad G(\nu , \nu)\, G(\mu , \beta) \leqslant G(\nu , \beta)\, G(\mu , \nu) \quad .$$

Cas particulier. - Il peut arriver que l'on ait :

$$\forall\ \beta \in \mathcal{E}^1(B) \qquad G(\mu , \beta) = 0 \quad ,$$

et alors on a aussi :

$$\forall\ \alpha \in \mathcal{E}^1(A) \qquad G(\mu , \mu) \leqslant G(\mu , \alpha) \quad ,$$

et les inégalités ci-dessus sont vérifiées pour toute mesure ν de $\mathcal{E}^1(B)$.

Démonstration en trois étapes :

1re étape : Le noyau G est fini continu et strictement positif.

Pour $\mu \in \mathfrak{M}^1(A)$ et $\nu \in \mathfrak{M}^1(B)$, on pose :

$$\varphi(\mu , \nu) = \{\lambda \in \mathfrak{M}^1(A) :\ \forall\ \alpha \in \mathfrak{M}^1(A) ,$$
$$G(\mu , \lambda)\, G(\nu , \nu) - G(\mu , \nu)\, G(\nu , \lambda) \leqslant G(\mu , \alpha)\, G(\nu , \nu) - G(\mu , \nu)\, G(\nu , \alpha)\} ,$$

$$\psi(\mu , \nu) = \{\rho \in \mathfrak{M}^1(B) :\ \forall\ \beta \in \mathfrak{M}^1(B) ,\ \frac{G(\nu , \rho)}{G(\mu , \rho)} \leqslant \frac{G(\nu , \beta)}{G(\mu , \beta)}\} \quad ,$$

et

$$\Gamma(\mu , \nu) = \varphi(\mu , \nu) \times \psi(\mu , \nu) \; .$$

L'application $(\mu , \nu) \longrightarrow \Gamma(\mu , \nu)$ de $\mathfrak{M}^1(A) \times \mathfrak{M}^1(B)$ dans l'ensemble des parties de ce même convexe compact vérifie les hypothèses du théorème du point fixe. Donc il existe (μ , ν) appartenant à $\Gamma(\mu , \nu)$, ce qui est le résultat cherché. Si l'on suppose le noyau G s. c. i. et continu hors de Δ , on peut définir l'application Γ , mais on ne sait pas, en général, si le graphe de Γ est fermé.

2e étape : Le noyau G est fini continu et positif ou nul.

On considère une suite décroissante (G_n) de noyaux finis continus et strictement positifs, telle que :

$$\lim_{n\to\infty} G_n = G \quad .$$

Sur le compact $(A \cup B) \times (A \cup B)$, G_n converge uniformément vers G . A chaque

G_n , on associe comme ci-dessus $\mu_n \in \mathfrak{M}^1(A)$ et $\nu_n \in \mathfrak{M}^1(B)$. La suite relativement compacte (μ_n , ν_n) a un point d'accumulation au moins (μ , ν) qui convient.

3e étape : Le noyau G est s. c. i., continu hors de Δ , non négatif sur $X \times X$ et strictement positif sur Δ .

On considère une suite croissante (G_n) de noyaux continus positifs ou nuls, tels que :

$$G_n = G \quad \text{sur } A \times B \text{ et } B \times A \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} G_n = G \quad \text{sur } A \times A \text{ et } B \times B \ .$$

D'après ce qui précède, pour chaque n , il existe :

$$\mu_n \in \mathfrak{M}^1(A) \qquad \text{et} \qquad \nu_n \in \mathfrak{M}^1(B) \ ,$$

tels que :

$$\forall\ \alpha \in \mathfrak{M}^1(A) \qquad \text{et} \qquad \forall\ \beta \in \mathfrak{M}^1(B)$$

$$(1) \qquad G_n(\mu_n , \mu_n)\ G_n(\nu_n , \nu_n) - G(\mu_n , \nu_n)\ G(\nu_n , \mu_n) \leq G_n(\nu_n , \nu_n)\ G_n(\mu_n , \alpha) - G(\mu_n , \nu_n)\ G(\nu_n , \alpha)$$

et

$$(2) \qquad G_n(\nu_n , \nu_n)\ G(\mu_n , \beta) \leq G(\mu_n , \nu_n)\ G_n(\nu_n , \beta) \ .$$

Il existe une sous-suite, qu'on note encore (μ_n , ν_n) , qui converge vers (μ , ν') . On va chercher à prendre des $\underline{\lim}$ dans (1) et (2). Pour cela, on observe d'abord :

(a) $\underline{\lim}_{n\to\infty} G_n(\mu_n , \mu_n) \geq G(\mu , \mu)$ et $\underline{\lim}_{n\to\infty} G_n(\nu_n , \nu_n) \geq G(\nu' , \nu')$;

(b) Pour $\alpha \in \check{\mathfrak{F}}^1(A)$ et $\beta \in \check{\mathfrak{F}}^1(B)$, alors

$$\exists \lim_{n\to\infty} G_n(\mu_n , \alpha) = G(\mu , \alpha) \qquad \text{et} \qquad \exists \lim_{n\to\infty} G_n(\nu_n , \beta) = G(\nu' , \beta) \ .$$

En prenant des $\underline{\lim}$ dans (2), pour $\beta \in \check{\mathfrak{F}}^1(B)$, on obtient :

$$(3) \qquad G(\nu' , \nu')\ G(\mu , \beta) \leq \underline{\lim}\ G_n(\nu_n , \nu_n)\ G(\mu , \beta) \leq G(\mu , \nu')\ G(\nu' , \beta) \ .$$

- 1er cas : $G(\mu , \nu') = 0$. - Comme $G(\nu' , \nu') > 0$, (3) entraîne :

$$\forall\ \beta \in \check{\mathfrak{F}}^1(B) \qquad G(\mu , \beta) = 0 \ .$$

En outre, $G(\mu_n , \nu_n)$ tend vers 0 et $\underline{\lim}\ G_n(\nu_n , \nu_n) \geq G(\nu' , \nu') > 0$, on déduit de (1) :

$$G_n(\mu_n , \mu_n) \leq G_n(\mu_n , \alpha) + \varepsilon_n \qquad \text{avec} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \ .$$

En prenant des $\underline{\lim}$, on trouve :

$$\forall\ \alpha \in \check{\mathfrak{F}}^1(A) \qquad G(\mu\ ,\ \mu) \leqslant G(\mu\ ,\ \alpha) \quad .$$

En utilisant la régularité de $\check{G}$, on constate qu'on se trouve alors dans le cas particulier signalé.

– $\underline{\text{2e cas}}$: $\underline{\lim}_{n\to\infty} G_n(\nu_n\ ,\ \nu_n) = +\infty$, c'est-à-dire : $G_n(\nu_n\ ,\ \nu_n) \to 0$. – De (3), on déduit :

$$\forall\ \beta \in \check{\mathfrak{F}}^1(B) \qquad G(\mu\ ,\ \beta) = 0 \quad ,$$

et (1) peut s'écrire :

$$G_n(\mu_n\ ,\ \mu_n) \leqslant G_n(\mu_n\ ,\ \alpha) + \varepsilon_n \qquad \text{avec} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \quad .$$

D'où :

$$\forall\ \alpha \in \check{\mathfrak{F}}^1(A) \qquad G(\mu\ ,\ \mu) \leqslant G(\mu\ ,\ \alpha) \quad .$$

On conclut comme ci-dessus, et on observe qu'on est encore dans le cas particulier.

– $\underline{\text{3e cas}}$: $\underline{\lim}_{n\to\infty} G_n(\nu_n\ ,\ \nu_n) < +\infty$ et $G(\mu\ ,\ \nu') \neq 0$. – On pose $\nu' = \nu$, et on montre que $(\mu\ ,\ \nu)$ répond aux conditions voulues. On ne peut pas passer à la limite dans (1) en général. Mais en utilisant (3), on établit que :

$$\underline{\lim}\ G_n(\nu_n\ ,\ \nu_n) = G(\nu\ ,\ \nu) \quad .$$

On pose $\ell = \underline{\lim}\ G_n(\nu_n\ ,\ \nu_n)$. On a :

$$\ell \geqslant G(\nu\ ,\ \nu) \quad ,$$

donc ν est dans $\check{\mathfrak{F}}^1(B)$. De (3), on déduit ($\check{G}$ étant régulier) :

$$\ell\ G\mu \leqslant G(\mu\ ,\ \nu)\ G\nu \quad \text{a. p. p. p. sur} \quad B \quad ,$$

donc

$$\ell\ G(\mu\ ,\ \nu) \leqslant G(\mu\ ,\ \nu)\ G(\nu\ ,\ \nu) \qquad \text{où} \quad G(\mu\ ,\ \nu) > 0 \quad ,$$

donc

$$\ell \leqslant G(\nu\ ,\ \nu) \quad .$$

On considère une sous-suite telle que : $G_n(\nu_n\ ,\ \nu_n) \to \ell$. On prend des $\underline{\lim}$ dans (1), et on obtient le résultat.

(β) <u>On déduit de</u> (α) <u>le lemme</u> 3, <u>pour</u> $u = 1$.

Dans les 1er et 2e cas, on prend $\sigma = \mu$, $\tau = 0$, et $a = G(\mu\ ,\ \mu)$.

Dans le 3e cas, on prend

$$\sigma = \mu \ , \quad \tau = \frac{G(\mu\ ,\ \nu)}{G(\nu\ ,\ \nu)}\,\nu \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{G(\nu\ ,\ \nu)}\,[G(\mu\ ,\ \mu)\ G(\nu\ ,\ \nu) - G(\mu\ ,\ \nu)\ G(\nu\ ,\ \mu)] \quad .$$

(γ) On établit enfin le résultat dans le cas général en appliquant (β) au noyau G' défini par :

$$G'(x, y) = \frac{G(x, y)}{u(x)} \quad \text{pour} \quad x \in A \qquad \text{et} \qquad G'(x, y) = G(x, y) \quad \text{pour} \quad x \in B .$$

Il est aisé de vérifier, en particulier, que $\check{G}'$ est régulier.

Propriétés de la constante a du lemme 3.

Définition. - Unicité : On note (U^*) (resp. (U^{**})), la famille des noyaux G qui satisfont à :

$$\forall \mu \in \mathcal{E} , \ \forall \nu \in \mathcal{E} \qquad G\mu = G\nu \ \text{ sur } X \ (\text{resp. a. p. p. p. sur } X) \implies \mu = \nu .$$

Propriétés. - La constante a du lemme 3, associée à G, est :

1° non négative pour $G \in (M)$ ou $G \in (D^{**})$, et

2° strictement positive pour $G \in (D^*) \cap (U^*)$ ou $G \in (D^{**}) \cap (U^{**})$.

La démonstration de 1° se fait en utilisant un raisonnement dû à NINOMIYA ([13]). On doit noter que NINOMIYA a, le premier, adapté la méthode variationnelle de GAUSS au cas de deux compacts disjoints, pour un noyau symétrique.

Pour prouver le 2°, on suppose $a = 0$. Alors

$$G \in (D^*) \ (\text{resp. } G \in (D^{**})) \implies G\sigma = G\tau \ \text{ sur } X \ (\text{resp. a. p. p. p. sur } X) .$$

Ceci est en contradiction avec $G \in (U^*)$ (resp. $G \in (U^{**})$) puisque σ et τ sont à supports disjoints.

3. Principes des condensateurs.

Principe complet du maximum. - On note (CM) (resp. (CM^*)) l'ensemble des noyaux G qui satisfont à :

$$\forall \mu \in \mathcal{E} , \ \forall \nu \in \mathfrak{M} \ (\text{resp. } \forall \nu \in \mathcal{E}) , \ \forall a \geqslant 0 ,$$

$$G\mu \leqslant G\nu + a \ \text{ sur } S\mu \implies G\mu \leqslant G\nu + a \ \text{ sur } X .$$

(CM^{**}) se définit comme (CM^*), mais avec la conclusion :

$$G\mu \leqslant G\nu + a \quad \text{a. p. p. p. sur } X .$$

Principe des condensateurs (resp. principe strict). On note (Cd) (resp. (Cds)) l'ensemble des noyaux G qui satisfont à :

Quels que soient les compacts A et B disjoints, A non exceptionnel, il existe $\sigma \in \mathcal{E}^1(A)$, $\tau \in \mathcal{E}(B)$ et $a \geqslant 0$ (resp. $a > 0$) tels que :

$$0 \leqslant G\sigma - G\tau \leqslant a \quad \text{sur } X$$

$$G\sigma - G\tau = a \quad \text{a. p. p. p. sur } A \qquad \text{et} \qquad G\sigma - G\tau = 0 \quad \text{a. p. p. p. sur } B .$$

Dans les espaces de Dirichlet de BEURLING et DENY ([1] et [3]), un principe des condensateurs est vérifié, sous sa forme stricte, et pour deux ouverts. On envisage, dans le cadre de cet exposé, les relations entre le principe complet du maximum et le principe des condensateurs.

THÉORÈME 4 (1). - On considère des noyaux G continus hors de Δ, pour lesquels tout ouvert non vide de X est non exceptionnel, et tels que G et $\check{G}$ soient réguliers. Alors :

$$(Cd) = (CM) = (CM^*) = (CM^{**}) .$$

Démonstration.

1° On prouve que $(CM) = (CM^*) = (CM^{**})$.

Pour cela, il suffit de démontrer l'implication :

$$G \in (CM^{**}) \implies G \in (CM) .$$

(a) $G \in (CM^{**}) \implies G \in (M)$.

En effet, si on a $G\mu \leqslant 1$ sur S_μ, alors on a $G\mu \leqslant 1$ a. p. p. p. sur X. $G\mu$ est une fonction s. c. i. majorée par 1 a. p. p. p. sur X, donc sur un ensemble partout dense. Donc $G\mu \leqslant 1$ sur X.

(b) $G \in (CM^{**}) \implies G \in (D^{**}) \implies G \in (D)$.

La première implication est évidente, et la deuxième résulte du théorème 3.

(c) $G \in (M) \cap (D) \implies G \in (CM)$.

Le raisonnement donné par KISHI, pour des noyaux strictement positifs, est valable dans le cadre de cet exposé.

Il est clair que les assertions (a), (b), (c) entraînent:

$$G \in (CM^{**}) \implies G \in (CM) .$$

(1) M. KISHI vient d'obtenir, indépendamment, des résultats analogues à ceux du théorème 4.

2° <u>On prouve que</u> $G \in (Cd) \implies G \in (M) \cap (D)$.

Il résulte de l'hypothèse : $G \in (Cd)$, que, quels que soient les compacts A et B non exceptionnels disjoints, il existe $\sigma \in \mathcal{E}^1(A)$ et $\tau \in \mathcal{E}(B)$ tels que :

$$G\sigma - G\tau \geqslant 0 \quad \text{sur } X \qquad \text{et} \qquad G\sigma - G\tau = 0 \quad \text{a. p. p. p. sur } B \ .$$

On a vu, dans la démonstration du théorème 3, que cette propriété entraîne que G vérifie le principe du balayage élémentaire, donc que G est dans (D) .

On établit maintenant que G est dans (E) , donc dans (M) . De l'hypothèse : $G \in (Cd)$, il résulte que si A est un compact non exceptionnel (et si $B = \emptyset$), il existe $\sigma \in \mathcal{E}^1(A)$ et $a \geqslant 0$ tels que :

$$G\sigma \leqslant a \quad \text{sur } X \qquad \text{et} \qquad G\sigma = a \quad \text{a. p. p. p. sur } A \ .$$

C'est le principe d'équilibre, à condition que a ne soit pas nul ; ce qui résulte de l'égalité :

$$G(\sigma , \sigma) = a \int d\sigma = a \ .$$

3° <u>On prouve que</u> $G \in (CM) \implies G \in (Cd)$.

Puisque $\check{G}$ est régulier et que G est continu hors de Δ , on peut appliquer <u>le lemme</u> 3, avec $u = 1$. Donc si A et B sont deux compacts disjoints, A non exceptionnel, il existe :

$$\sigma \in \mathcal{E}^1(A) , \qquad \tau \in \mathcal{E}(B) \qquad \text{et} \qquad a \in \mathbb{R}$$

tels que

$$\begin{cases} G\sigma - G\tau \geqslant a & \text{a. p. p. p. sur } A \\ G\sigma - G\tau \leqslant a & \text{sur } S\sigma \end{cases} \qquad \begin{cases} G\sigma - G\tau \leqslant 0 & \text{a. p. p. p. sur } B \\ G\sigma - G\tau \geqslant 0 & \text{sur } S\tau \ . \end{cases}$$

Or G est dans (D) , donc $a \geqslant 0$, et d'autre part :

$$G\sigma - G\tau \geqslant 0 \quad \text{sur } X \qquad \text{et} \qquad G\sigma - G\tau = 0 \quad \text{a. p. p. p. sur } B \ .$$

Ensuite, G est dans (M) , donc dans (E) d'après le théorème 1. On note λ une mesure de $\mathcal{E}(A)$ telle que :

$$G\lambda = 1 \quad \text{a. p. p. p. sur } A \qquad \text{et} \qquad G\lambda \leqslant 1 \quad \text{sur } X \ .$$

On a :

$$G\sigma \leqslant G(\tau + a\lambda) \quad \text{a. p. p. p. sur } S\sigma \ ,$$

donc σ-p. p. (car $\sigma \in \mathcal{E}$). Il résulte du principe de domination que :

$$G\sigma \leqslant G\tau + a\, G\lambda \quad \text{sur } X \ .$$

Donc :

$$G\sigma - G\tau \leqslant a \quad \text{sur } X \quad \text{et} \quad G\sigma - G\tau = a \quad \text{a. p. p. p. sur } A .$$

Remarque. - En utilisant les seules hypothèses : $\check{G}$ régulier et G continu hors de Δ, on vient d'établir :

$$G \in (CM^*) \implies G \in (Cd) .$$

En effet, dans la démonstration ci-dessus, on a utilisé seulement :

$$G \in (D^*) \quad \text{et} \quad G \in (M) .$$

Il est clair que l'on a, dans les mêmes conditions :

$$G \in (CM^*) \cap (U^*) \implies G \in (Cds) ,$$

puisqu'alors la constante a est strictement positive.

4. Autres conséquences du lemme 3.

PROPOSITION 1. - Soit G un noyau dont l'adjoint $\check{G}$ est régulier et

$$G \in (D^*) \cap (U^*) .$$

Quels que soient les compacts A et B disjoints et non exceptionnels, quel que soit λ dans $\mathcal{F}$ tel que $G\lambda > 0$ sur A, il existe :

$$\sigma \in \mathcal{E}(A) , \quad \sigma \neq 0 \quad \text{et} \quad \tau \in \mathcal{E}(B) ,$$

tels que

$$0 \leqslant G\sigma - G\tau \leqslant G\lambda \quad \text{sur } X$$

$$G\sigma - G\tau = G\lambda \quad \text{a. p. p. p. sur } A \quad \text{et} \quad G\sigma - G\tau = 0 \quad \text{a. p. p. p. sur } B .$$

Ce résultat est une conséquence facile du lemme 3 en prenant $u = G\lambda$, en divisant par $a > 0$, et en utilisant : $G \in (D^*)$.

Remarques.

(1) Si G est régulier et si tout ouvert non vide de X est non exceptionnel, alors il existe λ dans $\mathcal{E}$ tel que $G\lambda$ soit continu et strictement positif sur A.

En effet, comme $G(x, x) > 0$, il existe un recouvrement de A par un nombre fini d'ouverts : $U_1, U_2, \ldots, U_p$, tel que

$$\forall s , \ \forall t \in U_j \qquad G(s, t) > 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p) .$$

Chaque U_j porte une mesure $\lambda_j \neq 0$ telle que $G\lambda_j$ soit continu sur X. La mesure $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p$ est telle que $G\lambda$ soit continu sur X et strictement positif sur A.

(2) Dans les hypothèses de la proposition 1, on observe que le noyau G' défini par $G'(x, y) = \frac{G(x, y)}{G\lambda(x)}$ (à condition que $G\lambda$ soit strictement positif sur X) appartient à (Cds), donc à (CM).

Plus généralement, on a <u>la propriété suivante</u> :

Soient G un noyau sur X, et $G\lambda$ un potentiel continu strictement positif sur X. On pose :

$$G'(x, y) = \frac{G(x, y)}{G\lambda(x)} .$$

Alors :

$$G \in (D) \implies G' \in (CM) \qquad \text{et} \qquad G \in (D^*) \implies G' \in (CM^*) .$$

PROPOSITION 2. - <u>Soit G un noyau pour lequel tout ouvert non vide de X est non exceptionnel et tel que G et $\check{G}$ soient réguliers. On suppose que G est dans (D^*), et $\check{G}$ dans (U^*). Soient μ et ν de $\mathcal{E}$ tels que :</u>

$$G\mu \geqslant G\nu \quad \text{a. p. p. p. sur } X .$$

<u>Alors la restriction à l'ensemble $E = \{x \in X : G\nu(x) \geqslant G\mu(x)\}$ de la mesure $\mu - \nu$ est négative.</u>

Cette propriété a été mise en évidence dans le cas du potentiel newtonien par de LA VALLÉE-POUSSIN ([12]) et BRELOT ([2]). DENY ([4]) en a souligné l'intérêt dans le cadre d'espaces fonctionnels.

<u>Démonstration</u>. - Si E est exceptionnel, la restriction à E de $\mu - \nu$ est nulle. Sinon, soit A un compact non exceptionnel de E, et soient $\varepsilon > 0$ et U un voisinage ouvert de A tel que : $\nu(U - A) < \varepsilon$. Enfin, soit B un compact non exceptionnel contenant : $S_\nu \cap \complement U$. Le noyau $\check{G}$ vérifie les hypothèses de <u>la proposition 1</u>. Soit λ dans $\check{\mathcal{F}}$ tel que $\check{G}\lambda$ soit strictement positif sur A. Il existe :

$$\sigma \in \mathcal{E}(A) , \quad \sigma \neq 0 \quad \text{et} \quad \tau \in \mathcal{E}(B) ,$$

tels que

$$0 \leqslant \check{G}\sigma - \check{G}\tau \leqslant \check{G}\lambda \quad \text{sur } X$$

$$\check{G}\sigma - \check{G}\tau = \check{G}\lambda \quad \text{a. p. p. p. sur } A \qquad \text{et} \qquad \check{G}\sigma - \check{G}\tau = 0 \quad \text{a. p. p. p. sur } B ,$$

$$G\mu = G\nu \quad \text{a. p. p. p. sur } A \implies G(\mu, \sigma) = G(\nu, \sigma) \qquad (\text{car } \sigma \in \mathcal{E}(A))$$

$$G\mu \geqslant G\nu \quad \text{a. p. p. p. sur } X \implies G(\mu, \tau) \geqslant G(\nu, \tau) \qquad (\text{car } \tau \in \mathcal{E}(B)) .$$

On note μ_A la restriction de μ à A, et on note de même ν_A et ν_B. On pose $\nu_3 = \nu - \nu_A - \nu_B$ et $M = \sup_{x\in S_\nu} \check{G}\lambda(x)$. On a :

$$G(\nu_B , \sigma) - G(\nu_B , \tau) = 0 \qquad \text{et} \qquad G(\mu_A , \sigma) - G(\mu_A , \tau) = G(\mu_A , \lambda) \quad ,$$

de même que :

$$G(\nu_A , \sigma) - G(\nu_A , \tau) = G(\nu_A , \lambda) \quad .$$

On déduit alors :

$$G(\mu_A , \lambda) \leqslant G(\mu , \sigma) - G(\mu , \tau) \leqslant G(\nu , \sigma) - G(\nu , \tau)$$
$$= G(\nu_A , \sigma) - G(\nu_A , \tau) + G(\nu_3 , \sigma) - G(\nu_3 , \tau) \leqslant G(\nu_A , \lambda) + M.\varepsilon \quad .$$

Comme λ, M, A, μ_A et ν_A ne dépendent pas de ε, on a :

$$\int \check{G}\lambda(d\mu_A - d\nu_A) \leqslant 0 \quad .$$

On peut maintenant faire un raisonnement par l'absurde. Si la restriction à E de $\mu - \nu$ n'est pas négative, alors il existe un compact A tel que : $\mu_A > \nu_A$. Alors A est non exceptionnel ($\mu_A \neq 0$ et $\mu \in \mathcal{E}$). Si $\check{G}\lambda$ est un potentiel continu sur X et strictement positif sur A (un tel $\check{G}\lambda$ existe), alors :

$$\int \check{G}\lambda(d\mu_A - d\nu_A) > 0 \quad ,$$

d'où la contradiction.

IV. Un principe de contraction

La notion de contraction est un outil essentiel dans la théorie des espaces de Dirichlet ([1] et [3]). DENY a établi dans [5] l'équivalence, dans des espaces fonctionnels généraux, des deux énoncés suivants :

1° Les contractions normales (resp. la contraction "module") opèrent ;

2° Le principe complet du maximum (resp. le principe de domination) est satisfait.

On envisage maintenant un aspect de ces problèmes dans le cadre des noyaux fonctions non symétriques.

Dans ce paragraphe, on supposera que l'espace X est compact, et on envisagera des noyaux pour lesquels tout ouvert non vide de X est non exceptionnel, et toujours continus hors de Δ.

THÉORÈME 5. - Soit G un noyau tel que G et $\check{G}$ soient réguliers. On suppose que G est dans (D^*), et $\check{G}$ dans (U^*). Alors G vérifie le principe d'enveloppe inférieure suivant :

$$\forall \mu_1 \in \mathcal{E}, \quad \forall \mu_2 \in \mathcal{E} \qquad \exists \nu \in \mathfrak{M}$$

tel que

$$G\nu = \inf(G\mu_1 , G\mu_2) \quad \text{a. p. p. p. sur } X .$$

Si ν est dans $\mathcal{E}$, on a en plus les relations suivantes :

(1) $$G(\mu_2 , \nu) + G(\nu , \mu_1) \geqslant G(\nu , \nu) + G(\mu_2 , \mu_1) ,$$

(2) $$G(\mu_1 , \nu) + G(\nu , \mu_2) \geqslant G(\nu , \nu) + G(\mu_1 , \mu_2) .$$

Démonstration. - Pour prouver l'existence de ν tel que :

$$G\nu = \inf(G\mu_1 , G\mu_2) \quad \text{a. p. p. p.} ,$$

on utilise un raisonnement classique, avec les lemmes 1 et 2. Soit (u_n) une suite croissante de fonctions continues positives telles que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \inf(G\mu_1 , G\mu_2) \quad \text{sur } X .$$

Le lemme 1, appliqué à u_n et au compact X, donne : $\exists \nu_n \in \mathcal{E}$ tel que

$$G\nu_n \geqslant u_n \quad \text{a. p. p. p. sur } X \qquad \text{et} \qquad G\nu_n \leqslant u_n \quad \text{sur } S\nu_n .$$

Comme G est dans (D^*), on déduit :

$$G\nu_n \leqslant G\mu_1 \quad \text{sur } X \qquad \text{et} \qquad G\nu_n \leqslant G\mu_2 \quad \text{sur } X .$$

Le lemme 2 entraîne que la suite (ν_n) est relativement compacte. En considérant une sous-suite convergente de limite ν, on obtient, par passage à la limite, la première partie du théorème.

Si ν est dans $\mathcal{E}$, les relations (1) et (2) sont des conséquences de la proposition 2. On prouve, par exemple,

$$\int (G\mu_2 - G\nu)(d\nu - d\mu_1) \geqslant 0 .$$

On pose :

$$E = \{x \mid G\mu_1(x) \leqslant G\nu(x)\} .$$

Sur $\complement E$, on a : $G\mu_2 - G\nu = 0$ a. p. p. p., et sur E : $G\mu_2 - G\nu \geqslant 0$ a. p. p. p. Or, d'après la proposition 2, la restriction à E de $\nu - \mu_1$ est positive. D'où le résultat.

La mesure ν est dans $\mathcal{E}$, en particulier si la fonction $\inf(G\mu_1 , G\mu_2)$ est bornée sur X ; c'est le cas si μ_1 ou μ_2 est dans $\mathcal{F}$.

Notation. - Si $\mu = \mu_1 - \mu_2$ avec $\mu_1 \in \mathcal{E}$ et $\mu_2 \in \mathcal{E}$, on note $G\mu = G\mu_1 - G\mu_2$ aux points où cette quantité est définie, et

$$I(\mu) = I(\mu_1 - \mu_2) = G(\mu_1 , \mu_1) + G(\mu_2 , \mu_2) - G(\mu_1 , \mu_2) - G(\mu_2 , \mu_1) .$$

$G\mu$ est le potentiel de μ, et $I(\mu)$ l'énergie de μ.

En général, $I(\mu)$ est fini ou $-\infty$. Mais ([2]) si G est dans (D^*) et si $\check{G}$ est régulier, alors $G(\mu_1 , \mu_2)$ et $G(\mu_2 , \mu_1)$ sont finis. Dans ces conditions, $I(\mu)$ est fini et $G\mu$ est défini a. p. p. p.

THÉORÈME 6. - Soit G un noyau tel que G et $\check{G}$ soient réguliers. On suppose que G est dans (D^*), et $\check{G}$ dans (U^*). Alors G vérifie le principe de contraction-module suivant :

Quelles que soient μ_1 et μ_2 dans $\mathcal{E}$ l'une au moins de ces mesures appartenant à $\mathcal{F}$, et en posant $\mu = \mu_1 - \mu_2$, il existe $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ avec $\lambda_1 \in \mathcal{E}$ et $\lambda_2 \in \mathcal{E}$ tel que :

$$G\lambda = |G\mu| \quad \text{a. p. p. p.} \quad \text{et} \quad I(\lambda) \leqslant I(\mu) .$$

Démonstration. - Soit ν une mesure telle que :

$$G\nu = \inf(G\mu_1 , G\mu_2) \quad \text{a. p. p. p.} ,$$

alors ν est dans $\mathcal{E}$, et les relations (1) et (2) du théorème 5 entraînent :

$$I(\mu_1 - \mu_2) \geqslant I(\mu_1 + \mu_2 - 2\nu) .$$

La mesure λ, définie par $\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2$ et $\lambda_2 = 2\nu$, répond aux conditions du théorème 6.

Pour terminer, on indique deux résultats négatifs concernant les noyaux fonctions non symétriques.

Pour un noyau G vérifiant toutes les hypothèses de régularité, et appartenant à (CM) :

1° L'énergie d'une mesure μ peut être strictement négative ;

2° Il peut exister des contractions normales qui n'opèrent pas (avec diminution de l'énergie).

([2]) Cette propriété m'a été communiquée oralement par M. KISHI.

Un contre-exemple est fourni par le noyau suivant, sur un espace à deux points :

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} .$$

Pour un tel noyau, il y a des mesures d'énergie strictement négative, et la contraction : "projection sur le segment $[0 , 1]$ " ne diminue pas toujours l'énergie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEURLING (A.) et DENY (J.). - Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 45, 1959, p. 208-215.

[2] BRELOT (Marcel). - Sur l'allure des fonctions harmoniques et sousharmoniques à la frontière, Math. Nachr., t. 4, 1950/51, p. 298-307.

[3] DENY (Jacques). - Sur les espaces de Dirichlet, Séminaire Brelot-Choquet : Théorie du potentiel, 1re année, 1957, n° 5, 14 p.

[4] DENY (Jacques). - Espaces de Gauss-Poincaré et espaces de Dirichlet, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 7e année, 1962/63, n° 4, 2 p.

[5] DENY (Jacques). - Principe complet du maximum et contractions, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 15, 1965, fasc. 1, p. 259-272 (Colloques internationaux du C. N. R. S. : La théorie du potentiel [146. 1964. Orsay], p. 259-271).

[6] DURIER (Roland). - Travaux de Kishi sur les relations entre divers principes de théorie du potentiel, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 9e année, 1964/65, n° 8, 19 p.

[7] FAN (Ky). - Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 38, 1952, p. 121-126.

[8] GLICKSBERG (I. L.). - A further generalisation of the Kakutani fixed point theorem with applications to Nash equilibrium points, Proc. Amer. math. Soc., t. 3, 1952, p. 170-174.

[9] KISHI (Masanori). - Maximum principles in the potential theory, Nagoya math. J., t. 23, 1963, p. 165-187.

[10] KISHI (Masanori). - Existence theorem in potential theory, Nagoya math. J. (à paraître).

[11] KISHI (Masanori). - Sur l'existence des mesures des condensateurs, Nagoya math. J. (à paraître).

[12] LA VALLÉE POUSSIN (Charles de). - Potentiel et problème généralisé de Dirichlet, Math. Gazette, t. 22, 1938, p. 17-36.

[13] NINOMIYA (N.). - Méthode de variation du minimum dans la théorie du potentiel, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 3e année, 1958/59, n° 5, 9 p.

[14] OHTSUKA (Makoto). - On potentials in locally compact spaces. J. Sc. of Hiroshima Univ., Series A-1, t. 25, 1961, p. 135-352.