Jacques Faraut

Puissances fractionnaires d'un noyau de Hunt

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 10, n° 2 (1965-1966), exp. n° 7, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1965-1966__10_2_A3_0>

24 février 1966

PUISSANCES FRACTIONNAIRES D'UN NOYAU DE HUNT

par Jacques FARAUT

I. Introduction

Un semi-groupe d'opérateurs étant donné sur un espace de Banach, à chaque mesure bornée sur $[0 , \infty[$, on peut associer un opérateur borné sur cet espace de Banach, cette application étant un homomorphisme d'algèbre pour le produit de convolution des mesures. Ce procédé permet de définir de nouveaux semi-groupes d'opérateurs associés à des semi-groupes de mesures sur $[0 , \infty[$. Voir PHILLIPS [4]. Cet homomorphisme sera étendu à certaines distributions : l'opérateur associé sera alors en général non borné. Voir SCHWARTZ [6]. En particulier, les générateurs infinitésimaux des nouveaux semi-groupes d'opérateurs obtenus ne sont plus en général associés à des mesures, mais à des distributions.

Une application en est faite à la théorie du potentiel : en utilisant le fait qu'un noyau de Hunt est l'intégrale d'un semi-groupe d'opérateurs sous-markoviens, on définira les puissances fractionnaires d'un tel noyau ; ce sont encore des noyaux de Hunt. Dans le cas où le noyau de Hunt est celui du potentiel newtonien, on obtient les noyaux d'ordre α de Marcel Riesz.

II. Représentation associée à un semi-groupe

1. Définition 1.

Un semi-groupe fortement continu à contraction d'opérateurs sur un espace de Banach E (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une famille d'opérateurs $\{P_t\}_{t\geq 0}$ de $L(E)$ vérifiant :

$P_0 = I$, $\forall\ t , s$, $P_{t+s} = P_t\ P_s$,

$\|P_t\| \leqslant 1$,

$\forall\ x \in E$, l'application $t \longmapsto P_t\ x$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans E .

Représentation associée. - Soit μ une mesure bornée à support dans $[0 , \infty[$. On pose :

$$G(\mu)x = \int_0^\infty P_t\, x\, \mu(dt) \ , \qquad \|G(\mu)x\| \leq \|\mu\|\|x\| \ ,$$

ce qui définit un opérateur $G(\mu)$ de $L(E)$; $\|G(\mu)\| \leq \|\mu\|$.

$$G(\mu \star \nu)x = \int_0^\infty P_{t+s}\, x\, \mu(dt)\, \nu(ds) = G(\mu)\, G(\nu)x \ .$$

Ainsi G est un homomorphisme d'algèbre de norme 1 de $M^1(\underset{\sim}{R}_+)$ dans $L(E)$. Si des mesures μ_i positives convergent étroitement vers une mesure μ , $G(\mu_i)$ converge vers $G(\mu)$ fortement.

2. Relation avec le calcul symbolique.

Supposons que le générateur infinitésimal A du semi-groupe P_t soit un opérateur borné de spectre contenu dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) < z_0$, z_0 étant l'abscisse de convergence absolue de l'intégrale

$$F(z) = \int_0^\infty e^{zt}\, \mu(dt) \ .$$

Soit R_z la résolvante de A . Il existe une courbe simple fermée C , contenue dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) < z_0$, et entourant le spectre de A . La fonction F est analytique au voisinage du spectre de A , et $F(A)$ est défini par l'intégrale de Cauchy :

$$F(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_C R_z\, F(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C R_z \int_0^\infty e^{zt}\, \mu(dt)\, dz \ .$$

Les intégrales étant normalement convergentes, on peut intervertir l'ordre des intégrations :

$$F(A) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2\pi i}\int_C R_z\, e^{zt}\, dz\right) \mu(dt) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C R_z\, e^{zt}\, dz = e^{tA} \ .$$

$$F(A) = \int_0^\infty e^{tA}\, \mu(dt) = G(\mu) \ .$$

La représentation G donne un procédé pour définir $F(A)$ lorsque A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu à contraction, et F la transformée de Laplace d'une mesure bornée sur $\underset{\sim}{R}_+$.

On se propose dans la suite de définir $(-A)^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$. La fonction $F(z) = z^\alpha$ n'est pas transformée de Laplace d'une mesure, mais d'une distribution. La représentation G sera pour cela étendue à certaines distributions.

3. Extension de la représentation G aux distributions de $\mathcal{D}'_{L^1}(\underset{\sim}{R}_+)$.

On note $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{R}_+}$ l'espace des fonctions de $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R})$ à support dans $[0 , \infty[$.

DÉFINITION 2. - <u>L'espace</u> $\mathcal{D}'_{L^1}(\underset{\sim}{R}_+)$ <u>est l'espace des distributions</u> T <u>à support dans</u> $[0 , \infty[$ <u>telles que</u> $T \star f$ <u>soit dans</u> $L^1(\underset{\sim}{R}_+)$ <u>pour toute fonction</u> f <u>de</u> $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{R}_+}$.

On peut montrer qu'une distribution de $\mathcal{D}'_{L^1}(\underset{\sim}{R}_+)$ est une somme finie de dérivées de mesures bornées à support dans $[0 , \infty[$, et que l'espace $\mathcal{D}'_{L^1}(\underset{\sim}{R}_+)$ est une algèbre pour la convolution [1].

<u>Filtre régularisant</u>. - C'est le filtre $\mathfrak{F}$ de base $(A_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$

$$A_\varepsilon = \{f , \quad f \geq 0 , \int f(t)\, dt = 1 , \quad \operatorname{supp}(f) \subset [0 , \varepsilon]\} ,$$

ce filtre converge étroitement vers la mesure δ .

Soit T une distribution de $\mathcal{D}'_{L^1}(\underset{\sim}{R}_+)$; l'opérateur (non borné en général) $(D(G(T)) , G(T))$ est défini par :

Le domaine $D(G(T))$ est l'ensemble des x de E , tels que $\lim\limits_{\mathfrak{F}} G(T \star f)x$ existe, et $G(T)x$ est égal à cette limite.

- Pour toute fonction h de $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{R}_+}$ et tout x de E , $G(h)x$ est dans $D(G(T))$ et $G(T)\, G(h)x = G(T \star h)x$. En effet,

$$G(T \star f)\, G(h)x = G(f)\, G(T \star h)x$$

et quand f tend vers δ suivant le filtre $\mathfrak{F}$, le second membre a une limite, donc le premier aussi, d'où le résultat.

- Le domaine $D(G(T))$ est dense dans E . En effet, pour tout x de E ,

$$x = \lim_{\mathfrak{F}} G(f)x \quad .$$

- L'opérateur $(D(G(T)) , G(T))$ est fermé. En effet, soit x_n une suite de points de $D(G(T))$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad ,$$

$$\lim_{n\to\infty} G(T)x_n = y \quad ,$$

$$G(T \star f)x_n = G(f)\, G(T)x_n \quad ,$$

en passant à la limite quand n tend vers l'infini :

$$G(T \star f)x = G(f)y \quad ,$$

quand f tend vers δ suivant $\mathfrak{F}$, le second membre a pour limite y , donc

---

[1] La démonstration est analogue à celle faite dans le cas de $\mathcal{D}'_{L^p}(\underset{\sim}{R}^n)$: Voir L. SCHWARTZ [5], Chapitre VI, théorèmes XXV et XXVI, p. 57 et 59.

$$x \in D(G(T)) \quad \text{et} \quad G(T)x = y \ .$$

- Soient S et T deux distributions de $\mathcal{D}'_{L^1}(\underset{\sim}{R}_+)$. Soit x dans $D(G(T))$. ~~Alors x est dans $D(G(T \star S))$ si, et seulement~~ si, $G(T)x \in D(G(S))$, et on a :

$$G(S \star T) = G(S)\ G(T)x \ .$$

En effet, $G(S \star T \star f)x = G(S \star f)\ G(T)x$. Si l'un des membres a une limite quand f tend vers δ suivant $\mathfrak{F}$, l'autre en a une également, d'où le résultat.

Exemple. - Pour $0 < \alpha < 1$, soit

$$T_\alpha = - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Pf}\left(\frac{1}{t^{1+\alpha}}\right) , \qquad T_0 = \delta \ , \qquad T_1 = - \delta' \ .$$

Si $\alpha + \beta \leqslant 1$, $T_\alpha \star T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.

On pose $(-A)^\alpha = G(T_\alpha)$, car la transformée de Laplace de T_α est égale à z^α , $(-A)^0 = 1$, $(-A)^1 = -A$.

Pour $\alpha + \beta \leqslant 1$, si x est dans $D((-A)^\alpha)$, x est dans $D((-A)^{\alpha+\beta})$ si, et seulement si, $(-A)^\alpha x$ est dans $D((-A)^\beta)$, et on a alors :

$$(-A)^\beta\ (-A)^\alpha\ x = (-A)^{\alpha+\beta}\ x \ .$$

Remarque. - Pour que x soit dans $D((-A)^\alpha)$, il suffit que

$$\int_0^\infty \|P_t\ x - x\| \frac{dt}{t^{1+\alpha}} < \infty \ ,$$

et on a alors

$$(-A)^\alpha\ x = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty (x - P_t\ x) \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \ .$$

III. Générateurs infinitésimaux

1. Fonctions de Bernstein et semi-groupes de mesures sur $\underset{\sim}{R}_+$.

DÉFINITION 3. - Une fonction de Bernstein est une fonction de classe C^∞ sur $]0, \infty[$ qui vérifie

$$F \geqslant 0 \ , \quad F' \geqslant 0 \ , \quad F'' \leqslant 0 \ , \ \dots \ , \quad (-1)^p\ F^{(p)} \leqslant 0 \ , \ \dots \quad (p \geqslant 1) \ .$$

Une telle fonction a une limite en 0 , d'où un prolongement continu de cette fonction à $[0, \infty[$.

(a) Représentation intégrale des fonctions de Bernstein.

PROPOSITION 1. - Soit F une fonction de Bernstein, **il existe deux constantes** positives a et b et une mesure μ positive sur $]0, \infty[$, vérifiant

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t}\,\mu(dt) \quad \text{est fini,}$$

telles que

$$F(u) = a + bu + \int_0^\infty (1 - e^{-tu})\,\mu(dt) \quad .$$

Les constantes a et b et la mesure μ sont uniques.

La fonction F' est complètement monotone, donc d'après le théorème de Bernstein, il existe une mesure positive σ sur $[0, \infty[$ telle que :

$$F'(u) = \int_0^\infty e^{-tu}\,\sigma(dt) \quad \text{pour} \quad u > 0 \quad ,$$

$$F(u) - F(0) = \int_0^u F'(u)\,dv = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-tu}}{t}\,\sigma(dt) \quad ,$$

pour $t \geqslant 1$, $e^{-tu} \leqslant e^{-u}$, donc

$$F(u) - F(0) \geqslant (1 - e^{-u}) \int_1^\infty \frac{\sigma(dt)}{t} \quad ,$$

et $\int_1^\infty \frac{\sigma(dt)}{t}$ est fini.

Soit $a = F(0)$, $b = \sigma(\{0\})$, $\sigma = b\delta + \sigma'$, σ' étant une mesure ne chargeant pas 0.

On pose $\mu = \frac{\sigma'}{t}$, et alors $\int_0^\infty \frac{t}{1+t}\,\mu(dt)$ est fini, et on obtient la représentation de F. D'après le théorème de Bernstein, la mesure σ est unique, la représentation est donc unique.

On peut écrire $F = \mathcal{L}(T)$, où T est la distribution :

$$T = a\delta - b\delta' - \mathrm{Pf.}(\mu) \quad .$$

Exemple. - $F(u) = u^\alpha$, $0 < \alpha < 1$,

$$u^\alpha = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty (1 - e^{-tu})\,\frac{dt}{t^{1+\alpha}} \quad .$$

(b) Fonctions de Bernstein et fonctions complètement monotones.

PROPOSITION 2. - Soit F une fonction de classe C^∞ sur $[0, \infty[$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

F est une fonction de Bernstein,

$F(0) \geqslant 0$ et $\forall\, t \geqslant 0$, e^{-tF} est une fonction complètement monotone.

- Supposons que F soit une fonction de Bernstein ; on a

$$F(0) \geqslant 0 \quad ;$$

et soit $G_t(u) = e^{-tF(u)}$, on a

$$(-1)^p \, G_t^{(p)}(u) \geqslant 0 \quad ,$$

c'est-à-dire que G_t est une fonction complètement monotone (pour le montrer, on pose

$$f(v) = -\, tF(-v) \; , \quad g(v) = e^{f(v)} \; , \quad f \leqslant 0 \;\text{ et, pour }\; p \geqslant 1 \; , \quad f^{(p)} \geqslant 0 \; ,$$

donc $\forall \; p \geqslant 0$, $g^{(p)} \geqslant 0$).

- Supposons maintenant : $F(0) \geqslant 0$ et $\forall \; t \geqslant 0$, e^{-tF} est complètement monotone (C. M.).

Si G est C. M., $G(0) - G$ est une fonction de Bernstein.

Si G est C. M., G se prolonge en une fonction continue pour $\mathrm{Re}(u) \geqslant 0$, holomorphe pour $\mathrm{Re}(u) > 0$;

$$F(u) = \lim_{t \to 0} \frac{1 - e^{-tF(u)}}{t} \quad ,$$

uniformément sur tout compact de $\mathrm{Re}(u) > 0$, et

$$1 - e^{-tF(u)} = (1 - e^{-tF(0)}) + G_t(0) - G_t(u)$$

est une fonction de Bernstein.

DÉFINITION 4. - <u>Un semi-groupe de mesures positives sur</u> $\underset{\sim}{R}_+$ <u>est une famille</u> $\{\mu_t\}_{t \geqslant 0}$ <u>de mesures positives, à support dans</u> $[0 \, , \infty[$, <u>vérifiant</u> :

$\forall \; t \geqslant 0$, $\int d\mu_t \leqslant 1$,

$\forall \; t \geqslant 0$, $\forall \; s \geqslant 0$, $\mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s$, $\mu_0 = \delta$,

<u>Quand</u> t <u>tend vers</u> 0 , <u>la mesure</u> μ_t <u>converge vaguement vers</u> δ .

<u>Remarque</u>. - Quand t tend vers 0 , μ_t converge étroitement vers δ , car si une suite μ_n de mesures positives converge vaguement vers une mesure μ , on a :

$$\int d\mu \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \int d\mu_n \quad .$$

(c) <u>Fonction de Bernstein associée à un semi-groupe de mesures sur</u> $\underset{\sim}{R}_+$.

THÉORÈME 1. - <u>Pour que la famille</u> $\{\mu_t\}_{t \geqslant 0}$ <u>de mesures soit un semi-groupe de mesures sur</u> $\underset{\sim}{R}_+$, <u>il faut et il suffit qu'il existe une fonction de Bernstein</u> F

telle que :

$$\mathcal{L}\mu_t = e^{-tF} \quad .$$

- Soit $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de mesures sur $\underset{\sim}{R}_+$, et soit

$$G_t(u) = \int_0^\infty e^{-su}\, \mu_t(ds) \quad \text{pour} \quad u \geq 0 \quad .$$

Pour u fixé, l'application $t \longmapsto G_t(u)$ est continue en $t = 0$, et vérifie

$$G_t(u)\; G_s(u) = G_{t+s}(u) \quad .$$

Donc, il existe un nombre $F(u)$, tel que

$$G_t(u) = e^{-tF(u)} \quad .$$

La fonction F est de classe C^∞ sur $]0 , \infty[$, et vérifie $F(0) \geq 0$ et $\forall\ t \geq 0$, e^{-tF} est une fonction C. M., donc, d'après la proposition 2, F est une fonction de Bernstein.

- Soit F une fonction de Bernstein, d'après la proposition 2, $\forall\ t \geq 0$, $G_t(u) = e^{-tF(u)}$ est une fonction C. M., et d'après le théorème de Bernstein, il existe une mesure μ_t , positive, à support dans $[0 , \infty[$, telle que

$$G_t(u) = \int_0^\infty e^{-su}\, \mu_t(ds) \quad ,$$

et on a

$$\mu_{t+t'} = \mu_t \star \mu_{t'} \ , \quad \mu_0 = \delta \ , \quad \int d\mu_t = e^{-tF(0)} \leq 1 \quad .$$

Il reste à vérifier que μ_t converge vaguement vers δ quand t tend vers 0 . Soit $g(s) = e^{-su}$ avec $\mathrm{Re}(u) > 0$.

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty g(s)\, \mu_t(ds) = \lim_{t\to\infty} e^{-tF(u)} = 1 = g(0) \quad .$$

Les fonctions $g(s) = e^{-su}$, $\mathrm{Re}(u) > 0$ forment un ensemble total de $C_0(\underset{\sim}{R}_+)$; la famille $\{\mu_t\}$ est un ensemble borné de mesures, donc :

$$\forall\ f \in C_0(\underset{\sim}{R}_+) \ , \quad \lim \int_0^\infty f(s)\, \mu_t(ds) = f(0) \quad .$$

2. Générateur infinitésimal d'un semi-groupe d'opérateurs construit à l'aide d'un d'un semi-groupe de mesures sur $\underset{\sim}{R}_+$.

Soit $\{\mu_t\}$ un semi-groupe de mesures positives sur $\underset{\sim}{R}_+$; soit F la fonction de Bernstein associée, transformée de Laplace d'une distribution T de l'espace $\mathcal{D}'_{L^1}(\underset{\sim}{R}_+)$.

Soit $\{P_s\}$ un semi-groupe fortement continu à contraction sur un espace de Banach E. Posons $Q_t = G(\mu_t)$, où G est la représentation associée au semi-groupe $\{P_s\}$. La famille d'opérateurs Q_t est un semi-groupe fortement continu à contraction sur E.

THÉORÈME 2. - Le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{Q_t\}$ est l'opérateur $(D(G(T)), - G(T))$.

Notations :

$$a_t = \frac{\mu_t - \delta}{t} ,$$

$$b_t = \frac{1}{t} \int_0^t \mu_s \, ds \quad \text{(intégrale vague)},$$

quand t tend vers 0, la mesure b_t tend étroitement vers δ. On a

$$T \star b_t = - a_t$$

(on peut vérifier cette égalité en considérant les transformées de Laplace).

(a) Soit x, élément de $D(G(T))$; soit f une fonction régularisante $(f \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{R}_+}$, $f \geqslant 0$, $\int f(t)\, dt = 1)$,

$$G(a_t)\, G(f)x = - G(b_t)\, G(T \star f)x \quad ,$$

en prenant la limite suivant le filtre $\mathfrak{F}$, on obtient :

$$G(a_t)x = - G(b_t)\, G(T)x \quad ,$$

et quand t tend vers 0, le second membre a pour limite $- G(T)x$, donc x appartient au domaine du générateur infinitésimal $(D(B), B)$ du semi-groupe $\{Q_t\}$, et

$$Bx = - G(T)x \quad .$$

(b) Soit x, élément de $D(B)$,

$$G(f)\, G(a_t)x = - G(T \star f)\, G(b_t)x \quad ,$$

en prenant les limites quand t tend vers 0,

$$G(f)Bx = - G(T \star f)x \quad ,$$

quand f tend vers δ suivant le filtre $\mathfrak{F}$, le premier membre a une limite, Bx, donc x est élément de $D(G(T))$, et

$$Bx = - G(T)x \quad .$$

IV. Puissance fractionnaire d'un noyau de Hunt

Rappelons le théorème fondamental de Hunt :

Soit X un espace localement compact à base dénombrable. Soit V un noyau continu tendant vers 0 à l'infini. Pour que l'image $V(C_K)$ soit dense dans C_0, et que V satisfasse au principe complet du maximum, il faut et il suffit qu'il existe un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens P_t sur C_0, tel que

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t\, f(x)\, dt \ , \quad \forall\, f \in C_K \ , \quad \forall\, x \in X \ ;$$

le semi-groupe P_t associé à V est unique. (Voir HUNT [2]. Voir aussi, sur ce sujet, les exposés de J. DENY [1] et G. LION [3].)

Un tel noyau sera appelé noyau de Hunt.

Soit V un noyau de Hunt, intégrale du semi-groupe $\{P_t\}$. On pose pour $0<\alpha<1$:

$$\forall\, f \in C_K^+ \ , \quad V^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty P_t\, f(x)\, t^{\alpha-1}\, dt \ .$$

PROPOSITION 3. - Le noyau V^α est un noyau de Hunt.

(a) Le noyau V^α est un noyau continu tendant vers 0 à l'infini. - Soit f dans C_K^+,

$$\Gamma(\alpha)\, V^\alpha f(x) = \int_0^1 P_t\, f(x)\, t^{\alpha-1}\, dt + \int_1^\infty P_t\, f(x)\, t^{\alpha-1}\, dt \ .$$

La première intégrale est uniformément convergente en x, c'est donc une fonction de C_0. Pour $t \geqslant 1$, $t^{\alpha-1} \leqslant 1$, donc :

$$\int_1^\infty P_t\, f(x)\, t^{\alpha-1}\, dt \leqslant \int_1^\infty P_t\, f(x)\, dt \leqslant Vf(x) \ .$$

La seconde intégrale tend donc vers 0 quand x tend vers l'infini, et c'est une fonction s. c. i.

$$\int_1^\infty P_t\, f(x)\, dt = \int_1^\infty P_t\, f(x)\, t^{\alpha-1}\, dt + \int_1^\infty P_t\, f(x)(1 - t^{\alpha-1})\, dt \ .$$

Le premier membre est une fonction continue, les deux termes du second membre sont des fonctions s. c. i. et par suite sont continues. Donc V^α est un noyau continu tendant vers 0 à l'infini.

(b) Le noyau V^α est l'intégrale d'un semi-groupe sous-markovien fortement continu sur $C_0(X)$. - La fonction $F(u) = u^\alpha$ est une fonction de Bernstein, il existe donc un semi-groupe de mesures positives μ_t sur $[0, \infty[$, de masses égales à 1 , vaguement continu, tel que

$$e^{-tu^{\alpha}} = \int_0^\infty e^{-su} \mu_t(ds) \;, \quad \forall\, u \geq 0 \;, \quad \forall\, t \geq 0 \;,$$

et on a

$$\frac{1}{(u)^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-su} s^{\alpha-1} \, ds \;, \quad \forall\, u < 0 \;,$$

$$\frac{1}{(u)^{\alpha}} = \int_0^\infty e^{-tu^{\alpha}} \, dt \;, \quad \forall\, u < 0 \;.$$

LEMME. - <u>Soit</u> g <u>une fonction s. c. i. positive sur</u> $[0, \infty[$, <u>alors</u>

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty g(s)\, s^{\alpha-1} \, ds = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty g(s)\, \mu_t(ds)\right] dt \;.$$

Pour toute fonction g de $C_K(\underset{\sim}{R}_+)$,

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty g(s)\, \mu_t(ds)\right] dt$$

est définie, car il existe $k > 0$, et $u > 0$, tels que $|g(s)| \leq k e^{-su}$, et cette forme linéaire sur $C_K(\underset{\sim}{R}_+)$ définit une mesure positive ν sur $[0, \infty[$ dont la transformée de Laplace est $\frac{1}{u^{\alpha}}$, donc

$$\nu(ds) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1} \, ds \;.$$

Soit g une fonction s. c. i. positive sur $\underset{\sim}{R}_+$; il existe une suite croissante g_n de fonctions de $C_K(\underset{\sim}{R}_+)$ convergeant vers g , et, pour tout n ,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty g_n(s)\, s^{\alpha-1} \, ds = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty g_n(s)\, \mu_t(ds)\right] dt \;;$$

en appliquant le théorème de la convergence monotone de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n(s)\, \mu_t(ds) = \int_0^\infty g(s)\, \mu_t(ds) \;,$$

et par une deuxième application de ce théorème,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty g(s)\, s^{\alpha-1} \, ds = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty g(s)\, \mu_t(ds)\right] dt \;.$$

Soit $Q_t = G(\mu_t)$, où G est la représentation associée du semi-groupe P_t . La famille $\{Q_t\}$ est un semi-groupe sous-markovien fortement continu sur $C_0(X)$. La fonction $g(s) = P_s f(x)$, pour f dans $C_0^+(X)$, est continue positive et, d'après le lemme,

$$V^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} P_s f(x) s^{\alpha-1} ds = \int_0^{\infty} [\int_0^{\infty} P_s f(x) \mu_t(ds)] dt ,$$

le crochet est égal à $Q_t f(x)$,

$$V^{\alpha} f(x) = \int_0^{\infty} Q_t f(x) dt ,$$

le noyau V^{α} est donc l'intégrale du semi-groupe $\{Q_t\}$.

Domaine positif d'un noyau. - Soit V un noyau continu tendant vers 0 à l'infini ; on appelle domaine positif de V :

$$D^+(V) = \{f \in C_0^+ , \ Vf(x) < \infty , \ \forall x , \text{ et } Vf \in C_0\} ,$$

$D^+(V)$ contient $C_K^+(X)$.

Soit V un noyau de Hunt, on a défini V^{α} pour $0 < \alpha < 1$, on pose :

$$V^1 = V \text{ et } V^0 = 1 .$$

Soient α et β tels que $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, on a alors

$$D^+(V^{\beta}) \subset D^+(V^{\alpha}) .$$

En effet, pour $t \geqslant 1$, $t^{\alpha-1} \leqslant t^{\beta-1}$, et la démonstration se fait comme dans la partie (a) de la proposition.

Supposons de plus $\alpha + \beta \leqslant 1$ et f dans $D^+(V^{\alpha+\beta})$, alors f est dans $D^+(V^{\alpha})$ d'après ce qui précède, et on a

$$V^{\alpha} f \in D^+(V^{\beta}) , \quad V^{\beta}(V^{\alpha} f) = V^{\alpha+\beta} f .$$

En effet, par hypothèse, $V^{\alpha+\beta} f$ est dans $C_0(X)$,

$$V^{\alpha+\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^{\infty} P_t f(x) t^{\alpha+\beta-1} dt .$$

Le résultat annoncé résulte de calculs classiques sur les fonctions eulériennes.

Remarque. - Soit V un noyau de Hunt, intégrale du semi-groupe $\{P_t\}$; le générateur infinitésimal A du semi-groupe $\{P_t\}$ est injectif ; soit $R_0 = - A^{-1}$, c'est un opérateur fermé (en général non borné) qui prolonge V , et on a

$$D^+(V) = D(R_0) \cap C_0^+ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] DENY (Jacques). - Eléments de théorie du potentiel par rapport à un noyau de Hunt, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 5e année, 1960/61, n° 8, 8 p.

[2] HUNT (G. A.). - Markoff processes and potentials, Illinois J. of Math., t. 1, 1957, p. 44-93 et 316-369 ; t. 2, 1958, p. 151-213.

[3] LION (Georges). - Construction du semi-groupe associé à un noyau de Hunt, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 5e année, 1960/61, n° 7, 9 p.

[4] PHILIPPS (R. S.). - On the generation of semigroups of linear operators, Pacific J. of Math., t. 2, 1952, p. 343-369.

[5] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, Tome 2. - Paris, Hermann, 1951 (Act. scient. et ind., 1122 ; Bourbaki, 10).

[6] SCHWARTZ (Laurent). - Lectures on mixed problems in partial differential equations and representations of semigroups. - Bombay, Tata Institute, 1958 (Tata Institute of fundamental Research. Lectures on Mathematics, 11).