Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Pierre Priouret

Construction de semi-groupes de Feller sur une variété à bord et étude des processus de Markov associés

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 10, n° 2 (1965-1966), exp. n° 6, p. 1-35

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1965-1966__10_2_A2_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
10e année, 1965/66, n° 6

16 juin 1966

CONSTRUCTION DE SEMI-GROUPES DE FELLER SUR UNE VARIÉTÉ À BORD ET ÉTUDE DES PROCESSUS DE MARKOV ASSOCIÉS

par Pierre PRIOURET

Introduction

Les notations et les définitions sont celles des exposés 3 et 4 de ce séminaire [1].

M désigne une variété à bord compacte de classe C^∞, de dimension n.

W désigne un opérateur de Waldenfels sur M, possédant les propriétés suivantes:

$$W = P + S$$

où, P est un opérateur de diffusion elliptique à coefficients $C^{0,\lambda}$ $(0 < \lambda < 1)$.

S un opérateur intégral singulier de Levy de noyau $s(x, dy)$ qui applique continûment $C^2(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M)$.

H_β et G_β^0 $(\beta > 0)$ désignent les opérateurs de Dirichlet et de Green associés à W (exp. 4, § I). De plus, H_0 et G_0^0 existent si W satisfait :

(A) Sur chaque composante connexe C de M, telle que $\partial M \cap C = \emptyset$, $W1 \not\equiv 0$.

Γ désigne un opérateur frontière de Ventcel', défini pour tout $u \in C^2(M)$, $x' \in \partial M$ par :

$$\Gamma u(x') = \alpha(x') \frac{\partial u}{\partial \nu}(x') + Q(\gamma^0 u)(x') + Tu(x') \quad \text{(voir exp. 4, § II, 1)}$$

où ν est un champ de vecteurs strictement dirigés vers l'intérieur, Q un opérateur de diffusion sur ∂M ($\gamma^0 u$ désignant la restriction de u à ∂M), T un opérateur frontière intégral de noyau $t(x', dy)$.

L désigne l'opérateur :

$$Lu(x') = \Gamma u(x') - \delta(x').Wu(x') \qquad (u \in C^2(M)\ ,\ x' \in \partial M)\ ,\ \delta \geqslant 0)\ .$$

On suppose que Γ envoie $C^2(M)$ dans $C(\partial M)$ et que δ est continue.

---

[1] Dans toute la suite, les références (exp. 3, th. I), (exp. 4, § I), etc. renvoient aux exposés 3, 4, etc. de ce même séminaire [8].

Γ est dit faiblement transversal si, pour tout $x' \in \partial M$:

$$\alpha(x') + \Gamma 1(x') + t(x' , \overset{\circ}{M}) > 0 \quad .$$

L est dit faiblement transversal si, pour tout $x' \in \partial M$:

$$\alpha(x') + \Gamma 1(x') + t(x' , \overset{\circ}{M}) + \delta(x') > 0 \quad .$$

L est dit transversal si, pour tout $x' \in \partial M$:

$$\alpha(x') + \delta(x') = 0 \quad \text{implique} \quad t(x' , \overset{\circ}{M}) = + \infty \quad .$$

Enfin on utilisera les propriétés de régularité suivantes pour L :

(El.1) δ , $\alpha \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ et $\alpha(x') > 0$ pour tout $x' \in \partial M$;

$Q(\gamma^0 u)(x') = \dfrac{\partial u}{\partial \tau}(x')$ où τ est un champ de vecteurs tangents à ∂M de classe $C^{1,\lambda}$;

T applique continûment $C^2(M)$ dans $C^{1,\lambda}(\partial M)$.

(El.2) α , $\delta \in C^{0,\lambda}(\partial M)$;

Q est elliptique à coefficients $C^{0,\lambda}$;

T applique continûment $C^2(M)$ dans $C^{0,\lambda}(\partial M)$.

Dans une première partie, on montre que, si L est transversal et satisfait (El.1) ou (El.2), LH_β est le générateur d'un semi-groupe de Feller sur $C(\partial M)$ et que la restriction de W à l'ensemble $\{u \mid u \in C^2(M) , Lu = 0\}$ est le générateur d'un semi-groupe de Feller sur $C(M)$ ([2]). Pour ce faire, on étend au cas intégro-différentiel, considéré ici, la méthode introduite par SATO et UENO dans [6] en utilisant les propriétés des opérateurs H_β et G_β^0 établies dans l'exposé 4, § I.

Dans une deuxième partie, on donne, dans certains cas, une interprétation stochastique de la condition frontière L à l'aide du processus de Markov associé au semi-groupe construit dans la première partie. Cette interprétation se trouve dans [6] pour un processus de réflexion pure $(W = P , L = \frac{\partial}{\partial \nu})$, et est basée sur l'existence, dans le cas considéré, d'une solution fondamentale ayant de bonnes propriétés. La situation étudiée ici sera exposée au paragraphe 2.4. C'est, essentiellement, celle où il existe une "bonne" fonction de Green pour le problème frontière $(\beta - W)u = f$, $- Lu = \varphi$, f et φ fonctions données, sur M et ∂M respectivement (à ce sujet, voir l'exposé 5).

([2]) Cette première partie développe la fin de la note [1].

Première partie.

1.1. Opérateur LH_β .

On rappelle que H_β envoie $C^{2,\lambda}(\partial M)$ dans $C^{2,\lambda}(M)$ (exp. 4, th. 1). LH_β désigne donc l'opérateur de $C^{2,\lambda}(\partial M)$ dans $C(\partial M)$ composé de H_β et L :

$LH_\beta(\varphi) = L(H_\beta\, \varphi)$ pour $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$ $(\beta > 0\ ;\ \beta \geqslant 0$ si W satisfait à (A)).

PROPOSITION 1. - LH_β satisfait au principe du maximum positif $(\beta > 0$; $\beta \geqslant 0$ si W satisfait à (A)).

Supposons, en effet, que $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$ atteigne en $x' \in \partial M$ un maximum $\geqslant 0$. On a,

$$\frac{\partial H_\beta\, \varphi}{\partial \nu}(x') \leqslant 0 \qquad \text{(exp. 4, § I, prop. 2) ;}$$

$$Q(\gamma^0\, H_\beta\, \varphi)(x') = Q_\varphi(x') \leqslant 0 \qquad \text{(puisque } Q \text{ est elliptique) ;}$$

$$\begin{aligned} TH_\beta\, \varphi(x') &= \eta(x')\, \varphi(x') + \int_M t(x'\, ,\, dy)[H_\beta\, \varphi(y) - \sigma(x'\, ,\, y)\, \varphi(x')] \\ &= \int_M t(x'\, ,\, dy)[H_\beta\, \varphi(y) - \varphi(x')] + \eta(x')\, \varphi(x') \\ &\qquad + \int_M t(x'\, ,\, dy)[1 - \sigma(x'\, ,\, y)].\varphi(x') \leqslant 0\ , \end{aligned}$$

car, pour $y \in M$, $H_\beta\, \varphi(y) \leqslant \varphi(x')$ (exp. 4, § I, prop. 2) ;

$$WH_\beta\, \varphi(x') = \beta H_\beta\, \varphi(x') = \beta\varphi(x') \geqslant 0 \quad .$$

D'où, finalement, $LH_\beta\, \varphi(x') = \Gamma H_\beta\, \varphi(x') - \delta(x').WH_\beta\, \varphi(x') \leqslant 0$. LH_β , satisfaisant au principe du maximum positif, est donc préfermé (appendice 3). Soit $\overline{LH_\beta}$ sa fermeture.

THÉORÈME 1. - On suppose que L est faiblement transversal et qu'il satisfait soit à (E1.1), soit à (E1.2). Alors $\overline{LH_\beta}$ $(\beta > 0$; $\beta \geqslant 0$ si W satisfait à (A)) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur $C(\partial M)$.

Si de plus on a, soit

(i) : $\beta > 0$ soit

(ii) : $\beta = 0$, Γ faiblement transversal et, dans chaque composante connexe de M , l'une des fonctions $W1$ et $\Gamma 1$ (sur le bord) n'est pas identiquement nulle,

le semi-groupe est intégrable (au sens de exp. 3, appendice, § A-2).

Compte tenu de $\mathcal{D}(LH_\beta) = C^{2,\lambda}(M)$, donc dense dans $C(M)$, et de la proposition 1, il suffit, pour pouvoir appliquer le théorème de Hille-Yosida-Ray (voir exp. 3, Appendice), de vérifier que $(\rho - LH_\beta)(C^{2,\lambda}(\partial M))$ est dense dans $C(\partial M)$ pour $\rho > 0$. Le semi-groupe est intégrable si cette propriété est encore vraie pour $\rho = 0$ (exp. 3, Appendice). C'est exactement ce qu'affirment le corollaire du théorème 3' de l'exposé 4 dans le cas (El.1), le théorème 3 de l'exposé 4 dans le cas (El.2), appliqués à l'opérateur $\rho - L$.

Notations. - On notera $(S_{\beta,t})_{t\geq 0}$ le semi-groupe de générateur $\overline{LH_\beta}$, $(K_{\beta,\rho})_{\rho>0}$ sa famille de résolvantes, $K_{\beta,0}$ (ou K_β) le noyau potentiel s'il existe.

On a donc

$$(\rho - \overline{LH_\beta})K_{\beta,\rho}\,\varphi = \varphi \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in C(\partial M)$$

d'où le corollaire suivant.

COROLLAIRE.

(j) Sous l'hypothèse (El.1) : $K_{\beta,\rho}(C^{1,\lambda}(\partial M)) = C^{2,\lambda}(\partial M)$.

(jj) Sous l'hypothèse (El.2) : $K_{\beta,\rho}(C^{0,\lambda}(\partial M)) = C^{2,\lambda}(\partial M)$.

Ces formules sont valables pour $\rho \geq 0$, $\beta > 0$ dans le cas général ; pour $\rho > 0$, $\beta = 0$ si W satisfait à (A), pour $\beta = 0$, $\rho = 0$ si (ii) est satisfait.

1.2. Opérateur LG^0_β .

On rappelle que G^0_β envoie $C^{0,\lambda}(M)$ dans $C^{2,\lambda}(M)$ (exp. 4, th. 1). LG^0_β désigne donc l'opérateur de $C^{0,\lambda}(M)$ dans $C(\partial M)$ composé de G^0_β et de L ,

$$LG^0_\beta(u) = L(G^0_\beta u) \ , \quad u \in C^{0,\lambda}(M) \qquad (\beta > 0 \ ; \ \beta \geq 0 \ \text{si} \ W \ \text{satisfait à (A)}).$$

LEMME. - Si $u \in C^{0,\lambda}(M)$ est ≥ 0 , alors $LG^0_\beta u$ est ≥ 0 ($\beta > 0$; $\beta \geq 0$ si W satisfait à (A)).

$$LG^0_\beta\, u(x') = \alpha(x') \frac{\partial}{\partial \nu} G^0_\beta\, u(x') + \int_M t(x', dy)\, G^0_\beta\, u(y) + \delta(x').u(x') \geq 0 \ ,$$

car $G^0_\beta u \geq 0$ et $\gamma^0\, G^0_\beta\, u = 0$.

Comme $LG^0_\beta 1$ est continu, donc borné sur M , LG^0_β est continu sur $C^{0,\lambda}(M)$ pour la norme uniforme, donc se prolonge en un opérateur continu de $C(M)$ dans $C(\partial M)$ qu'on notera $\overline{LG^0_\beta}$.

1.3. Quelques propriétés des opérateurs H_β et G^0_β.

(1) $\|G^0_\beta\| \leq \frac{1}{\beta}$, $\beta > 0$.

(2) Pour $u \in C(M)$ telle que $\gamma^0 u = 0$, $\|\beta G^0_\beta u - u\| \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} 0$.

(3) Pour $u \in C(M)$, $x \in \mathring{M}$, $\beta G^0_\beta u(x) - u(x) \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} 0$.

Ces trois propriétés résultent du fait que $(G^0_\beta)_{\beta>0}$ est la famille des résolvantes d'un semi-groupe de Feller sur $C_0(\mathring{M})$.

(4) Pour $\varphi \in C(\partial D)$,

$H_\beta \varphi - H_{\beta'} \varphi + (\beta - \beta')G^0_\beta H_{\beta'} \varphi = 0$ ($\beta , \beta' > 0$; $\beta , \beta' \geq 0$ si W satisfait à (A)).

Remarquons d'abord que, H_β et G^0_β étant continus, il suffit de montrer (4) pour $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$.

Posons, pour $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$,

$$U_\varphi = H_\beta \varphi - H_{\beta'} \varphi + (\beta - \beta')G^0_\beta H_{\beta'} \varphi \; ; \quad U_\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M) \quad ,$$

et on a :

$$(\beta - W)U_\varphi = 0 \ , \quad \gamma^0 U_\varphi = 0 \quad .$$

Il en résulte $U_\varphi = 0$ (exp. 4, th. 1).

(5) Pour $\varphi \in C(\partial M)$, $\beta \leq \beta'$ entraîne $H_\beta \varphi \geq H_{\beta'} \varphi$. Ceci résulte de (4).

(6) Pour $\varphi \in C(\partial M)$, $x \in \mathring{M}$, $\lim\limits_{\beta\to+\infty} H_\beta \varphi(x) = 0$.

β' étant fixé, on fait tendre β vers $+\infty$ dans (4) ; d'après (3),

$$(\beta - \beta')G^0_\beta H_{\beta'} \varphi(x) \rightarrow H_{\beta'} \varphi(x) \quad ,$$

ce qui donne le résultat.

(7) Lorsque β croît vers $+\infty$, $\frac{\partial}{\partial\nu} H_\beta 1$ décroît uniformément vers $-\infty$.

Remarquons d'abord que, d'après (5), lorsque β croît, $\frac{\partial}{\partial\nu} H_\beta 1$ décroît. Soit K un nombre > 0 , il existe une fonction $u \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $\gamma^0 u = 1$, $u \geq \frac{1}{2}$, $\frac{\partial u}{\partial\nu} \leq -K$, et l'on a :

$$(W - \beta)(H_\beta 1 - u) = \beta u - Wu \geq \frac{\beta}{2} - \|Wu\| \geq 0 \quad \text{si} \quad \beta \geq 2\|Wu\| \quad .$$

Comme $\gamma^0(H_\beta 1 - u) = 0$, on a donc, pour β assez grand, $H_\beta 1 \leq u$ (exp. 4, § I, prop. 2), et par conséquence $\frac{\partial}{\partial\nu} H_\beta 1 \leq \frac{\partial}{\partial\nu} u \leq -K$.

(8) Pour $u \in C(M)$, $\|\beta G^0_\beta u + H_\beta(\gamma^0 u) - u\| \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} 0$.

On fixe $\beta' > 0$, et on pose $v = u - H_{\beta'}(\gamma^0 u)$. On a :

$$\beta G^0_\beta v - v = \beta G^0_\beta u - \beta G^0_\beta H_{\beta'}(\gamma^0 u) - u + H_{\beta'}(\gamma^0 u)$$

$$= (\beta G^0_\beta u + H_\beta(\gamma^0 u) - u) - \beta' G^0_\beta H_{\beta'} \gamma^0 u \quad \text{(compte tenu de (4))}.$$

Mais, d'une part

$$\|\beta' G^0_\beta H_{\beta'} \gamma^0 u\| \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} 0 \text{ , car } \|G^0_\beta\| \leqslant \frac{1}{\beta} \text{ ,}$$

et, d'autre part

$$\|\beta G^0_\beta v - v\| \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} 0 \text{ , car } \gamma^0 v = 0 \text{ .}$$

On a donc (8).

1.4. Opérateur W_L .

On pose $\mathcal{D}_{W_L} = \{u \; ; \; u \in C^2(M) \; , \; Lu = 0\}$, et on appelle W_L la restriction de W à $\mathcal{D}_{W_L}$. $W_L = (\mathcal{D}_{W_L} , W)$ (3).

W étant préfermé (en effet, son domaine est dense dans $C(M)$, et, d'après la proposition 1 de l'exposé 4, si u atteint un maximum positif en un point intérieur $x \in \mathring{M}$, on a $Wu(x) \leqslant 0$, donc il est préfermé (voir Appendice 3)), W_L est également préfermé.

Si on suppose L faiblement transversal, il résulte de la proposition 5 de l'exposé 4 que W_L satisfait au principe du maximum faible.

On notera $\overline{W_L}$ la fermeture (dans $C(M)$) de W_L .

THÉORÈME 2. - On suppose que L est transversal, et qu'il satisfait soit (El.1), soit (El.2). Alors $\overline{W_L}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller. De plus le semi-groupe est intégrable si l'on a :

(9) Γ est faiblement transversal, et sur chaque composante connexe de M , une des deux fonctions $W1$ et $\Gamma 1$ (sur le bord) n'est pas identiquement nulle.

On va appliquer le théorème de Hille-Yosida-Ray (voir exp. 3, Appendice). D'abord L étant transversal, d'après la remarque ci-dessus, W_L satisfait au principe du maximum faible.

D'autre part, il y a existence et unicité de la solution de

---

(3) Remarquer que, lorsque $\delta \equiv 0$, $\mathcal{D}_{W_L}$ est indépendant de W .

$$(10)\quad \begin{cases} (\beta - W)u = f \ , \text{ pour } f \in C^{1,\lambda}(M) \quad (f \in C^{0,\lambda}(M) \text{ si (El.2)}), \\ Lu = 0 \end{cases}$$

(ce résultat étant encore valable pour $\beta = 0$ sous l'hypothèse (9)) d'après l'exposé 4 (théorème 3 et corollaire du théorème 3').

Ceci montre en particulier que $(\beta - W)(\mathcal{D}_{W_L})$ est dense dans $C(M)$ pour $\beta > 0$, et, sous l'hypothèse (9), pour $\beta \geqslant 0$.

Il reste donc à démontrer que $\mathcal{D}_{W_L}$ est dense dans $C(M)$. Rappelons d'abord une propriété établie dans l'exposé 4, § II, 5 ; si on appelle $G_\beta f$ la solution de (10), $G_\beta f \in C^{2,\lambda}(M)$, et on a la relation

$$(11)\qquad G_\beta f = G_\beta^0 f + H_\beta K_\beta LG_\beta^0 f \quad (f \in C^{1,\lambda}(M) \text{ , resp. } C^{0,\lambda}(M)) \ ,$$

où $K_\beta = -(\overline{LH_\beta})^{-1}$ est l'opérateur introduit au § 1.3.

Pour démontrer que $\mathcal{D}_{W_L}$ est dense, on va établir que $\beta G_\beta f$, qui est dans $\mathcal{D}_{W_L}$, converge vers f pour la norme uniforme lorsque β tend vers $+\infty$, pour un ensemble dense de f, en l'occurence $f \in C^{2,\lambda}(M)$.

On va d'abord établir deux lemmes dus à SATO et UENO [6].

LEMME 1. - Si L est transversal, $\|K_\beta\| \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} 0$.

En effet, on a, pour $x' \in \partial M$,

$$\begin{aligned} LH_\beta 1(x') &= \alpha(x') \frac{\partial}{\partial\nu} H_\beta 1(x') + TH_\beta 1(x') - \delta(x').WH_\beta 1(x') \\ &= \alpha(x') \frac{\partial}{\partial\nu} H_\beta 1(x') - \beta\delta(x') + \eta(x') + \int_M t(x', dy)[H_\beta 1(y) - 1] \\ &\qquad + \int_M t(x', dy)(1 - \theta^*_{x'} 1(y)) \ , \end{aligned}$$

(car $\theta^*_{x'} u$ ne dépend que de $\gamma^0 u$, donc $\theta^*_{x'} H_\beta 1 = \theta^*_{x'} 1$).

Il résulte donc de (5) et (7) (§ 1.3) que $LH_\beta 1$ décroît lorsque β croît ; de plus, si L est transversal, $LH_\beta 1(x')$ tend vers $-\infty$ pour $\beta \to +\infty$, car $LH_\beta 1$ est somme de termes décroissants dont l'un au moins tend vers $-\infty$ (si $\alpha(x') = \delta(x') = 0$, on a $t(x', \mathring{M}) = +\infty$, et donc

$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_M t(x', dy)(H_\beta 1(y) - 1) = +\infty$$

d'après (6), § 1.3).

Ainsi $LH_\beta 1$ décroît vers $-\infty$, donc (théorème de Dini) $\|LH_\beta 1\| \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} +\infty$;

donc

$$\|K_\beta\| = \|K_\beta\, 1\| \leqslant \frac{1}{\|LH_\beta\, 1\|} K_\beta(-\, LH_\beta\, 1) = \frac{1}{\|LH_\beta\, 1\|} \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} 0 \ .$$

LEMME 2. - On se place sous les hypothèses du théorème 1 ; alors,

si $\|K_\beta\| \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} 0$, $\beta K_\beta\, LG_\beta^0\, f \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \gamma^0\, f \qquad (f \in C^{0,\lambda}(M))$.

On fixe β' . Il existe $g \in C^{0,\lambda}(M)$ telle que $f - H_{\beta'}(\gamma^0\, f) = G_{\beta'}^0\, g$, et on a

$$\begin{aligned} G_\beta^0\, f &= G_\beta^0\, G_{\beta'}^0\, g + G_\beta^0\, H_{\beta'}(\gamma^0\, f) \\ &= \frac{1}{\beta - \beta'} (G_{\beta'}^0\, g - G_\beta^0\, g + H_{\beta'}(\gamma^0\, f) - H_\beta(\gamma^0\, f)) \end{aligned}$$

(ceci, d'après l'équation (4), § 1.3, et l'équation résolvante vérifiée par (G_β^0)).

On a donc :

$$\begin{aligned} \|\beta K_\beta\, LG_\beta^0\, f - \gamma^0\, f\| &= \left\|\frac{\beta}{\beta - \beta'} K_\beta\, L(G_{\beta'}^0\, g - G_\beta^0\, g + H_{\beta'}(\gamma^0\, f) - H_\beta(\gamma^0\, f)) - \gamma^0\, f\right\| \\ &\leqslant \left\|\frac{\beta}{\beta - \beta'} K_\beta\, L(G_{\beta'}^0\, g - G_\beta^0\, g + H_{\beta'}(\gamma^0\, f)) + \frac{\beta}{\beta - \beta'}\gamma^0\, f - \gamma^0\, f\right\| \ . \end{aligned}$$

Mais $LG_\beta^0\, 1 = LG_{\beta'}^0\, 1 - (\beta - \beta')\, LG_\beta^0\, G_{\beta'}^0\, 1 \leqslant LG_{\beta'}^0 1$ si $\beta \geqslant \beta'$, car (lemme § 1.3), $LG_{\beta'}^0$ est un opérateur positif, d'où :

$$\|\beta K_\beta\, LG_\beta^0\, f - \gamma^0\, f\| \leqslant \frac{\beta}{\beta - \beta'} \|K_\beta\|(2\|LG_{\beta'}^0\|\|g\| + \|H_{\beta'}(\gamma^0\, f)\|) + \left\|\frac{\beta}{\beta - \beta'}\gamma^0\, f - \gamma^0\, f\right\| ,$$

donc, si on suppose $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \|K_\beta\| = 0$, on a

$$\lim_{\beta\to+\infty} \|\beta K_\beta\, LG_\beta^0\, f - \gamma^0\, f\| = 0 \ .$$

C. Q. F. D.

Soit maintenant $f \in C^{2,\lambda}(M)$, alors :

$$\begin{aligned} \|\beta G_\beta\, f - f\| &= \|\beta G_\beta^0\, f + \beta H_\beta\, K_\beta\, LG_\beta^0\, f - f\| \qquad \text{(relation (11))} \\ &\leqslant \|\beta G_\beta^0\, f + H_\beta(\gamma^0\, f) - f\| + \|H_\beta\|\cdot\|\beta K_\beta\, LG_\beta^0\, f - \gamma^0\, f\| \ . \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 , d'après (8), § 1.3, et, sous les hypothèses faites, on a (lemme 1) $\|K_\beta\|$ tend vers 0 , et donc, puisque $\|H_\beta\| = 1$, le deuxième terme tend vers 0 d'après le lemme 2. Donc $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \|\beta G_\beta\, f - f\| = 0$, ce qui démontre le théorème 2.

Notations. - On notera $(T_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de générateur $\overline{W_L}$, et, conformément à la notation déjà introduite, $(G_\beta)_{\beta>0}$ sa famille de résolvantes.

De la résolution du système (10), on déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - Sous l'hypothèse (E1.1),

$$\text{si} \quad \delta \equiv 0 : \quad G_\beta(C^{0,\lambda}(M)) = C^{2,\lambda}(M) \cap \mathcal{D}_{W_L}$$

$$\text{si} \quad \delta \not\equiv 0 : \quad G_\beta(C^{1,\lambda}(M)) \subset C^{2,\lambda}(M) \cap \mathcal{D}_{W_L} \subset G_\beta(C^{0,\lambda}(M)) \quad .$$

Sous l'hypothèse (E1.2),

$$G_\beta(C^{0,\lambda}(M)) = C^{2,\lambda}(M) \cap \mathcal{D}_{W_L} \quad .$$

Ces formules sont encore valables pour $\beta = 0$ si (9) est vérifiée.

De plus, de l'équation (11), on déduit, les opérateurs G_β^0 , H_β , K_β , LH_β (lemme du § 1.3) étant positifs, le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. - Pour $f \in C(M)$, on a $G_\beta f = G_\beta^0 f + H_\beta K_\beta \overline{LG_\beta^0} f$.

Remarque. - On peut se demander si la condition " L est faiblement transversal", qui assure que LH_β est un générateur (avec (E1.1) ou (E1.2)), n'entraîne pas que W_L est un générateur. Il n'en est rien, et une condition plus forte, du genre L est transversal, est nécessaire.

En effet, soit $Lu = Q(\gamma^0 u) + Tu$, où Q et T sont très réguliers, mais où le noyau $t(x' , dy)$ associé à T satisfait $0 < t(x' , \mathring{M}) \leqslant K$ pour tout $x' \in \partial M$ (K étant une certaine constante finie).

L satisfait à (E1.2), et est faiblement transversal, donc LH_β est un générateur, soit $-K_\beta$ son inverse, et $G_\beta = G_\beta^0 + H_\beta K_\beta LG_\beta^0$; $G_\beta f$ est la solution de $(\beta - W)u = f$, $Lu = 0$, donc, si W_L est le générateur d'un semi-groupe de Feller sur $C(M)$, G_β est sa résolvante, et on a $\beta G_\beta f \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} f$.

Mais, d'une part, on a (voir [6], remarque 5.2), en posant $\varphi = K_{\beta'}1$, β' fixé :

$$(12) \qquad \beta K_\beta \, LG_\beta^0 \, H_{\beta'} \varphi = \frac{\beta}{\beta - \beta'} K_\beta(LH_{\beta'} \varphi - LH_\beta \varphi) \qquad \text{(d'après (4), § 1.3)}$$

$$= \frac{\beta}{\beta - \beta'} K_\beta(LH_{\beta'})K_{\beta'} 1 + \frac{\beta}{\beta - \beta'} \varphi$$

$$= - \frac{\beta}{\beta - \beta'} K_\beta 1 + \frac{\beta}{\beta - \beta'} \varphi \quad .$$

Comme $\beta G_\beta H_{\beta'} \varphi \to H_{\beta'} \varphi$ lorsque $\beta \to +\infty$, on a (restriction à ∂M),

$$\beta K_\beta \, L G^0_\beta \, H_{\beta'} \varphi \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \varphi \ ;$$

ce qui implique (comme $\frac{1}{\beta - \beta'} \to 1$) d'après (12), $K_\beta 1 \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} 0$, donc $\lim_{\beta\to+\infty} \|K_\beta\| = 0$.

D'autre part,

$$LH_\beta 1(x') = L1(x') + \int_M t(x', dy)[H_\beta 1(y) - 1] + \int_M t(x', dy)(1 - \theta^*_{x'} 1(y)) ,$$

d'où

$$|LH_\beta 1(x')| \leqslant \|L1\| + K + K' = K'' .$$

On en déduit,

(13) $$\|K_\beta\| = \|K_\beta 1\| \geqslant K_\beta\left(\frac{-1}{\|LH_\beta 1\|} LH_\beta 1\right) = \frac{1}{\|LH_\beta 1\|} \geqslant \frac{1}{K''} .$$

Donc W_L n'est pas le générateur d'un semi-groupe de Feller.

Dans l'appendice 1, on donnera un résultat sur les fonctions qui sont dans $\mathcal{D}_{W_L}$, essentiellement que toute fonction régulière sur M coïncide sur tout compact de $\mathring{M}$ avec une fonction du domaine qui est de norme uniforme sur M peu différente.

Deuxième partie.

2.1. Processus de Markov et semi-groupe de Feller.

Soit E un espace compact à base dénombrable (resp. un espace localement compact non compact, à base dénombrable). On note E_δ le compact $E \cup (\partial)$ où $\{\partial\}$ est un point isolé (resp. le compactifié d'Aleksandrov de E), $\mathcal{B}_{E_\delta}$ la tribu borélienne de E_δ, $B(E_\delta)$ l'espace des fonctions boréliennes bornées sur E_δ nulles au point δ, $C(E_\delta)$ les fonctions de $B(E_\delta)$ continues sur E.

Par processus de Markov sur E, on entend un terme

$$X = (\Omega , F , (X_t)_{t\geqslant 0} , (\theta_t)_{t\geqslant 0} , (P_x)_{x\in E_\delta}) \quad (4)$$

---

(4) (Ω , F) : espace mesurable.
X_t : application mesurable de (Ω , F) dans $(E_\delta , \mathcal{B}_{E_\delta})$.
θ_t : application de Ω dans Ω telle que $X_h \circ \theta_t = X_{t+h}$ pour tout $h \geqslant 0$.
(P_x) : famille de mesures sur (Ω , F) telle que $x \to P_x(A)$ soit $\mathcal{B}_{E_\delta}$-mesurable pour tout $A \in F_\infty = \mathcal{B}(X_s , 0 \leqslant s < +\infty)$.

à valeurs dans l'espace mesurable $(E , \mathcal{B}_{E_\delta})$, **ayant ses trajectoires continues à** droite, pourvues de limites à gauche et absorbées par le point δ ([5]), et fortement markovien par rapport à la famille (F_t^*) de ses tribus définitives (voir [7], exp. 3 et 5, et [2], chap. 3).

$P_t(x , \Gamma) = P_x \ (X_t \in \Gamma)$, où $\Gamma \in \mathcal{B}_{E_\delta}$, s'appelle la fonction de transition du processus, c'est un noyau sous-markovien.

L'application $t \to \int P_t(x , dy) f(y)$ est continue à droite pour toute $f \in C(E_\delta)$ d'après la continuité à droite des trajectoires.

Deux processus de Markov sur E , ayant même fonction de transition, sont dits équivalents.

On appelle temps d'arrêt de processus X un temps d'arrêt de la famille (F_t^*) .

Si $\Gamma \subset E$, on désigne par σ_Γ le temps de sortie de Γ pour le processus X :

$$\sigma_\Gamma(\omega) = \inf\{t \ ; \ 0 \leqslant t \leqslant +\infty \ , \ X_t(\omega) \notin \Gamma\} \quad ([6]).$$

Si $\Gamma \in \mathcal{B}_E$, σ_Γ est un temps d'arrêt de X ; si Γ est ouvert, $X_{\sigma_\Gamma(\omega)}(\omega) \notin \Gamma$ (voir [7], exp. 5).

$\zeta(\omega) = \sigma_E(\omega)$ s'appelle <u>la durée de vie</u> du processus.

On dira qu'un évènement $A \in F_\infty^*$ a lieu presque sûrement (p. s.) si, pour tout $x \in E_\delta$, on a $P_x(A) = 1$.

Enfin, si Φ est une application mesurable de (Ω , F) dans $(\underset{\sim}{R} , \mathcal{B}_{\underset{\sim}{R}})$, on notera $E_x(\Phi)$ pour $\int \Phi(\omega) \ P_x(d\omega)$.

Si $(T_t)_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe de Feller sur $C(E)$ (resp. $C_0(E)$), il existe un, et un seul, (à une équivalence près) processus de Markov X sur E tel que l'on ait, pour toute $f \in C(E)$ (resp. $C_0(E)$) et tout $x \in E$:

$$T_t \ f(x) = \int f(y) \ P_t(x , dy) = E_x(f(X_t)) \quad ,$$

(où l'on prolonge par la valeur 0 au point δ toute fonction de $C(E)$ en une fonction de $C(E_\delta)$ dans le cas E compact).

De plus, le processus X possède les deux propriétés suivantes :

(N) pour tout $x \in E$, $P_x \ [X_0 = x] = 1$,

([5]) c'est-à-dire $X_t(\omega) = \delta$ implique $X_{t+h}(\omega) = \delta$ pour tout $h \geqslant 0$.

([6]) On rappelle la convention $X_\infty(\omega) = \delta$ pour tout $\omega \in \Omega$.

(B) pour toute suite croissante T_n de temps d'arrêt de X, si $T = \sup_n T_n$, on a:

$$X_{T_n(\omega)}(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X_{T(\omega)}(\omega) \quad \text{sur } \{T < +\infty\} \text{ p. s.} \qquad \text{(voir [8], exp. 5).}$$

Si $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ désigne la famille des résolvantes de $(T_t)_{t\geqslant 0}$, on a, pour $f \in C(E)$

$$R_\lambda\, f(x) = E_x \int_0^\zeta e^{-\beta t}\, f(X_t)\, dt \quad .$$

Cette formule est encore valable pour $\beta = 0$ si R_0 existe ; en particulier, $R_0\, 1(x) = E_x(\zeta)$.

Un processus de Markov sur E, possédant les propriétés (N) et (B), sera appelé processus de Hunt sur E .

Il résulte de ceci que, dans la première partie de cet exposé, ainsi que dans l'exposé 4, on a construit différents processus de Hunt : un processus sur $\mathring{M}$ de résolvantes (G_β^0), un processus sur ∂M de résolvantes $(K_{0,\rho})$, un processus sur M de résolvantes (G_β). On va dans cette deuxième partie, étudier, sous certaines conditions (§ 2.4), les relations entre ces processus.

2.2. Processus induit par X sur un ouvert.

Soient X un processus de Markov sur E (§ 2.1), G un ouvert de E. Le terme $X^G = (\Omega, F, (X_t^G), (\theta_t^G), (P_x)_{x\in G\cup(\delta)})$, où

$$X_t^G(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega) & \text{si } t < \sigma_G(\omega) \\ \delta & \text{si } t \geqslant \sigma_G(\omega) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \theta_t^G(\omega) = \begin{cases} \theta_t(\omega) & \text{si } t < \sigma_G(\omega) \\ \omega_\delta \;\; (7) & \text{si } t \geqslant \sigma_G(\omega) \end{cases}$$

est un processus de Markov sur G qu'on appelle processus induit par X sur G, ou processus tué au temps σ_G (voir [2], chap. 10).

De plus, on a (pour $x \in G$, $f \in B(G_\delta)$) :

$$E_x(f(X_t^G)) = E_x(f(X_t)\, 1_{[t<\sigma_G]})$$

$$E_x \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, f(X_t^G)\, dt = E_x \int_0^{\sigma_G} e^{-\lambda t}\, f(X_t)\, dt \quad .$$

2.3. Fonctionnelles additives et changement de temps associé.

Soit $X = (\Omega, F, \ldots)$ un processus de Hunt sur E .

Une famille $A = \{A_t, \; t \geqslant 0\}$ de variables aléatoires positives sur (Ω, F) est appelée une fonctionnelle additive continue de X si :

---

(7) où ω_δ est un élément de Ω (qu'on peut toujours supposer exister) tel que $X_t(\omega_\delta) = \delta$ pour tout t .

1° Pour tout $\omega \in \Omega$:

$A_0(\omega) = 0$,

$t \to A_t(\omega)$ est non décroissante et continue,

$A_t(\omega) = \lim\limits_{s \uparrow \zeta(\omega)} A_s(\omega)$ pour tout $t \geqslant \zeta(\omega)$.

2° A_t est F_t^*-mesurable.

3° Pour tout $t , s \geqslant 0$, $A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t$ p. s. ([8]).

On écrira souvent $A(t , \omega)$ pour $A_t(\omega)$, $A(t)$ pour A_t . La propriété 1° entraîne que $t \to A_t(\omega)$ définit une mesure sur $\underset{\sim}{R}_+$.

On appelle λ-potentiel $(\lambda \geqslant 0)$ de f (f fonction borélienne positive), par rapport à A , la fonction :

$$V_A^\lambda f(x) = E_x \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(X_t)\, dA_t \quad .$$

En particulier, $V_A^\lambda 1(x)$ (qu'on note $V_A^\lambda(x)$) s'appelle le λ-potentiel de A .

On dit que deux fonctionnelles additives (A_t) et (B_t) sont équivalentes, si $P_x\ [A_t \neq B_t$ pour un $t \geqslant 0] = 0$ pour tout x .

Si, pour un certain $\lambda \geqslant 0$, deux fonctionnelles additives <u>continues</u> ont même λ-potentiel <u>fini</u>, elles sont équivalentes ([4]).

Un ensemble borélien $B \subset E$ porte la fonctionnelle (A_t) si l'on a :

$$\int_0^{+\infty} 1_{(E_\delta \setminus B)} \circ X_s\, dA_s = 0 \quad \text{p. s.}$$

(ce qui équivaut à $V_A^\lambda 1_{E_\delta \setminus B}(x) = 0$ pour tout x).

(A_t) désignant toujours une fonctionnelle additive continue de X , on définit

$$\tau_t(\omega) = \inf \{s\ ;\ A_s(\omega) > t\} \quad \text{si cet ensemble est non vide,}$$

$$= +\infty \quad \text{autrement.}$$

Alors τ_t est un temps d'arrêt de X , et de plus on a, pour tout $u , v \geqslant 0$,

$$\tau_{u+v} = \tau_u + \tau_v \circ \theta_{\tau_u} \quad \text{p. s.} \quad ([4]).$$

Le terme $X' = (\Omega , F , (X_{\tau_t}) , (\theta_{\tau_t}) , (P_x)_{x \in E_\delta})$ est un processus de Markov sur

---

([8]) On montre, dans [4], que ceci entraîne que, pour tout temps d'arrêt T et toute variable aléatoire $R \geqslant 0$, on a :

$$A_{R(\omega)+T(\omega)}(\omega) = A_{T(\omega)}(\omega) + A_{R(\omega)} \circ \theta_{T(\omega)}(\omega) \quad \text{p. s.}$$

E qu'on appelle le processus déduit de X par le changement de temps (τ_t) (voir [4] et [10]).

En général, E n'est pas un espace de phases satisfaisant pour le processus X', on a le résultat un peu plus précis suivant :

Supposons que B soit fermé, $B \subset E$, et que B porte (A_t) ; alors

$$X'' = (\Omega'' , F'' , (X_{\tau_t}) , (\theta_{\tau_t}) , (P_x)_{x\in B_\delta})$$

est un processus de Markov sur B avec

$$\Omega'' = \{\omega \; ; \; X_{\tau_u}(\omega) \in B \cup \{\delta\} \text{ pour tout } u \geqslant 0\} \qquad F'' = F[\Omega''] \; .$$

Enfin, désignant par (R'_λ) la résolvante de X', et par ζ' sa durée de vie, on a :

$$\zeta'(\omega) = A_\zeta(\omega)$$

$$R'_\lambda f(x) = E_x \int_0^{A_\zeta} e^{-\lambda t} f(X_{\tau_t})\, dt = E_x \int_0^{\zeta} e^{-\lambda A_t} f(X_t)\, dA_t \qquad (f \in B(E_\delta)) \; .$$

2.4. Hypothèses de régularité.

On considère un couple (W , L) défini dans l'introduction. On suppose que W vérifie l'hypothèse (A).

On suppose que L est quasi-local, que $\delta \equiv 0$ (donc $L \equiv \Gamma$), que $\alpha \equiv 1$ (en fait, ceci revient à supposer $\alpha(x') > 0$, pour tout $x' \in \partial M$; car si $L' = \varphi L$ avec $\varphi(x') > 0$, pour tout x', alors $W_L = W_{L'}$. Voir aussi à ce sujet la remarque 1 du § 2.9), et qu'il satisfait soit (El.1), soit (El.2).

D'après les théorèmes 1 et 2 de la première partie, il existe des opérateurs $G_{\rho,\beta}$ et $K_{\beta,\rho}$ sur $C(M)$ et $C(\partial M)$ respectivement, définis pour $\rho \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\rho + \beta > 0$ (et aussi pour $\rho = \beta = 0$ si $W1 \not\equiv 0$ sur chaque composante connexe de M), tels que :

$$\begin{cases} (\beta - W)\, G_{\rho,\beta}\, f = f & f \in C^{0,\lambda}(M) \\ (\rho - L)\, G_{\beta,\rho}\, f = 0 & \end{cases}$$

$$(\rho - LH_\beta)\, K_{\beta,\rho}\, \varphi = \varphi \qquad \begin{matrix} \varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M) \text{ si (El.1)} \\ \varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M) \text{ si (El.2)}. \end{matrix}$$

De plus, τ désignant la mesure riemannienne sur M associée à la métrique riemannienne conjuguée de la partie principale π de P, et σ désignant la mesure riemannienne sur ∂M associée à la restriction de cette métrique à ∂M, on suppose qu'il existe une famille de fonctions non-négatives, mesurables sur $M \times M$, $g_{\rho,\beta}$ ($\rho \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\rho + \beta > 0$ et aussi $\rho = \beta = 0$ si $W1 \not\equiv 0$ sur chaque composante connexe de M), telles que (voir à ce sujet l'exposé n° 5) :

(γ_1) Pour $x \in M$, $g_{\rho,\beta}(x\,,\,.) \in L^1(d\sigma)$, $g_{\rho,\beta}(x\,,\,.) \in L^1(d\tau)$.

(γ_2) Pour toute $f \in C^{0,\lambda}(M)$ et toute $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ si (El.1), $\varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$ si (El.2), la fonction

$$u(x) = \int_M g_{\rho,\beta}(x\,,\,y)\, f(y)\, \tau(dy) + \int_{\partial M} g_{\rho,\beta}(x\,,\,y')\, \varphi(y')\, \sigma(dy')$$

appartient à $C^{2,\lambda}(M)$ et satisfait à

$$\begin{cases} (\beta - W)u = f \\ (\rho - L)u = \varphi \end{cases} .$$

(γ_3) Pour toute $f \in C(M)$, on a, uniformément en $x \in M$:

$$\frac{1}{r}\int_{M_r} g_{\rho,\beta}(x\,,\,y)\, f(y)\, \tau(dy) \xrightarrow[\substack{r\to 0\\ r>0}]{} \int_{\partial M} g_{\rho,\beta}(x\,,\,y')\, f(y')\, \sigma(dy') ,$$

où, d désignant la distance géodésique associée à π, on a posé

$$M_r = \{x \mid x \in M\,,\ d(x\,,\,\partial M) < r\} .$$

Lorsque l'opérateur P est de classe $C^{1,\lambda}$, la condition (γ_3) est conséquence de (γ_3') :

(γ_3') $g_{\rho,\beta}$ est continue sur $M \times M \setminus \Delta$, $\Delta = \{(x\,,\,x)\,,\ x \in M\}$,

$$g_{\rho,\beta}(x\,,\,y) \leqslant \frac{\mathrm{Cte}}{d(x\,,\,y)^{n-2}} \qquad \text{(voir exposé 5, Appendice D).}$$

Enfin, remarquons que (γ_1) et (γ_2) impliquent :

$$G_{\rho,\beta}\, f(x) = \int_M g_{\rho,\beta}(x\,,\,y)\, f(y)\, \tau(dy)\,, \qquad f \in C(M) ,$$

$$K_{\beta,\rho}\, \varphi(x') = \int_{\partial M} g_{\rho,\beta}(x'\,,\,y')\, \varphi(y')\, \sigma(dy')\,, \qquad \varphi \in C(\partial M) .$$

<u>Les hypothèses faites dans ce paragraphe sont supposées satisfaites dans toute la suite</u>. De même, et sans que cela soit précisé chaque fois, $(T_t)_{t\geq 0}$ désignera le semi-groupe de résolvantes $(G_{0,\beta})_{\beta>0}$, souvent noté seulement G_β, et $X = (\Omega\,,\,F\,,\,\ldots)$ le processus de Hunt sur M associé ; $(S_{\beta,t})_{t\geq 0}$ désignera le semi-groupe de résolvantes $(K_{\beta,\rho})_{\rho>0}$, pour $\beta = 0$ on écrira S_t et K_ρ.

2.5. Processus $\overline{X_\beta}$.

$\beta > 0$ étant fixé, on pose $\overline{\Omega} = \Omega \times R_+$, $\overline{F} = F \otimes \mathcal{B}_{\underset{\sim}{R}^+}$,

$$\overline{X}_t(\omega , u) = \begin{cases} X_t(\omega) & \text{si} \quad t < u \\ \delta & \text{si} \quad t \geqslant u \end{cases} \qquad (\omega , u) \in \Omega \times R_+ \quad ,$$

$$\overline{\theta}_t(\omega , u) = (\theta_t \, \omega , (u - t)^+) \quad ,$$

$$\overline{P_{\beta,x}} = P_x \otimes \beta e^{-\beta u} \, du \quad ,$$

Le terme $\overline{X_\beta} = (\overline{\Omega} , \overline{F} , (\overline{X_t}) , (\overline{\theta_t}) , (\overline{P_{\beta,x}}))$ est un processus de Hunt sur M (vérification facile).

Sa durée de vie $\overline{\zeta}$ vaut $\overline{\zeta}(\omega , u) = \zeta(\omega) \wedge u$, et on a, pour tout $m \geqslant 0$,

$$\overline{E_{\beta,x}}(\overline{\zeta})^m = E_x \int_0^{+\infty} \beta e^{-\beta u}(\zeta \wedge u)^m \, du \leqslant \int_0^{+\infty} \beta u^m \, e^{-\beta u} \, du < + \infty \quad .$$

De plus, le processus $\overline{X_\beta}$ admet un potentiel $\overline{G_{\beta,0}}$ et $(f \in B_\delta(M))$:

$$\begin{aligned} \overline{G_{\beta,0}} \, f(x) &= \overline{E_{\beta,x}}(\int_0^{\overline{\zeta}} f(\overline{X_t}) \, dt) \\ &= E_x(\int_0^{+\infty} \beta e^{-\beta u} \, du \int_0^{\zeta\wedge u} f(X_t) \, dt) \\ &= E_x(\int_0^{\zeta} f(X_t) \, dt \int_t^{+\infty} \beta e^{-\beta u} \, du) \\ &= E_x(\int_0^{\zeta} e^{-\beta t} \, f(X_t) \, dt) = G_\beta \, f(x) \quad . \end{aligned}$$

En particulier, $\|\overline{G_{\beta,0}}\| = \|\overline{G_{\beta,0}} \, 1\| = \|\overline{G_\beta}\| \leqslant \beta^{-1}$. Le processus $\overline{X_\beta}$ est donc le processus de Hunt associé au semi-groupe de générateur $\overline{(W - \beta)_L}$.

On en déduit également que, si $W1 \leqslant c < 0$, le processus X associé vérifie $G_0^0 \, 1 = E_x(\zeta) \leqslant c^{-1}$, et $E_x(\zeta)^m < + \infty$ pour tout m . En effet, on considère le processus Y de générateur $\overline{(W + c)_L}$ et la construction précédente montre que $X = \overline{Y_c}$.

2.6. Construction d'un temps local sur la frontière.

On pose $A_r(t , \omega) = \frac{1}{r} \int_0^t 1_{M_r}(X_s(\omega)) \, ds$, $r > 0$.

A_r est une fonctionnelle additive continue de X .

THÉORÈME 3. - Il existe une fonctionnelle additive **continue A du processus X, et une seule, à une équivalence près, telle que l'on ait, pour $\beta > 0$ et** $f \in B(M)$:

(14) $$\int_{\partial M} g_\beta(x\ ,\ y')\ f(y')\ \sigma(dy') = E_x\{\int_0^\zeta e^{-\beta t}\ f(X_t)\ dA_t\}\quad .$$

Cette formule est encore valable pour $\beta = 0$ si $W1 \not\equiv 0$ sur chaque composante connexe de M. De plus :

1° De toute suite $\{r_n\}$ décroissant vers 0, on peut extraire une sous-suite $\{r'_n\}$ telle que $A(t) = \lim_{n\to+\infty} A_{r'_n}(t)$ uniformément localement en t.

2° La fonctionnelle A est portée par ∂M (9).

La démonstration va se diviser en deux parties, on va d'abord étudier le cas où X a un noyau potentiel, puis on passera au cas général en utilisant le processus $\overline{X_\beta}$.

Premier cas. - On suppose $W1 \leqslant c < 0$. Alors (§ 2.5), $G_0\ 1 = E_x(\zeta) \leqslant c^{-1}$ et $E_x(\zeta^m) < +\infty$ pour tout $m \geqslant 0$.

$$E_x\ A_r(t) = \frac{1}{r}\ E_x \int_0^{t\wedge\zeta} 1_{M_r}(X_s)\ ds \leqslant \frac{1}{r}\ E_x \int_0^\zeta 1_{M_r}(X_s)\ ds = \frac{1}{r}\int_{M_r} g(x\ ,\ y)\ \tau(dy)\quad .$$

Cette dernière quantité converge uniformément sur M vers $\int_{\partial M} g(x\ ,\ y')\,\sigma(dy')$, donc

$$\sup_{r>0} \frac{1}{r}\ E_x \int_0^{t\wedge\zeta} 1_{M_r}(X_s)\ ds \leqslant C\quad .$$

Remarquons également que $A_r(\infty) = A_r(\zeta) \in L^1(P_x)$ pour tout x.

LEMME 1. - $\sup_{x\in M} E_x\{|A_r(\zeta) - A_{r'}(\zeta)|^2\} \xrightarrow[r,r'\to 0]{} 0$.

Posons $\varphi(x) = \frac{1}{r}\ 1_{M_r}(x) - \frac{1}{r'}\ 1_{M_{r'}}(x)$.

$$E_x\{|A_r(\zeta) - A_{r'}(\zeta)|^2\} = E_x(\int_0^\zeta \varphi(X_s)\ ds)^2$$

$$E_x(\int_0^\zeta \varphi(X_s)\ ds)^2 = E_x(\int_0^\zeta \varphi(X_s)\ ds \int_0^\zeta \varphi(X_u)\ du) = 2E_x(\int_0^\zeta \varphi(X_s)\ ds \int_s^\zeta \varphi(X_u)\ du)$$

$$= 2E_x(\int_0^\zeta \varphi(X_s)\ ds\ E_{X_s} \int_0^\zeta \varphi(X_u)\ du)$$

(propriété de Markov et ζ temps terminal)

$$\leqslant 2 \sup_{x\in M} |E_x \int_0^\zeta \varphi(X_u)\ du|.E_x \int_0^\zeta |\varphi(X_s)|\ ds\quad .$$

(9) En fait, on verra (corollaire du théorème 5) que A a pour support ∂M.

$$E_x \int_0^\zeta |\varphi(X_s)|\, ds \leqslant E_x \int_0^\zeta \frac{1}{r} 1_{M_r}(X_s)\, ds + E_x \int_0^\zeta \frac{1}{r'} 1_{M_{r'}}(X_s)\, ds \leqslant 2C \quad ,$$

$$E_x \int_0^\zeta \varphi(X_s)\, ds = \frac{1}{r} E_x \int_0^\zeta 1_{M_r}(X_s)\, ds - \frac{1}{r'} E_x \int_0^\zeta 1_{M_{r'}}(X_s)\, ds$$
$$= \frac{1}{r} \int_{M_r} g_0(x\,,\,y)\ \tau(dy) - \frac{1}{r'} \int_{M_{r'}} g_0(x\,,\,y)\ \tau(dy)$$
$$\xrightarrow[r,r'\to 0]{} 0 \text{ uniformément en } x \in M \quad ,$$

d'où le lemme.

Maintenant soit $B_r(t) = E_x(A_r(\zeta) \mid F_t^*)$ (en particulier $B_r(\infty) = A_r(\zeta)$) ;

$$B_r(t) = E_x \int_0^{t\wedge\zeta} \frac{1}{r} 1_{M_r}(X_s)\, ds + E_x\left\{1_{\{t<\zeta\}} \int_t^\zeta \frac{1}{r} 1_{M_r}(X_s)\, ds \mid F_t^*\right\}$$
$$= A_r(t) + 1_{[t<\zeta]}\, E_{X_t}\{\int_0^\zeta \frac{1}{r} 1_{M_r}(X_s)\, ds\} \quad \text{(propriété de Markov)}$$

d'où,

$$B_r(t) = A_r(t) + \frac{1}{r} 1_{[t<\zeta]} \int_{M_r} g_0(X_t\,,\,y)\ \tau(dy) \quad . \tag{15}$$

$A_r(\zeta) - A_{r'}(\zeta) \in L^1(P_x)$, donc $(B_r(t) - B_{r'}(t)\ ,\ F_t^*\ ,\ P_x)$ est une martingale sur $[0\ ,\ +\infty]$.

On en déduit (inégalité de Doob, voir [7], exp. 4) :

$$P_x[\sup_t |B_r(t) - B_{r'}(t)| > \varepsilon] \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} E_x(B_r(\infty) - B_{r'}(\infty))^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} E_x(A_r(\zeta) - A_{r'}(\zeta))^2$$
$$\xrightarrow[r,r'\to 0]{} 0 \text{ uniformément en } x \in M \text{ (lemme 1).}$$

De là, on déduit,

LEMME 2. - De toute suite $\{r_n\}$ décroissant vers 0 , on peut extraire une sous-suite $\{r'_n\}$ telle que :

$$P_x\ \{B_{r'_n}(t) \text{ converge uniformément lorsque } n \to +\infty\} = 1 \text{ pour tout } x \quad .$$

On commence par extraire par récurrence de la suite donnée, une sous-suite $\{r'_n\}$ telle que :

$$\text{Pour tout } x\ ,\quad P_x\{\sup_t |B_{r'_{n+1}}(t) - B_{r'_n}(t)| > \frac{1}{2^n}\} \leqslant \frac{1}{2^n} \quad .$$

La série $\sum \frac{1}{2^n}$ étant convergente, on en déduit (lemme de Borel-Cantelli, voir [3], page 228) :

$$P_x[\exists\, \ell\ ,\ \forall\, n \geq \ell\ ,\ \sup_t |B_{r'_{n+1}}(t) - B_{r'_n}(t)| \leq \frac{1}{2^n}] = 1\ ,$$

donc que $P_x[B_{r'_n}(t)$ converge uniformément en $t] = 1$, pour tout x .

C. Q. F. D.

De l'égalité (15), on déduit, compte tenu du lemme 2, que $A_{r'_n}(t)$ converge uniformément en t p. s.

On pose

$$A(t\ ,\ \omega) = \lim_{n\to+\infty} A_{r'_n}(t\ ,\ \omega) \quad \text{si cette limite existe,}$$
$$= 0 \quad \text{autrement.}$$

$A(t\ ,\ \omega)$ est une fonctionnelle additive continue de X . En particulier, $A_{r'_n}(\zeta) \to A(\zeta)$ p. s. Du lemme 1, on déduit qu'il y a aussi convergence dans $L^2(P_x)$, donc dans $L^1(P_x)$. D'où :

$$E_x\, A(\zeta) = \lim_n E_x(A_{r'_n}(\zeta)) = \lim_n \frac{1}{r'_n} \int_{M_{r'_n}} g_0(x\ ,\ y)\ \tau(dy) = \int_{\partial M} g_0(x\ ,\ y')\ \sigma(dy')\ .$$

La fonctionnelle A est donc uniquement déterminée (§ 2.3), elle est en particulier indépendante de la suite $\{r'_n\}$ [10].

On va maintenant démontrer la formule (14) lorsque $\beta = 0$.

LEMME 3. - On a, si C_t est une fonctionnelle additive continue de X , de potentiel fini, et si $f \in C(M)$, $E_x \int_0^\zeta G_0\, f(X_t)\, dC_t = E_x \int_0^\zeta f(X_t)\, C_t\, dt$.

En effet (on pose $t_n^k = \frac{k}{2^n}$),

$$E_x \int_0^\zeta G_0\, f(X_t)\, dC_t = E_x \int_0^\zeta E_{X_t} \int_0^\zeta f(X_s)\, ds\, dC_t$$
$$= \lim_n \sum_{k=1}^{+\infty} E_x\Big\{E_{X_{t_k^n}} \int_0^\zeta f(X_s)\, ds\, (C_{t_n^k} - C_{t_n^{k-1}})\Big\}$$

(car X_s est continu à droite, $\|G_0\, f\| \leq +\infty$, et ζ , $C(\zeta) \in L^1(P_x)$)

.../...

---

(10) Cette construction est due, à une modification près, à SATO et UENO [6]. La démarche est identique à celle utilisée pour construire la fonctionnelle additive dont le potentiel est une fonction excessive donnée, mais on utilise une suite de fonctionnelles approchantes particulières.

$$= \lim_n \sum_{k=1}^{+\infty} E_x \int_{t_n^k}^{\zeta} f(X_s)(C_{t_n^k} - C_{t_n^{k-1}})$$

$$= E_x \int_0^{\zeta} \int_t^{\zeta} f(X_s)\, dC_s \quad (\text{car } f(X_s) \text{ est continue à droite})$$

$$= E_x \int_0^{\zeta} f(X_t)\, C_t\, dt \quad (\text{intégration par parties}).$$

C. Q. F. D.

Utilisant ce lemme, on obtient :

$$I_n = E_x \int_0^{\zeta} G_0\, f(X_t)\, dA_{r'_n}(t) = E_x \int_0^{\zeta} f(X_t)\, A_{r'_n}(t)\, dt = J_n \quad .$$

Mais

$$I_n = \frac{1}{r'_n} \int_{M_{r'_n}} g_0(x\ ,\ y)\ G_0\ f(y)\ \tau(dy) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{\partial M} g_0(x\ ,\ y')\ G_0\ f(y')\ \sigma(dy')$$

et

$$J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} E_x \int_0^{\zeta} f(X_t)\ A(t)\ dt = E_x \int_0^{\zeta} G_0\ f(X_t)\ dA_t \qquad (\text{lemme 3})$$

(ce dernier passage à la limite est justifié, car

$$\left|\int_0^{\zeta} f(X_t)\ A_{r'_n}(t)\ dt\right| \leqslant \|f\|\cdot\zeta\cdot A_{r'_n}(\zeta)$$

est équi-intégrable puisque $\zeta\cdot A_{r'_n}(\zeta)$ converge dans $L^1(P_x)$ vers $\zeta\cdot A(\zeta)$, vu que $\zeta \in L^2(P_x)$ et que $A_{r'_n} \to A(\zeta)$ dans $L^2(P_x)$). On a donc

$$\int_{\partial M} g_0(x\ ,\ y')\ h(y')\ \sigma(dy') = E_x \int_0^{\zeta} h(X_t)\ dA_t \quad \text{pour} \quad h = G_0\ f\ , \quad f \in C(M) \quad .$$

De là, on déduit la formule pour $h \in C(M)$, puisque $\{G_0\ f\ ,\ f \in C(M)\}$ est dense, puis pour $h \in B^+(M)$, enfin pour $h \in B(M)$.

<u>Cas général</u>. - On fixe $\beta > 0$, et on introduit le processus

$$\overline{X_\beta} = (\overline{\Omega}\ ,\ \overline{F}\ ,\ (\overline{X_t})\ ,\ (\overline{\theta_t})\ ,\ (\overline{P_{\beta,x}}))$$

de noyau potentiel G_β et de générateur $\overline{(W - \beta)_L}$ (voir § 2.5).

On peut appliquer les résultats du premier cas au processus $\overline{X_\beta}$, et on obtient la propriété suivante.

De toute suite décroissant vers 0 , on peut extraire une sous-suite $\{r_n\}$ telle que :

$$\overline{A}^{\beta}_{r_n}(t\ ,\ \overline{\omega}) = \frac{1}{r_n}\int_0^t 1_{M_{r_n}}(\overline{X_s}(\overline{\omega}))\ ds = \frac{1}{r_n}\int_0^{t\wedge u} 1_{M_{r_n}}(X_s(\omega))\ ds \xrightarrow[r_n\to 0]{} \overline{A}^{\beta}(t\ ,\ \overline{\omega})$$

~~uniformément~~, $\overline{P_{\beta,x}}$ p. s. pour tout x .

Soit $\overline{\Omega_1} = \{(\omega\ ,\ u)\ |\ \frac{1}{r_n}\int_0^{t\wedge u} 1_{M_{r_n}}(X_s(\omega))\ ds$ converge uniformément en $t\}$, on a

$$P_x \otimes (\beta e^{-\beta u}\ du)(\overline{\Omega_1}) = 1 \quad \text{pour tout} \quad x\ .$$

Soit (T_k) une suite de nombres $\geqslant 0$, croissant vers $+\infty$, et posons

$$\Omega_k = \{\omega\ |\ \frac{1}{r_n}\int_0^t 1_{M_{r_n}}(X_s(\omega))\ ds \ \text{ converge uniformément en } \ t \in [0\ ,\ T_k]\}\ .$$

On a $P_x(\Omega_k) = 1$ pour tout x (il suffit de remarquer que $(\complement\Omega_k) \times [T_k\ ,+\infty[\ \subset \complement\overline{\Omega}_1)$ donc si $\omega \in \cap\, \Omega_k$, $A_{r_n}(t\ ,\ \omega)$ converge uniformément sur tout compact.

On pose

$$\begin{aligned} A(t\ ,\ \omega) &= \lim_{n\to+\infty} A_{r_n}(t\ ,\ \omega) \quad \text{si elle existe} \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{autrement.} \end{aligned}$$

$A(t\ ,\ \omega)$ est une fonctionnelle additive continue de X et p. s. $A_{r_n}(t)$ converge vers $A(t)$ uniformément sur tout compact.

De plus, $A(t\wedge u\ ,\ \omega) = \lim_n \frac{1}{r_n}\int_0^{t\wedge u} 1_{M_{r_n}}(X_s(\omega))\ ds$ pour tout u , P_x p. s., donc cette égalité a lieu $\overline{P_{\beta,x}}$ p. s. en $(\omega\ ,\ u)$ c'est-à-dire que :

$$A(t\wedge u\ ,\ \omega) = \overline{A}^{\beta}(t\ ,\ \omega\ ,\ u)\ ,\quad \overline{P_{\beta,x}} \ \text{ p. s. pour tout } \ x\ .$$

On a, si $f \in B(M)$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} g_\beta(x\ ,\ y')\ f(y')\ \sigma(dy') &= \overline{E_{\beta,x}}\int_0^{\overline{\zeta}} f(\overline{X_t})\ d\overline{A}^{\beta}_t \qquad \text{(première partie)} \\ &= E_x \int_0^{+\infty} u e^{-\beta u}\ du \int_0^u f(X_t)\ dA_t \\ &= E_x \int_0^{+\infty} f(X_t)\Big(\int_0^{+\infty} u e^{-\beta u}\ du\Big)\ dA_t \\ &= E_x \int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\ f(X_t)\ dA_t\ . \end{aligned}$$

Cette formule montre l'unicité de la fonctionnelle construite ; de plus, elle est valable pour $\beta' \neq \beta$: en effet, on refait pour β' la construction ci-dessus, mais en prenant soin d'extraire la suite construite de la suite $\{r_n\}$, et on obtient cette formule pour β' .

Ceci démontre l'égalité (14). Cette égalité est encore vraie lorsque g_0 existe par passage à la limite.

Enfin, on a

$$V_A^\beta 1_{\overset{\circ}{M}}(x) = E_x \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} 1_{\overset{\circ}{M}}(X_t)\, dt$$
$$= \int_{\partial M} g_\beta(x , y')\, 1_{\overset{\circ}{M}}(y')\, \sigma(dy') = 0 \quad ,$$

donc (§ 2.3), la fonctionnelle A est portée par ∂M .

Le théorème 3 est démontré.

Définition. - La fonctionnelle (A_t) de β-potentiel $\int_{\partial M} g_\beta(x , y')\, \sigma(dy')$ est appelé le temps local canonique sur ∂M associé à X .

Cette dénomination de temps local ne sera entièrement justifiée que par le corollaire du théorème 5 (§ 2.9).

2.7. Interprétation stochastique des opérateurs H_β , G_β^0 .

Soit $T = \sigma_{\overset{\circ}{M}}$ le temps de sortie de $\overset{\circ}{M}$; T est un temps d'arrêt de X , et on a $X_T(\omega) \notin \overset{\circ}{M}$ pour tout $\omega \in \Omega$ (voir 2.1).

THÉORÈME 4. - On a, pour $\beta \geqslant 0$,

(16) $H_\beta\, \varphi(x) = E_x(e^{-\beta T}\, \varphi(X_T))$ pour $\varphi \in C(\partial M)$.

(17) $G_\beta^0\, f(x) = E_x(\int_0^T e^{-\beta t}\, f(X_t)\, dt)$ pour $f \in C(M)$.

Dans les formules stochastiques, les fonctions sur ∂M ou M sont toujours prolongées en des fonctions sur $\partial M \cup \{\delta\}$, $M \cup \{\delta\}$ par la valeur 0 au point δ .

On suppose d'abord $\beta > 0$.

Soit $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$. On pose $\varphi_\beta(x') = LH_\beta\, \varphi(x')$. On considère la fonction

$$u(x) = \int_{\partial M} g_\beta(x , y')\, \varphi_\beta(y')\, \sigma(dy') \; ; \; u \in C^{2,\lambda}(M) \quad .$$

D'une part, on a (hypothèse (γ_2)) :

$$(\beta - W)u = 0 \; , \quad - Lu = \varphi_\beta \quad ;$$

et d'autre part, si $x' \in \partial M$:

$$u(x') = \int_{\partial M} g_\beta(x' , y')\, LH_\beta\, \varphi(y')\, \sigma(dy') = K_\beta\, LH_\beta\, \varphi(x') = \varphi(x') \quad ,$$

c'est-à-dire $\gamma^0\, u = \varphi$. Donc $u = H_\beta\, \varphi$.

Mais, d'après la formule (14) du théorème 3, et en désignant par $\overline{\varphi_\beta}$ un prolongement quelconque de φ_β en une fonction continue sur M, on a,

$$\begin{aligned}
u(x) &= E_x \int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\, \overline{\varphi_\beta}(X_t)\, dA_t \\
&= E_x \int_T^{+\infty} e^{-\beta t}\, \overline{\varphi_\beta}(X_t)\, dA_t \quad (\text{car } A(T) = 0 \text{ , puisque } A \text{ est portée par } \partial M) \\
&= E_x\left\{e^{-\beta T} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\, \overline{\varphi_\beta}(X_t)\, dA_t\right) \circ \theta_T\right\} \\
&= E_x\left(e^{-\beta T}\, E_{X_T} \int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\, \overline{\varphi_\beta}(X_t)\, dA_t\right) \\
&= E_x(e^{-\beta T}\, \varphi(X_T)) \qquad (\text{car } X_T \in \partial M \cup \{\delta\}).
\end{aligned}$$

On a donc $H_\beta\, \varphi(x) = E_x(e^{-\beta T}\, \varphi(X_T))$ pour $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$; par passage à la limite on en déduit la formule (16) pour $\varphi \in C(\partial M)$.

Par ailleurs, on a (corollaire 2 du théorème 2), pour $f \in C(M)$:

$$G_\beta^0\, f = G_\beta\, f - H_\beta\, K_\beta\, \overline{LG_\beta^0}\, f = G_\beta\, f - H_\beta\, \gamma^0\, G_\beta\, f \quad ,$$

d'où

$$\begin{aligned}
G_\beta^0\, f(x) &= E_x \int_0^{\zeta} e^{-\beta t}\, f(X_t)\, dt - E_x(e^{-\beta T}\, E_{X_T} \int_0^{\zeta} e^{-\beta t}\, f(X_t)\, dt) \\
&= E_x \int_0^{\zeta} e^{-\beta t}\, f(X_t)\, dt - E_x \int_T^{\zeta} e^{-\beta t}\, f(X_t)\, dt \\
&= E_x \int_0^{T} e^{-\beta t}\, f(X_t)\, dt \quad .
\end{aligned}$$

Lorsque $\beta \to 0$, $G_\beta^0\, f \to G_0^0\, f$ et $H_\beta\, \varphi \to H_0\, \varphi$ (utiliser l'équation (4), § 1.4) ; et d'autre part, on peut aussi passer à la limite (lorsque $\beta \to 0$) dans les intégrales, d'abord pour des fonctions positives, puis pour des fonctions continues quelconques ; ce qui montre (16) et (17).

Ce théorème montre en particulier que le processus induit par X sur $\mathring{M}$ (voir § 2.2) est le processus de résolvantes (G_β^0) .

2.8. Expression stochastique de problèmes particuliers.

Si B_t est une fonctionnelle additive continue de X portée par ∂M , si $\Phi(\omega)$ est une variable aléatoire ≥ 0 , et si $f \in B(M)$, $E_x \int_0^{\Phi} f(X_t)\, dB_t$ ne dépend que de $\gamma^0\, f$.

En effet

$$|E_x \int_0^{\Phi} (1_{\overset{\circ}{M}} f)(X_t)\, dB_t| \leqslant \|f\|\, E_x \int_0^{+\infty} 1_{\overset{\circ}{M}}(X_t)\, dB_t = 0 .$$

On peut donc définir $E_x \int_0^{\Phi} \psi(X_t)\, dB_t$ pour $\psi \in B(\partial M)$, en prenant un prolongement quelconque de ψ en une fonction de $B(M)$; c'est ce qu'on fera systématiquement dans la suite, sans le préciser à chaque fois.

PROPOSITION 2. - Soit $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ si (El.1), $\varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$ si (El.2). Alors, pour $f \in C^{0,\lambda}(M)$, $\psi \in C^{1,\lambda}(M)$ (resp. $\psi \in C^{0,\lambda}(M)$), la fonction

$$u(x) = E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp\left[- \int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s\right] f(X_t)\, dt\right) + E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp\left[- \int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s\right] \psi(X_t)\, dA_t\right)$$

appartient à $C^{2,\lambda}(M)$ et vérifie $(\beta - W)u = f$, $(\varphi - L)u = \psi$ $(\beta > 0)$.

1° On considère le processus $\overline{X_\beta} = (\overline{\Omega}, \overline{F}, (\overline{X_t}), (\overline{\theta_t}), (\overline{P_{\beta,x}}))$ de générateur $\overline{(W - \beta)_L}$ (§ 2.6), et soit $\overline{A}^\beta$ le temps local canonique associé (théorème 3); on sait que $\overline{A}^\beta(t, \overline{\omega}) = \overline{A}^\beta(t, (\omega, u)) = A(t \wedge u, \omega)$, où A est le temps local canonique de X .

Soit $\overline{\tau}_t^\beta = \overline{\tau_t}$ la famille de temps d'arrêt associé à $\overline{A}^\beta$ (§ 2.3).

Alors si

$$\overline{\overline{\Omega}} = \{\omega \mid \overline{X}_{\overline{\tau}_t}(\omega) \in \partial M \text{ pour tout } t \geqslant 0\} , \quad \overline{\overline{F}} = \overline{F}[\overline{\overline{\Omega}}] ,$$

$\overline{Y_\beta} = (\overline{\overline{\Omega}}, \overline{\overline{F}}, (\overline{X}_{\overline{\tau}_t}), (\theta_{\overline{\tau}_t}), (\overline{P_{\beta,x'}})_{x'\in\partial M\cup\{\delta\}})$ est un processus de Markov sur ∂M (§ 2.3), car $\overline{A}^\beta$ est portée par ∂M .

Désignant par $(\overline{R_{\beta,\rho}})_{\rho\geqslant 0}$ la famille des résolvantes de $\overline{Y_\beta}$, on a $(\psi \in C(\partial M))$:

$$\begin{aligned}\overline{R_{\beta,0}}\, \psi(x') &= \overline{E_{\beta,x'}} \int_0^{+\infty} \psi(\overline{X}_{\overline{\tau}_t})\, dt = \overline{E_{\beta,x'}} \int_0^{+\infty} \psi(\overline{X_t})\, d\overline{A}_t^\beta \\ &= \int_{\partial M} g_\beta(x , y')\, \psi(y')\, \sigma(dy') \qquad \text{(formule (14))} \\ &= K_{\beta,0}\, \psi(x') .\end{aligned}$$

De là on déduit, en utilisant l'équation résolvante vérifiée par $(\overline{R_{\beta,\rho}})_{\rho\geqslant 0}$ et $(K_{\beta,\rho})_{\rho\geqslant 0}$, que $\overline{R_{\beta,\rho}} = K_{\beta,\rho}$ pour tout $\rho \geqslant 0$; c'est-à-dire que le processus $\overline{Y_\beta}$ est le processus de générateur $\overline{LH_\beta}$.

Si on pose, pour $\psi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $C^{0,\lambda}(\partial M)$),

$$\overline{\psi}(x') = \overline{E}_{\beta,x'}\left(\int_0^{+\infty} \exp\left[-\int_0^t \varphi(\overline{X}_{\overline{\tau}_s})\, ds\right] \psi(\overline{X}_{\overline{\tau}_t})\, dt\right) ,$$

on a $\overline{\psi} \in \mathcal{D}(\overline{LH_\beta})$, et $(\varphi - \overline{LH_\beta})\overline{\psi} = \psi$ (voir appendice 2).

D'autre part, avec les hypothèses faites sur φ , on peut appliquer les théorèmes 3 et 3' de l'exposé 4 à l'opérateur $\varphi - L$; donc il existe $\overline{\overline{\psi}} \in C^{2,\lambda}(\partial M)$ telle que $(\varphi - LH_\beta)\overline{\overline{\psi}} = \psi$. Mais $\overline{\overline{\psi}} \in \mathcal{D}(\overline{LH_\beta})$, et on a $(\varphi - \overline{LH_\beta})(\overline{\psi} - \overline{\overline{\psi}}) = 0$, d'où $\overline{\psi} = \overline{\overline{\psi}}$, puisque $\varphi - \overline{LH_\beta}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe intégrable (Appendice 2).

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(x') &= \overline{E}_{\beta,x'}\left(\int_0^{+\infty} \exp\left[-\int_0^{\overline{A}_t^\beta} \varphi(\overline{X}_{\tau_s})\, ds\right] \psi(\overline{X}_t)\, d\overline{A}_t^\beta\right) \\
&= \overline{E}_{\beta,x'}\left(\int_0^{+\infty} \exp\left[-\int_0^t \varphi(\overline{X}_s)\, d\overline{A}_s^\beta\right] \psi(\overline{X}_t)\, d\overline{A}_t^\beta\right) \\
&= E_{x'}\left(\int_0^{+\infty} \beta e^{-\beta u}\, du \int_0^u \exp\left[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s\right] \psi(X_t)\, dA_t\right) \\
&= E_{x'}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp\left[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s\right] \psi(X_t)\, dA_t\right) .
\end{aligned}$$

Si on pose $u_1 = H_\beta \overline{\psi}$, u_1 appartient à $C^{2,\lambda}(M)$ et vérifie $(\beta - W)u_1 = 0$, $(\varphi - L)u_1 = \psi$; en utilisant la formule (16), § 2.7, on obtient :

$$\begin{aligned}
u_1(x) = H_\beta \overline{\psi}(x) &= E_x\left(e^{-\beta T} E_{X_T} \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp\left[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s\right] \psi(X_t)\, dA_t\right) \\
&= E_x\left(\int_T^{+\infty} e^{-\beta t} \exp\left[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s\right] \psi(X_t)\, dA_t\right) \\
&= E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp\left[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s\right] \psi(X_t)\, dA_t\right) \quad \text{car } A(T) = A(0) = 0 .
\end{aligned}$$

2° Soient

$$v(x) = E_x \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f(X_t)\, dt$$

$$w(x) = E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp\left[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s\right] \varphi(X_t)\, v(X_t)\, dA_t\right) ;$$

v appartient à $C^{2,\lambda}(M)$ et vérifie $(\beta - W)v = f$, $Lv = 0$.

w appartient à $C^{2,\lambda}(M)$ et vérifie $(\beta - W)w = 0$, $(\varphi - L)w = \varphi v$ (d'après le 1°), donc si on pose $u_2 = v - w$, on a,

$$u_2 \in C^{2,\lambda}(M) , \quad (\beta - W)u_2 = f , \quad (\varphi - L)u_2 = \varphi v - \varphi v = 0 .$$

On va transformer l'expression $w(x)$ (on rappelle que toute fonction sur M est prolongée par la valeur 0 au point δ, et que $X_\infty(\omega) = \delta$) :

$$w(x) = E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s]\, \varphi(X_t)\, E_{X_t}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r)\, dr\right) dA_t\right) .$$

Soit (τ_t) la famille de temps d'arrêt associé à A_t.

$$w(x) = E_x\left(\int_0^{+\infty} \exp[-\int_0^{\tau_t} \varphi(X_s)\, dA_s]\, \varphi(X_{\tau_t})\, e^{-\beta^{\tau}t}\, E_{X_{\tau_t}}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r)\, dr\right) dt\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{+\infty} \exp[-\int_0^{\tau_t} \varphi(X_s)\, dA_s]\, \varphi(X_{\tau_t})\, e^{-\beta\tau_t} \int_0^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_{r+\tau_t})\, dr\, dt\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{+\infty} \exp[-\int_0^{\tau_t} \varphi(X_s)\, dA_s]\, \varphi(X_{\tau_t}) \int_{\tau_t}^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r)\, dr\, dt\right) \quad \text{(prop. de Markov)}$$

$$= E_x\left(\int_0^{+\infty} \exp[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s]\, \varphi(X_t) \int_t^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r)\, dr\, dA_t\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{+\infty} \exp[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s]\, \varphi(X_t) \int_0^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r)\, dr\, dA_t\right)$$

$$- E_x\left(\int_0^{+\infty} \exp[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s]\, \varphi(X_t) \int_0^t e^{-\beta r} f(X_r)\, dr\, dA_t\right)$$

$$= w_1(x) - w_2(x) \quad ;$$

$$w_1(x) = E_x\left\{\left(\int_0^{+\infty} \exp[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s]\, \varphi(X_t)\, dA_t\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r)\, dr\right)\right\}$$

$$= E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r)\, dr\right) - E_x\left(\exp[-\int_0^{+\infty} \varphi(X_s)\, dA_s] \int_0^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r)\, dr\right) \quad ;$$

$$w_2(x) = E_x\left(\int_0^{+\infty} \exp[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s]\, \varphi(X_t) \int_0^t e^{-\beta r} f(X_r)\, dr\, dA_t\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r)\, dr \int_r^{+\infty} \exp[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s]\, \varphi(X_t)\, dA_t\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r) \exp[-\int_0^r \varphi(X_s)\, dA_s]\, dr\right)$$

$$- E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r) \exp[-\int_0^{+\infty} \varphi(X_s)\, dA_s]\, dr\right) ;$$

d'où

$$w(x) = E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r)\, dr\right) - E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r) \exp[-\int_0^r \varphi(X_s)\, dA_s]\, dr\right)$$

et

$$u_2(x) = v(x) - w(x) = E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} \exp[-\int_0^r \varphi(X_s)\, dA_s]\, f(X_r)\, dr\right) .$$

D'où l'expression de $u = u_1 + u_2$, qui **appartient à** $C^{2,\lambda}(M)$ **et vérifie** $(\beta - W)u = f$, $(\varphi - L)u = \psi$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2'. – Soit $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ si (El.1), $\varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$ si (El.2) ; $\varphi \geqslant 0$ et $\varphi \not\equiv 0$ dans chaque composante connexe de ∂M. Alors, pour $f \in C^{0,\lambda}(M)$, $\psi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $\psi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$), la fonction

$$u(x) = E_x \int_0^{+\infty} \exp[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s]\, f(X_t)\, dt + E_x \int_0^{+\infty} \exp[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s]\, \psi(X_t)\, dA_t$$

appartient à $C^{2,\lambda}(M)$ et vérifie $-Wu = f$, $(\varphi - L)u = \psi$.

Soient $L' = L - \varphi$, $K'_{\beta,0} = -(\overline{L'H_\beta})^{-1}$, $G'_{0,\beta} = (\beta - \overline{W}_{L'})^{-1}$; ces opérateurs existent pour $\beta \geqslant 0$ (théorèmes 1 et 2).

Pour $\beta > 0$, on a (proposition 2) :

$$(18)\quad G'_{0,\beta}\, f(x) + H_\beta\, K'_{\beta,0}\, \psi(x) = E_x\Big(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s]\, f(X_t)\, dt\Big)$$
$$+ E_x\Big(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp[-\int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s]\, \psi(X_t)\, dA_t\Big)$$

pour $f \in C^{0,\lambda}(M)$, $\psi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$, puis pour $f \in C(M)$, $\psi \in C(\partial M)$, les deux membres définissant des opérateurs $\geqslant 0$.

Soit v_β la solution de $(\beta - W)v_\beta = 0$, $-L'v_\beta = \psi$ $(\beta \geqslant 0)$; on a $v_\beta = H_\beta\, K'_{\beta,0}\, \psi$. De plus $-W(v_0 - v_\beta) = \beta v_\beta$, $-L'(v_0 - v_\beta) = 0$, donc $v_0 - v_\beta = G'_{0,0}(\beta v_\beta)$; d'où

$$\|v_0 - v_\beta\| \leqslant \beta\|G'_{0,0}\|\cdot\|v_\beta\| = \beta\|G'_{0,0}\|\cdot\|H_\beta\, K'_{\beta,0}\, \psi\| \leqslant \beta\|G'_{0,0}\|\cdot\|K'_{\beta,0}\|\cdot\|\psi\| .$$

On a donc $\lim_{\beta\to 0} H_\beta\, K'_{\beta,0}\, \psi = H_0\, K'_{0,0}\, \psi$; de même $\lim_{\beta\to 0} G'_{0,\beta}\, f = G'_{0,0}\, f$.

On peut donc passer à la limite dans (18) lorsque $\beta \to 0$, d'abord pour $f \in C^+(M)$, $\varphi \in C^+(\partial M)$, puis pour f, φ continues (par additivité).

Ceci démontre la proposition pour $f \in C^{0,\lambda}(M)$, $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$, resp. $C^{0,\lambda}(\partial M)$ d'après les corollaires des théorèmes 1 et 2 appliqués à l'opérateur L'.

PROPOSITION 3. – On a, pour $\rho \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\rho + \beta > 0$,

$$(19)\qquad K_{\beta,\rho}\, \varphi(x') = E_{x'} \int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\, e^{-\rho A_t}\, \varphi(X_t)\, dA_t, \qquad \varphi \in C(\partial M)$$

$$(20)\qquad G_{\rho,\beta}\, f(x) = E_x \int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\, e^{-\rho A_t}\, f(X_t)\, dt, \qquad \varphi \in C(M) .$$

C'est une simple conséquence des propositions 2 et 2' en observant que les deux membres sont des opérateurs positifs.

2.9. Interprétation stochastique de la condition L $(L \equiv \Gamma)$.

Soit $(\tau_t)_{t\geq 0}$ le changement de temps associé au temps local canonique A_t ; puisque A_t est portée par ∂M , $Y = (\bar{\bar{\Omega}}, \bar{\bar{F}}, (X_{\tau_t}), (\theta_{\tau_t}), (P_x)_{x\in\partial M\cup\{\delta\}})$ est un processus de Markov sur ∂M (§ 2.3) ; soit $(R_\rho)_{\rho>0}$ sa résolvante.

On a, pour $\varphi \in C(\partial M)$:

$$R_\rho\, \varphi(x') = E_{x'}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\rho t}\, \varphi(X_{\tau_t})\, dt\right) = E_{x'}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\rho A_t}\, \varphi(X_t)\, dA_t\right)$$

$$= K_{0,\rho}\, \varphi(x') \qquad \text{(proposition 3, formule (19))}.$$

Ce processus est donc le processus de résolvantes $(K_{0,\rho})_{\rho>0}$, de générateur $\overline{LH_0}$, d'où :

THÉORÈME 5. - Le processus déduit de X par le changement de temps associé au temps local canonique A_t est le processus de Markov sur ∂M , de résolvantes $(K_{0,\rho})_{\rho>0}$, de générateur $\overline{LH_0}$.

COROLLAIRE. - On a $P_{x'}$ $(A_t > 0$ pour tout $t > 0) = 1$, pour tout $x' \in \partial M$.

On a $\{\omega\ ;\ A_t(\omega) > 0$ pour tout $t > 0\} = \{\omega\ ;\ \tau_0(\omega) = 0\}$.

D'autre part, le processus (X_{τ_t}) est associé à un semi-groupe de Feller sur ∂M , donc il vérifie la condition de normalité (N) (§ 2.1), c'est-à-dire qu'on a $P_{x'}$ $\{X_{\tau_0} = x'\} = 1$. D'où

$$P_{x'}\ \{A_t > 0 \text{ pour tout } t > 0\} = P_{x'}\ \{\tau_0 = 0\} = E_x(P_{X_{\tau_0}}\ \{\tau_0 = 0\})$$

$$= P_{x'}\ (\tau_0 \circ \theta_{\tau_0} = 0) = 1 \quad .$$

Ce corollaire montre que la fonctionnelle A_t est non seulement portée par ∂M , mais qu'elle a pour support ∂M (voir [5]), ce qui justifie son nom de temps local sur ∂M .

Remarque 1. - Soit $\psi > 0$, $\psi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ et $L' = \psi L$ (voir § 2.4, remarque) ; $W_L = W_{L'}$, et on peut se demander quelle est la fonctionnelle qui fait passer du processus X au processus de générateur $L'H_0$. C'est la fonctionnelle

$$A'_t(\omega) = \int_0^t \psi^{-1}(X_s)\, dA_s \quad .$$

En effet, soit (τ'_t) le changement de temps associé à A'_t ; le processus $Y' = (X_{\tau'_t})$ est un processus sur ∂M (A'_t est évidemment aussi portée sur ∂M) ; soit (R'_ρ) la résolvante de Y' .

On a, pour $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$, $\rho > 0$,

$$R'_\rho \varphi(x') = E_x \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \varphi(X_{\tau'_t}) \, dt = E_x \int_0^{+\infty} e^{-\rho A'_t} \varphi(X_t) \, dA'_t$$

$$= E_{x'}\left(\int_0^{+\infty} \exp\left[-\rho \int_0^t \psi^{-1}(X_s) \, dA_s\right] \varphi(X_t) \, \psi^{-1}(X_t) \, dA_t\right) .$$

D'où $(\rho\psi^{-1} - LH_0) R'_\rho \varphi = \varphi\psi^{-1}$ (proposition 2'), c'est-à-dire

$$(\rho - \psi LH_0) R'_\rho \varphi = (\rho - L'H_0) R'_\rho \varphi = \varphi$$

C. Q. F. D.

Remarque 2. - Dans le cas considéré ici, on a $LH_0 \varphi = Q\varphi + T\varphi + \frac{\partial}{\partial\nu} H_0 \varphi$. D'autre part, le théorème 5 signifie que la trace de X sur ∂M , "observée" grâce à une échelle de temps convenable, est le processus de générateur LH_0 , le terme $Q + T$ caractérisant son déplacement sur ∂M , le terme $\frac{\partial}{\partial\nu} H_0 \varphi$ ses séjours à l'intérieur (qui, observés du bord, apparaissent comme des sauts de ∂M en ∂M).

On peut donc dire de façon assez heuristique que le processus X de générateur W_L "fonctionne" de la façon suivante : à l'intérieur, il se "déplace" comme le processus de générateur $\overline{(W , \mathcal{D})}$ où $\mathcal{D} = \{u \mid u \in C_0^2(M) , \gamma^0 Wu = 0\}$ (voir § 2.7, théorème 4) et que, arrivé au bord, ou il glisse (terme Q), ou il saute du bord sur le bord (terme T), ou il rentre à l'intérieur (terme $\frac{\partial}{\partial\nu} H_0$) ; ces dernières opérations se déroulant pendant une durée négligeable (de mesure de Lebesgue nulle) par rapport au temps naturel.

2.10. Interprétation stochastique du coefficient δ .

On considère toujours le processus X de générateur $\overline{W_L}$ avec $L \equiv \Gamma$, et on cherche à construire le processus Y de générateur $\overline{W_{L'}}$ où $L' = L - \delta W$, avec $\delta \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ si (El.1), $\delta \in C^{0,\lambda}(\partial M)$ si (El.2).

Soit $B_t(\omega) = t + \int_0^t \delta(X_s) \, dA_s$; B_t est une fonctionnelle additive continue de X , soit (σ_t) la famille de temps d'arrêt associé, et considérons le processus

$$Y = (\Omega , F , (X_{\sigma_t}) , (\theta_{\sigma_t}) , (P_x)) \qquad \text{(voir § 2.3).}$$

Soit $(R_\beta)_{\beta>0}$ la famille de résolvantes de Y ; on a, pour $f \in C^{0,\lambda}(M)$,

$$R_\beta f(x) = E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f(X_{\sigma_t})\, dt\right) = E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta B_t} f(X_t)\, dB_t\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp\left[-\int_0^t \beta\delta(X_s)\, dA_s\right] f(X_t)\, dt\right)$$

$$+ E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp\left[-\int_0^t \beta\delta(X_s)\, dA_s\right] f(X_t)\, \delta(X_t)\, dA_t\right) .$$

Donc (proposition 2, § 2.8) $R_\beta f$ vérifie l'équation

$$(\beta - W)R_\beta f = f , \qquad (\beta\delta - L)R_\beta f = \delta f \quad ;$$

qui peut encore s'écrire

$$(\beta - W)R_\beta f = f , \qquad (\delta W - L)R_\beta f = 0 \quad ;$$

on obtient donc le théorème suivant.

THÉORÈME 6. - Le processus déduit de X par le changement de temps associé à la fonctionnelle $B_t = t + \int_0^t \delta(X_s)\, dA_s$ ($\delta \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ si (El.1), $\delta \in C^{0,\lambda}(\partial M)$ si (El.2)) est le processus de générateur $\overline{W_{L'}}$, où $L' = L - \delta W$.

Remarque. - La fonctionnelle A_t ne chargeant que ∂M , le changement de temps associé à B_t ne modifie pas la loi du temps sur une trajectoire tant que celle-ci est à l'intérieur, par contre elle retarde cette loi lorsque la trajectoire atteint le bord $(B_t \geqslant t)$. Le coefficient δ peut donc être considéré comme une densité de "glue" sur le bord, qui retarde le processus Y , qui, par ailleurs, "fonctionne" exactement comme X , lorsqu'il atteint le bord.

Appendice 1.

Les semi-groupes construits possèdent la propriété (D) (exp. 3, th. 5.4).

PROPOSITION 1. - On considère un couple (W , L) défini dans l'introduction, où L est transversal et satisfait à (El.1) ou à (El.2). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout compact $K \subset \mathring{M}$, pour toute $g \in C^{3,\lambda}(M)$ ($g \in C^{2,\lambda}(M)$ si L satisfait à (El.1) et $\delta \equiv 0$, ou à (El.2)), il existe $f \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $f = g$ sur K , $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$, $Lu = 0$.

Vu les hypothèses faites, on peut appliquer au couple (W , L) les résultats de la première partie, en particulier les théorèmes 1 et 2.

LEMME 1. - Soient $\varepsilon > 0$, $\psi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ ($C^{0,\lambda}(\partial M)$ si (E1.2)) ; alors il existe $u \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $Lu = \psi$, $\|u\| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\beta > 0$; il existe $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$ telle que $LH_\beta \varphi = -\psi$, et $v \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $Lv = 0$, $\|v - H_\beta \varphi\| \leqslant \varepsilon$ (par exemple $\beta' G_{\beta'} H_\beta \varphi$ pour β' assez grand). Il suffit de prendre $u = v - H_\beta \varphi$.

LEMME 2. - Soient $\varepsilon > 0$, K un compact $\subset \mathring{M}$, $\psi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ ($C^{0,\lambda}(\partial M)$ si (E1.2)) ; alors il existe $h \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $h = 0$ sur K , $\|h\| \leqslant \varepsilon$, $Lh = \psi$.

On choisit une fonction θ de classe C^∞ nulle sur K , et valant 1 sur un voisinage de ∂M , avec $\|\theta\| = 1$, et on pose, pour $u \in C^2(M)$, $L_\theta(u) = L(\theta u)$.

L_θ est un opérateur frontière de Ventcel' qui satisfait, en même temps que L , soit à (E1.1), soit à (E1.2). De plus, si L est transversal, L_θ est transversal (car $\theta \equiv 1$ au voisinage de ∂M , et $t(x', \mathring{M}) = +\infty$ entraîne que, pour tout voisinage V de x' , $t(x', V) = +\infty$). On peut donc appliquer le lemme 1 à l'opérateur L_θ : il existe $v \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $L_\theta(v) = \psi$; $\|v\| \leqslant \varepsilon$. On prend $h = \theta v$.

C. Q. F. D.

On applique le lemme 2 à $\psi = -Lg$ (on remarque que, si l'on a (E1.2), $g \in C^{2,\lambda}(M)$ entraîne $Lg \in C^{0,\lambda}(M)$, si l'on a (E1.1) et $\delta \equiv 0$, $g \in C^{2,\lambda}(M)$ entraîne $Lg \in C^{1,\lambda}(M)$, si l'on a seulement (E1.1), $g \in C^{2,\lambda}(M)$ entraîne $Lg \in C^{1,\lambda}(M)$, car on a choisi W de classe C^∞). Il existe $h \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $\|h\| \leqslant \varepsilon$, $h = 0$ sur K , $Lh = -Lg$. $f = g + h$ a les propriétés voulues.

Remarque 1. - La proposition ci-dessus entraîne que les semi-groupes construits dans la première partie (théorème 2) de générateur $(\mathcal{D}_A , A) = \overline{(\mathcal{D}_L , W)}$ ont la propriété :

(D) Pour tout $x \in \mathring{M}$, il existe un voisinage V de x tel que, pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $u \in \mathcal{D}_A$ telle que $\|u - f\| \leqslant \varepsilon$, $u = f$ sur V .

Cette propriété (D) a été prise comme hypothèse dans l'exposé 3 pour analyser la forme du générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur une variété compacte à bord (voir exp. 3, th. 5.4).

Remarque 2. - De la proposition 1, on déduit le résultat intéressant suivant :

PROPOSITION 2. - Soit un opérateur frontière $L \equiv \Gamma$ (c'est-à-dire $\delta \equiv 0$), transversal et qui satisfait à (El.1) ou à (El.2). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout compact $K \subset \mathring{M}$, pour toute $g \in C^{2,\lambda}(M)$, il existe $f \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $f = g$ sur K, $\|f - g\| \leq \varepsilon$, $Lu = 0$.

En effet, on associe à L un opérateur W régulier (de diffusion elliptique par exemple), et on peut appliquer au couple (W , L) la proposition 1.

Appendice 2.

PROPOSITION. - Soient E un espace compact métrisable ; $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Feller sur $C(E)$, de générateur infinitésimal $(A , \mathcal{D}_A)$, de résolvantes $(R_\lambda)_{\lambda>0}$; $X = (\Omega , F , (X_t) , (\theta_t) , (P_x))$ le processus de Markov associé (voir § 2.1) ; φ une fonction continue non négative sur E. On pose

$$\tilde{R}_\lambda f(x) = E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \exp\left[-\int_0^t \varphi(X_s)\, ds\right] f(X_t)\, dt\right) , \quad (f \in \overline{B}(E)) .$$

Alors la famille $(\tilde{R}_\lambda)_{\lambda>0}$ est la famille de résolvantes d'un semi-groupe de Feller sur $C(E)$. Si $(\tilde{A} , \mathcal{D}_{\tilde{A}})$ est son générateur infinitésimal, on a $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{\tilde{A}}$, $\tilde{A} = A - \varphi I$. De plus, si R_0 existe, $\tilde{R}_0$ existe.

$\tilde{R}_\lambda$ est un opérateur positif de $\overline{B}(E)$ dans $\overline{B}(E)$. On pose $M_t = \exp[-\int_0^t \varphi(X_s) ds]$ alors $M_{t+s} = M_t . M_s \circ \theta_t$ $(t , s \geq 0)$.

On a successivement :

1° $\|\tilde{R}_\lambda f\| \leq \|f\| . \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|$.

2°
$$\begin{aligned}
(\lambda - \mu) \tilde{R}_\lambda \tilde{R}_\mu f(x) &= (\lambda - \mu)\, E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} M_t\, E_{X_t}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\mu s} M_s f(X_s)\, ds\right) dt\right) \\
&= (\lambda - \mu)\, E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} M_t \int_0^{+\infty} e^{-\mu s} M_s \circ \theta_t\, f(X_s \circ \theta_t)\, ds\, dt\right) \\
&= E_x\left(\int_0^{+\infty} (\lambda - \mu)\, e^{-(\lambda-\mu)t} \int_t^{+\infty} e^{-\mu s} M_s f(X_s)\, ds\, dt\right) \\
&= E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\mu s} M_s f(X_s)\, ds\right) \\
&\qquad - E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\mu s} M_s f(X_s) \int_s^{+\infty} (\lambda - \mu)\, e^{-(\lambda-\mu)t}\, dt\, ds\right) \\
&= \tilde{R}_\mu f(x) - \tilde{R}_\lambda f(x) .
\end{aligned}$$

3° $R_\lambda = (I + R_\lambda \Phi) \tilde{R}_\lambda$, où Φ désigne l'opérateur multiplication par φ.

En effet,

$$R_\lambda(\varphi \tilde{R}_\lambda\ f)(x) = E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\ \varphi(X_t)\ E_{X_t} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}\ M_s\ f(X_s)\ ds\ dt\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\ \varphi(X_t) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}\ M_s \circ \theta_t\ f(X_{s+t})\ ds\ dt\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{+\infty} \varphi(X_t)\ \exp\left[\int_0^t \varphi(X_s)\ ds\right] \int_t^{+\infty} e^{-\lambda u}\ \exp\left[-\int_0^u \varphi(X_v)\ dv\right] f(X_u)\ du\right)$$

$$= -\ E_x \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\ M_t\ f(X_t)\ dt + E_x \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\ f(X_t)\ dt$$

(intégration par parties)

$$= R_\lambda\ f(x) - \tilde{R}_\lambda\ f(x) \quad .$$

4° $\tilde{R}_\lambda(C(E)) \subset C(E)$.

Pour λ assez grand ($\lambda > \|\varphi\|$) , $I + R_\lambda\ \Phi$ est inversible dans $C(E)$, et on a $\tilde{R}_\lambda = (I + R_\lambda\ \Phi)^{-1}\ R_\lambda$, donc, si $f \in C(E)$, $\tilde{R}_\lambda\ f \in C(E)$.

Pour μ quelconque, on a, d'après 2°,

$$\tilde{R}_\mu[I + (\mu - \lambda)\tilde{R}_\lambda] = \tilde{R}_\lambda \quad ,$$

où λ est choisi $> \|\varphi\|$,

$$\|(\mu - \lambda)\tilde{R}_\lambda\| \leqslant \frac{|\mu - \lambda|}{\lambda} < 1$$

d'après 1°, donc $I + (\mu - \lambda)\tilde{R}_\lambda$ est inversible dans $C(E)$, ce qui donne

$$R_\mu(C(E)) \subset C(E) \quad .$$

5° $\lambda\tilde{R}_\lambda\ f \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} f$, $f \in C(E)$.

$$\|\lambda\tilde{R}_\lambda\ f - f\| = \|(I + R_\lambda\ \Phi)^{-1}\ \lambda R_\lambda\ f - f\| \qquad (\text{pour } \lambda > \|\varphi\|\ )$$

$$\leqslant \|\{(I + R_\lambda\ \Phi)^{-1} - I\}\ \lambda R_\lambda\ f\| + \|\lambda R_\lambda\ f - f\|$$

$$\leqslant \|(I + R_\lambda\ \Phi)^{-1} - I\| + \|\lambda R_\lambda\ f - f\| \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0 \text{ , car } \|\lambda R_\lambda\| = 1 \quad .$$

6° D'après 1°, 2°, 5° et compte tenu de 4°, $(\tilde{R}_\lambda)$ est la famille des résolvantes d'un semi-groupe de Feller sur $C(E)$ (théorème de Hille-Yosida).

7° Pour $\lambda > \|\varphi\|$,

$$(I + R_\lambda\ \Phi)f = R_\lambda\ g \iff f = \tilde{R}_\lambda\ g \qquad (f\ ,\ g \in C(E)) \quad ;$$

donc

$$f \in \mathcal{D}_{\tilde{A}} \iff (I + R_\lambda\ \Phi)f \in \mathcal{D}_A \iff f \in \mathcal{D}_A \qquad (\text{car } R_\lambda(\varphi f) \in \mathcal{D}_A\ )\ ;$$

d'où $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{\tilde{A}}$.

8° Toujours pour $\lambda > \|\varphi\|$,

$$\tilde{R}_\lambda(\lambda - (A - \Phi))f = (I + R_\lambda \Phi)^{-1} R_\lambda((\lambda - A) + \Phi)f \qquad (f \in \mathcal{D}_A)$$

$$= (I + R_\lambda \Phi)^{-1} (I + R_\lambda \Phi)f = f \quad .$$

Donc $\tilde{A} = A - \Phi = A - \varphi I$.

Appendice 3.

PROPOSITION (11). – Soient E un compact métrisable, $(\mathcal{D}_B , B)$ un opérateur linéaire de $C(E)$ dans $C(E)$. On suppose :

(i) $\mathcal{D}_B$ est dense dans $C(E)$.

(ii) Il existe un ouvert E_0 , dense dans E , tel que, si $f \in \mathcal{D}_B$ atteint un maximum positif en $x \in E_0$, il existe $x' \in E$ tel que $f(x) = f(x')$, $Bf(x') \leqslant 0$.

Alors $(\mathcal{D}_B , B)$ est préfermé.

Soit $\{u_n\}$ une suite de $\mathcal{D}_B$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} Bu_n$ existe (dans $C(E)$). Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} Bu_n = 0$.

Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} Bu_n$ prenne une valeur strictement positive, alors, puisque E_0 est dense dans E , il existe $x_0 \in E_0$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} Bu_n(x_0) > 0$. La convergence étant uniforme et E_0 ouvert, on peut trouver un voisinage de x_0 , $U \subset E_0$, $\varepsilon > 0$, et $p \in N$ tels que $Bu_n(x) > \varepsilon$ pour $x \in U$ et $n \geqslant p$. D'après (i), il existe $h \in \mathcal{D}_B$ telle que $h(x_0) > 1$, $h(y) < 0$ si $y \in E \setminus U$.

On pose $u'_n = u_n + \varepsilon(1 + \|Bh\|)^{-1} h$ $(u'_n \in \mathcal{D}_B)$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} u'_n(x_0) > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u'_n(y) < 0$ si $y \in E \setminus U$; donc on peut trouver $q \geqslant p$ tel que

$$u'_q(x_0) > \sup_{y\in E\setminus U} u'_q(y) \quad .$$

D'après (ii), il existe x' tel que $u_q(x) = u_q(x')$ et $Bu_q(x') \leqslant 0$. On a nécessairement $x' \in U$, mais alors :

$$Bu'_q(x') = Bu_q(x') + \varepsilon(1 + \|Bh\|)^{-1} Bh(x') > Bu_q(x') - \varepsilon > 0 \quad (\text{puisque } q \geqslant p) .$$

Ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} Bu_n$ ne peut prendre des valeurs > 0 . De même pour les valeurs < 0 , d'où la proposition.

---

(11) Cette proposition est due à VENTCEL' [9] dans un cas particulier et à SATO et UENO [6] sous la forme donnée ici.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BONY (J.-M.), COURRÈGE (P.) et PRIOURET (P.). - Solutions höldériennes de problèmes aux limites intégro-différentiels elliptiques donnant lieu au principe du maximum, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, 1966, Série A, p. 451.

[2] DYNKIN (E. B.). - Markov processes. - Berlin, Springer-Verlag, 1965 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 121-122).

[3] LOEVE (Michel). - Probability theory, 3rd ed. - Princeton, Van Nostrand, 1963 (University Series in higher Mathematics).

[4] MEYER (Paul-André). - Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 125-230 (Thèse Sc. Math, Paris, 1961).

[5] MEYER (Paul-André). - Le support d'une fonctionnelle additive continue, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 9e année, 1964/65, n° 10, 12 p.

[6] SATO (K.) and UENO (T.). - Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ., t. 4, 1965, p. 529-605.

[7] Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY : Théorie du potentiel, 5e année, 1960/61. - Paris, Secrétariat mathématique, 1961.

[8] Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY : Théorie du potentiel, 10e année, 1965/66. - Paris, Secrétariat mathématique, 1967.

[9] VENTCEL' (A. D.). - O Graničykh uslovijakh dlja mnogomernykh diffuzionnykh processov, Teor. Veroj. i Primen., t. 4, 1959, p. 172-185 ; On boundary conditions for multidimensional diffusion processes, Theor. Prob. and Appl., t. 4, 1959, p. 164-177.

[10] VOLKONSKIJ (V. A.). - Slyčajnaja zamena vpemeni v strogo markovskikh processakh, Teor. Veroj. i Primen., t. 3, 1958, p. 332-350 ; Random substitution of time in strong Markov processes, Theor. Prob. and Appl., t. 3, 1958, p. 310-326.