SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

PHILIPPE COURRÈGE

Fonctions de Green relatives à certains problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 10, nº 2 (1965-1966), exp. nº 5, p. 1-56

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1965-1966__10_2_A1_0>

FONCTIONS DE GREEN RELATIVES À CERTAINS PROBLÈMES AUX LIMITES INTÉGRO-DIFFÉRENTIELS DU SECOND ORDRE

par Philippe COURRÈGE

Désignant par M une variété à bord compacte, on considère, sur M, un opérateur de diffusion elliptique P, et un opérateur frontière de Ventcel' L de la forme

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial \gamma} + Q(\gamma^0 u) + Tu \qquad (u \in C^2(M))$$

[γ désigne ici la conormale intérieure sur ∂M associée à la métrique riemannienne g sur M conjuguée de la partie principale de P ; voir dans le présent séminaire [15] les exposés n° 1 (n° 2.8), n° 3 (n° 1.9 et 4.8) et n° 4 (n° II.1)].

On suppose que le système frontière (P , L) satisfait aux hypothèses du théorème 3 (resp. du théorème 3') de l'exposé n° 4 de [15] qui permettent de résoudre le problème aux limites

$$(1) \quad u \in C^{2,\lambda}(M) , \quad \begin{aligned} &Pu = - f && (f \in C^{0,\lambda}(M)) , \\ &Lu = - \varphi && [\varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M) \quad (\text{resp.} \quad \varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M))] . \end{aligned}$$

On se propose ici d'étudier des conditions suffisantes sur P et L pour que la solution u du problème (1) s'exprime sous la forme :

$$(2) \quad u(x) = \int_M G(x , y) f(y) \tau(dy) + \int_{\partial M} G(x , y') \varphi(y') \sigma(dy') \qquad (x \in M) ,$$

où τ et σ désignent les mesures riemanniennes sur M et ∂M, respectivement associées à la métrique riemannienne g et à la métrique induite par g sur ∂M ; et où $G(x , y)$ est un noyau-fonction positif sur M, continu sur le complémentaire de la diagonale de $M \times M$ et ayant sur la diagonale une singularité (uniforme) en $\overline{xy}^{2-n}$ [1]. Cette fonction G, qui est entièrement déterminée par (2), est la <u>fonction de Green</u> relative au système frontière (P , L) considéré. En particulier $G(x , y)$ constitue un noyau-fonction pour l'opérateur de Green G du système

---

[1] n étant la dimension de M $(n \geqslant 3)$, et $\overline{xy}$ désignant la distance géodésique sur M associée à la métrique riemannienne g.

(P, L) [$PGf = -f$, $LGf = 0$ $(f \in C^{0,\lambda}(M))$; voir l'exposé n° 4 (n° II.3)], et la restriction de $G(x, y)$ à $\partial M \times \partial M$ constitue un noyau-fonction pour l'opérateur K qui inverse l'opérateur pseudo-différentiel LH [H désignant l'opérateur harmonique relatif à P ; voir l'exposé n° 4 (n° I.6 et II.5)] ; c'est d'ailleurs en construisant directement ce noyau-fonction de K que l'on obtiendra les propriétés de la fonction de Green $G(x, y)$ à la frontière (voir les paragraphes 3 et 4 ci-dessous).

La définition des fonctions de Green figure au paragraphe 2 (n° 2.4), et les résultats obtenus dans les théorèmes III (n° 2.4), IV (n° 2.7), V (n° 3.4), et VI (n° 4.7). Le plan de l'exposé est le suivant :

- § 0. Terminologie ; Noyaux-fonction (page 5-02).
- § 1. Formule de Green pour un opérateur elliptique ; adjoint d'un système frontière (page 5-05).
- § 2. Construction d'une fonction de Green au sens large à partir d'une solution fondamentale ; formule de représentation intégrale de Stokes-Levi (page 5-14).
- § 3. Construction d'une fonction de Green au sens strict à partir d'un noyau-fonction sur ∂M pour l'opérateur K inverse de LH (page 5-23).
- § 4. Construction d'un noyau fonction sur ∂M pour l'opérateur K inverse de LH (page 5-30).
- Appendice A. Noyaux de Green et de Poisson du problème de Dirichlet (page 5-41).
- Appendice B. Noyau résolvant pour une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce sur $C(M)$ (page 5-47).
- Appendice C. Impossibilité d'une fonction de Green lorsque l'opérateur frontière L n'est pas quasi-local (page 5-51).
- Appendice D. Un théorème de convergence au bord (page 5-52).

Les fonctions de Green pour le problème de Neumann et le problème aux dérivées obliques ont été obtenues, dans le cas où $\overset{\circ}{M}$ est un ouvert de R^n par GIRAUD dans [6], [7], [8] et [9], et dans le cas d'une variété par S. ITO (voir [11], et aussi SATO et UENO [14], page 595).

Les résultats obtenus ici (théorèmes IV, V et VI) sont déduits de propriétés fines des noyaux de Green et de Poisson du problème de Dirichlet qui sont rassemblées dans l'appendice A sans démonstrations explicitées ni références précises : ces démonstrations semblent être encore à écrire (au moins dans le cadre "peu différentiable" adopté ici).

§ 0. Terminologie ; Noyaux-fonction.

0.1. Notations. - On désigne, dans tout cet exposé, par M une variété à bord compacte de classe C^∞ et de dimension n $(n \geqslant 2)$, par ∂M son bord, et par $\mathring{M} = M \setminus \partial M$ son intérieur (2). On désigne, par ailleurs, par λ un nombre réel tel que $0 < \lambda < 1$. Les espaces $C^m(M)$, $C^m(\partial M)$, $C_k^m(\mathring{M})$, $C^{m,\lambda}(M)$, $C^{m,\lambda}(\partial M)$ sont définis comme dans les exposés précédents de ce séminaire [15] [exp. 1, n° 1.3 (3) ; exp. 3, n° 1.1 et 2.1 ; et exp. 4, n° I.3]. On dira qu'un champs de tenseurs θ sur M est de classe $C^{m,\lambda}$ si, pour chaque carte locale (U , χ) de M , toutes ses composantes appartiennent à $C^{m,\lambda}(U)$.

On désigne par g une métrique riemannienne sur M de classe $C^{1,\lambda}$ (exp. 1, n° 2.1), par τ et σ respectivement les mesures riemanniennes sur M et ∂M associées à g et à la métrique g' induite par g sur ∂M (exp. 1, n° 2.2 et 2.3), par γ la conormale intérieure sur ∂M (exp. 1, n° 2.8), et par $d(x , y)$ ou encore $\overline{xy}$ la distance géodésique sur M (exp. 1, n° A.3) associées à g .

Pour chaque sous-variété à bord V de M , compacte, de classe C^∞ et de même dimension n que M , on désigne par γ_V la conormale intérieure sur ∂V associée à la métrique riemannienne induite par g sur V (en particulier, $\gamma_M = \gamma$), et par σ_V la mesure riemannienne associée à la métrique riemannienne induite par g sur ∂V .

0.2. - On appellera noyau-fonction au sens strict (ou seulement noyau) sur M une fonction numérique $N : (x , y) \to N(x , y)$ définie et continue sur $M \times M \setminus \Delta_{M\times M}$ (4). Pour un tel noyau N , on désignera par $\check{N}$ le noyau transposé $(\check{N}(x , y) = N(y , x))$, et, pour chaque $x \in M$, par N_x la fonction $N(x , .)$ définie sur $M \setminus \{x\}$.

On appellera noyau-fonction au sens large (ou seulement noyau au sens large) sur M une fonction numérique $N : (x , y) \to N(x , y)$ définie et continue sur $\mathring{M} \times M \setminus \Delta_{M\times M}$ (4). Tout noyau-fonction au sens strict sur M induit un noyau au

---

(2) On ne suppose, ni que M est connexe, ni que chaque composante connexe de M a un bord non vide, ni même que $\partial M \neq \emptyset$. Voir à ce sujet la remarque 3 du n° 1.9. Dans les paragraphes 3 et 4, on supposera $n \geqslant 3$.

(3) N° 1.3 de l'exposé n° 1 du présent séminaire [15].

(4) $\Delta_{M\times M}$ désigne la diagonale de $M \times M$.

sens large. Si N est un noyau au sens large, et si $x \in \mathring{M}$, on note aussi N_x la fonction $N(x\,,\,.)$ définie sur $M \setminus \{x\}$.

Si $q \leqslant n$ est un nombre réel, on dira que <u>le noyau</u> N <u>au sens large sur</u> M <u>est d'ordre</u> $-q$ [5] s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(0.2) \qquad |N(x\,,\,y)| \leqslant c\, \overline{xy}^{q-n} \qquad \text{pour } x \in \mathring{M}\,,\ y \in M\,,\ x \neq y\,,\ \text{si } q < n$$

et

$$(0.2') \qquad |N(x\,,\,y)| \leqslant c \log \frac{\delta(M)}{\overline{xy}} \qquad \text{pour } x \in \mathring{M}\,,\ y \in M\,,\ x \neq y\,,\ \text{si } q = n \ (^6)$$

(si N est un noyau au sens strict, ces relations valent aussi, par continuité, pour $x \in \partial M$). On dira que N <u>est d'ordre</u> $-q$ <u>localement</u> si, pour tout compact K de $\mathring{M}$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que,

$$(0.3) \qquad |N(x\,,\,y)| \leqslant C_K\, \overline{xy}^{q-n} \qquad \text{pour } x \in K\,,\ y \in M\,,\ x \neq y\,,\ \text{si } q < n$$

et

$$(0.3') \qquad |N(x\,,\,y)| \leqslant C_K \log \frac{\delta(M)}{\overline{xy}} \qquad \text{pour } x \in K\,,\ y \in M\,,\ x \neq y\,,\ \text{si } q = n \ (^6).$$

On dira que le noyau N (au sens strict ou au sens large) sur M est de classe C^m en y si, pour chaque $x \in \mathring{M}$, la fonction $N_x = N(x\,,\,.)$ est de classe C^m sur $M \setminus \{x\}$, et ceci continûment en $(x\,,\,y)$ en dehors de la diagonale [autrement dit, si, pour tout compact K de $\mathring{M}$, l'application $x \to N_x$ est continue de K dans $C^m(M \setminus K)$ (exp. 3, n° 1.1)].

On dira que <u>le noyau</u> N <u>est de classe</u> $C^{m,\lambda}_{loc}$ <u>en</u> y si, pour chaque $x \in \mathring{M}$, $N_x \in C^{m,\lambda}_{loc}(M \setminus \{x\})$, et si, pour chaque compact K de $\mathring{M}$, l'application $x \to N_x$ est continue de K dans $C^{m,\lambda}_{loc}(M \setminus K)$.

0.3. - On appliquera, en particulier, les notions introduites au n° 0.2 à la variété sans bord ∂M de dimension $n-1$ munie de la métrique riemannienne g' induite par g [7]. Par exemple, un noyau-fonction k sur ∂M d'ordre $-q$ $(q < n-1)$ est une fonction numérique $(x'\,,\,y') \to k(x'\,,\,y')$, définie et

---

[5] Ceci par référence au cas où l'opérateur intégral associé à N (n° 0.4) admet un symbole principal (voir la remarque 3 du n° 2.2) qui est alors "homogène d'ordre $-q$ ".

[6] $\delta(M)$ désignant le diamètre de M.

[7] Lorsque $n = 2$, ∂M est de dimension 1 ; les notions introduites au n° 0.2 pour $n \geqslant 3$, subsistent pour $n = 1$.

continue sur $\partial M \times \partial M \setminus \Delta_{\partial M \times \partial M}$, pour laquelle il existe une constante $C > 0$ telle que,

(0.4) $|k(x', y')| \leqslant C\, \overline{x'y'}^{\,q-n+1}$ $(x' \in \partial M\,,\; y' \in \partial M\,,\; x' \neq y')$ (8) .

0.4. Opérateur intégral associé à un noyau-fonction d'ordre $-q$ $(0<q<n)$. - Soit N un noyau-fonction au sens large (n° 0.2) sur M d'ordre $-q$ localement avec $0 < q < n$. En vertu de (0.3), pour chaque $x \in \mathring{M}$, $N_x \in \mathcal{L}^1(M, \tau)$.

Si A est un opérateur linéaire de $C(M)$ dans $C(\mathring{M})$, on dira que A admet N comme noyau-fonction (ou seulement comme noyau), si, pour chaque $x \in \mathring{M}$, et $f \in C(M)$,

$$Af(x) = \int_M N(x, y)\, f(y)\, \tau(dy) \quad . \tag{0.5}$$

Inversement, si N est un noyau-fonction (au sens strict) sur M d'ordre $-q$, $N_x \in \mathcal{L}^1(M, \tau)$ pour tout $x \in M$, et la relation (0.5) [pour $x \in M$ et $f \in \mathcal{L}^\infty(M, \tau)$] définit une application linéaire continue A de $\mathcal{L}^\infty(M, \tau)$ dans $C(M)$. A est même une application linéaire compacte de $\mathcal{L}^\infty(M, \tau)$ dans $C(M)$ [et aussi de $C(M)$ dans $C(M)$] : l'image par A de la boule unité de $\mathcal{L}^\infty(M, \tau)$ est un sous-ensemble équicontinu de $C(M)$ [on établit ce résultat en partageant l'intégrale (0.5) en deux morceaux selon la méthode habituelle ; voir à ce sujet l'appendice B].

On dira que A est l'opérateur intégral de noyau N, et on désignera en général par la même lettre l'opérateur intégral A de $C(M)$ dans $C(M)$ et son noyau N.

On appliquera, en particulier, les considérations précédentes à la variété ∂M munie de la métrique riemannienne g'.

§ 1. Formule de Green pour un opérateur elliptique ; adjoint d'un système frontière

La formule de Green (voir les n° 1.3 et 1.6 ci-dessous) est à la base de la construction des fonctions de Green cherchées (voir le § 2). Dans ce premier paragraphe, on introduit les éléments constitutifs de cette formule : adjoint d'un opérateur elliptique (n° 1.1) et d'un système frontière (n° 1.5 et 1.6).

---

(8) La distance géodésique sur ∂M associée à g' est équivalente à la distance sur ∂M induite par d.

1.1. Les opérateurs différentiels de classe A_λ. - Soient P un opérateur différentiel du second ordre sur M, et Π sa partie principale du second ordre (exp. 3, n° 1.2 et 1.4). Si Π est de classe C^1, on sait (exp. 3, n° 1.7), compte tenu de ce que g est de classe C^1 par hypothèse (n° 0.1), qu'il existe un champs de vecteurs X et un seul sur M tel que,

$$Pu = \operatorname{div}_g(\Pi(du)) + \langle du , X\rangle + P1.u \qquad (u \in C^2(M)) \quad (^9) . \tag{1.1}$$

Ceci étant, on dira que P est de classe A_λ relativement à g (ou seulement de classe A_λ) si Π et le champs de vecteurs X introduit par (1.1) sont de classe $C^{1,\lambda}$, et si $P1 \in C^{0,\lambda}(M)$ [P est alors de classe $C^{0,\lambda}$ (10)].

Remarque 1. - On notera que, si $\hat{g}$ est une autre métrique riemannienne sur M de classe $C^{1,\lambda}$, l'appartenance de P à la classe A_λ relativement à g n'entraîne pas nécessairement celle relative à $\hat{g}$: utilisant la relation

$$\operatorname{div}_g(Z) = \sqrt{\hat{g}/g}\ \operatorname{div}_{\hat{g}}(\sqrt{g/\hat{g}}.Z)$$

[elle-même conséquence de la caractérisation de l'opérateur de divergence (exp. 1, n° 2.6 et 2.2)], on obtient en effet à partir de (1.1),

$$\begin{aligned} Pu &= \operatorname{div}_{\hat{g}}(\Pi(du)) + \sqrt{\hat{g}/g}\ \langle d(\sqrt{g/\hat{g}}) , \Pi(du)\rangle + \langle du , X\rangle + P1.u \\ &= \operatorname{div}_{\hat{g}}(\Pi(du)) + \langle du , X + \sqrt{\hat{g}/g}\ \Pi(d(\sqrt{g/\hat{g}}))\rangle + P1.u , \end{aligned}$$

$\Pi(d(\sqrt{g/\hat{g}}))$ n'est en général que de classe $C^{0,\lambda}$. Toutefois, on voit que l'indépendance de la classe A_λ vis-à-vis de g a lieu lorsque g est de classe $C^{2,\lambda}$.

Remarque 2. - Dans le même ordre d'idées, voici une condition suffisante classique (voir [13], page 9) d'appartenance à la classe A_λ s'exprimant en termes de coordonnées : On dira que P est de classe A'_λ si, dans toute carte locale (U , χ) de M (11), P s'exprime sous la forme,

$$Pu = \sum_{i,j} a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^i\, \partial \chi^j} + \sum_i a^i \frac{\partial u}{\partial \chi^i} + a.u \qquad (u \in C^2(U)) ,$$

---

(9) Les notations sont celles du n° 1.7 de l'exposé n° 3 ; div_g désigne l'opérateur de divergence associé à g (exp. 1, n° 2.6).

(10) Autrement dit, P applique (continûment) $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M)$.

(11) La propriété requise ci-dessous est invariante par changement de carte.

où les a^{ij} $(1 \leqslant i , j \leqslant n)$ sont de classe $C^{2,\lambda}$, les a^i de classe $C^{1,\lambda}$, où a est de classe $C^{0,\lambda}$. Tout opérateur P de classe A'_λ est aussi de classe A_λ relativement à g.

1.2. Adjoint d'un opérateur de classe A_λ. - Si P est un opérateur de classe A_λ relativement à g, on définit un opérateur P^* de même classe A_λ relativement à g en posant :

$$(1.2) \qquad P^*u = \mathrm{div}_g(\Pi(du)) - \mathrm{div}_g(uX) + P1.u$$

$$(1.2') \qquad = \mathrm{div}_g(\Pi(du)) - \langle du , X\rangle + (P1 - \mathrm{div}_g(X)).u \qquad (u \in C^2(M))$$ (12) .

L'opérateur P^* sera appelé l'adjoint de P relativement à g (13).

P^* a même partie principale que P, et $(P^*)^* = P$.

Lorsque P est un opérateur elliptique sur M (exp. 3, n° 1.9) dont la partie principale est conjuguée de la métrique riemannienne g (exp. 1, n° 2.5), les relations (1.1) et (1.2) se réduisent à :

$$(1.3) \qquad Pu = \Delta_g u + \langle du , X\rangle + P1.u \qquad (u \in C^2(M)) ,$$

$$(1.4) \qquad P^*u = \Delta_g u - \mathrm{div}_g(uX) + P1.u \qquad (u \in C^2(M))$$ (14) .

On dira alors seulement que P^* est l'adjoint de P.

Remarque 1. - Si P est de classe A'_λ, il en est de même de P^*.

Remarque 2. - Si P est un opérateur de diffusion (exp. 3, n° 1.8), il n'en est pas nécessairement de même de P^* : $P^*1 = P1 - \mathrm{div}_g(X)$ peut ne pas être partout $\leqslant 0$.

1.3. - La formule de Green pour un opérateur elliptique de classe A_λ justifie l'introduction de l'opérateur adjoint :

PROPOSITION. - Soit P un opérateur elliptique sur M dont la partie principale est conjuguée de la métrique riemannienne g (n° 0.1). On suppose que P

---

(12) $\mathrm{div}_g(uX) = u\,\mathrm{div}_g(X) + \langle du , X\rangle$ (exp. 1, n° 2.6, relation (2.11)).

(13) Cette définition sera justifiée par la formule de Green (n° 1.3).

(14) Δ_g désignant l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à g (exp. 1, n° 3.3).

est de classe A_λ (relativement à g ; n° 1.1), et on pose ([15]) :

$$p(x') = g_{x'}(X_{x'}\ ,\ \gamma_{x'}) \qquad (x' \in \partial M) \quad [p = g(X\ ,\ \gamma)]\ .$$

Alors, $p \in C^{0,\lambda}(\partial M)$, et on a

$$(1.5) \quad \int_M \{u\ Pv - v\ P^* u\}\ d\tau = - \int_{\partial M} \{u \frac{\partial v}{\partial \gamma} - v \frac{\partial u}{\partial \gamma} + uvp\}\ d\sigma \quad (u\ ,\ v \in C^2(M)) \quad ([15]).$$

La relation (1.5) résulte de la définition de P^* [relation (1.4)] en vertu des formules de Green (G) et (G") (exp. 1, n° 3.2 et 3.4), et de la propriété de dérivation de l'opérateur de divergence [exp. 1, n° 2.6, relation (2.11) :

$$u\langle dv\ ,\ X\rangle + v\ \mathrm{div}_g(uX) = \mathrm{div}_g(uvX)\ ].$$

Remarque 1. - On peut définir un adjoint P^*, de telle sorte que (1.5) ait lieu, pour certains opérateurs P qui ne sont pas de classe A_λ [par exemple ceux de la classe A_0 définie en remplaçant $C^{m,\lambda}$ par C^m $(m = 1\ ,\ 0)$ dans la définition de A_λ].

Remarque 2. - Lorsque P est un opérateur quelconque de classe A_λ relativement à g, on établit de façon analogue à (1.5) la relation :

$$(1.6) \quad \int_M \{u\ Pv - v\ P^* u\}\ d\tau$$

$$= - \int_{\partial M} \{u\ g(\Pi(dv)\ ,\ \gamma) - v\ g(\Pi(du)\ ,\ \gamma) + uv\ g(X\ ,\ \gamma)\}\ d\sigma \quad (u\ ,\ v \in C^2(M))\ .$$

[Cette relation se réduit à (1.2) si $\Pi = \check{g}$, puisqu'alors (exp. 1, n° 2.4 et 2.5),

$$\Pi(du) = \mathrm{grad}_g\ u \qquad \text{et} \qquad g(\Pi(du)\ ,\ \gamma) = g(\mathrm{grad}_g\ u\ ,\ \gamma) = \frac{\partial u}{\partial \gamma}\ ].$$

1.4. Adjoint d'un opérateur sur ∂M. - Si A est une application linéaire dans $C(\partial M)$ d'un sous-espace dense $\mathfrak{A}$ de $C(\partial M)$, on dira que A admet un adjoint relativement à g' ([16]), s'il existe une application linéaire A^* de $\mathfrak{A}$ dans $C(\partial M)$ telle que,

$$(1.7) \qquad \int_{\partial M} \{\varphi\ A\psi - \psi\ A^* \varphi\}\ d\sigma = 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{A}\ ,\ \psi \in \mathfrak{A})\ .$$

([15]) Avec les notations du n° 0.1 ; on notera que γ est ici la conormale intérieure et non extérieure comme dans les formules (G) et (G") de l'exposé n° 1.

([16]) g' est la métrique riemannienne induite par g sur ∂M (n° 0.1).

L'opérateur A^* [qui est entièrement déterminé par (1.7) [17]] sera appelé l'adjoint de A relativement à g'.

Si, relativement à g', A admet A^* pour adjoint, A^* admet A pour adjoint $[(A^*)^* = A]$.

On étudiera ci-dessous (n° 1.9) l'adjoint de certains opérateurs de Levy sur la variété ∂M (exp. 3, n° 2.4). En ce qui concerne les opérateurs différentiels (sur la variété ∂M), à partir de la formule de Green (G) (exp. 1, n° 3.2) et de la propriété de dérivation de la divergence, on établit comme au n° 1.3 :

PROPOSITION. - Soit Q un opérateur différentiel du second ordre sur ∂M. On suppose Q de classe A_λ relativement à g' [18]. Alors, relativement à g', Q [19] admet un adjoint Q^* qui est aussi de classe A_λ.

1.5. - On appellera opérateur frontière de classe A_λ relativement à g, un opérateur frontière L sur M (exp. 3, n° 4.2) de la forme [20] [21] :

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial \gamma} + Q(\gamma^0 u) + T(\gamma^0 u) \qquad (u \in C^2(M)) \tag{1.8}$$

où Q est un opérateur différentiel semi-elliptique sur ∂M (exp. 3, n° 1.8), et T une application linéaire de $C^2(\partial M)$ dans $C^0(M)$, ayant les propriétés suivantes :

- Q est de classe A_λ relativement à g' (n° 1.1) [en particulier (proposition 1.3) Q admet, relativement à g', un adjoint Q^* de classe $C^{0,\lambda}$].
- T admet un adjoint T^* relativement à g'.
- T et T^* appliquent continûment $C^2(\partial M)$ dans $C^{0,\lambda}(\partial M)$.

Remarque 1. - Un opérateur frontière de classe A_λ n'est pas exactement un opérateur de Ventcel' au sens donné à ce terme dans les exposés n° 3 et n° 4 (exp. 3, n° 4.8 ; exp. 4, n° II.1) : il faudrait pour cela que T soit un opérateur de Levy sur ∂M (exp. 3, n° 4.7), et que Q soit un opérateur de diffusion [c'est-à-dire que $Q1 \leqslant 0$; exp. 3, n° 1.8].

---

(17) $\mathfrak{a}$ est supposé dense dans $C(\partial M)$.

(18) On applique ici à la variété ∂M et à la métrique g' les notions introduites aux n° 1.1 et 1.2 pour M et g.

(19) Considéré comme opérateur de $C^2(\partial M)$ dans $C(\partial M)$.

(20) Avec les notations introduites au n° 0.1 ; γ est la conormale intérieure sur ∂M associée à g. Voir à ce sujet le n° 3.6 ci-dessous.

(21) $\gamma^0 u$ désigne la restriction de u à ∂M.

Remarque 2. - Un opérateur frontière L de la forme (1.8) est quasi-local (exp. 3, n° 4.2 et 4.7) ; voir à ce sujet l'appendice C.

1.6. - L'adjoint d'un système frontière peut alors être défini comme suit : On appellera d'abord système frontière de classe A_λ un couple (P, L), où P est un opérateur elliptique de classe A_λ (relativement à g ; n° 1.1) dont la partie principale est conjuguée de g (exp. 1, n° 2.5), et L un opérateur frontière de classe A_λ relativement à g (n° 1.5).

Pour un tel système frontière (P, L), on désigne par L^* l'opérateur frontière (lui aussi de classe A_λ relativement à g) défini par,

$$L^* u = \frac{\partial u}{\partial \gamma} + Q^*(\gamma^0 u) + T^*(\gamma^0 u) - pu \qquad (u \in C^2(M)) \quad , \tag{1.9}$$

où p désigne la fonction $g(X, \gamma)$ qui intervient au second membre de la formule de Green relative à P (n° 1.3) [on notera que L^* ne dépend que de L et non de sa décomposition sous la forme (1.8)].

Par définition, l'adjoint du système frontière (P, L) de classe A_λ sera le système frontière (P^*, L^*).

(P^*, L^*) est aussi de classe A_λ, et son adjoint coïncide avec (P, L) [vérification immédiate, compte tenu des relations $P^{**} = P$ (n° 1.2), $Q^{**} = Q$, $T^{**} = T$ (n° 1.4) et $X^* = -X$ (qui entraîne $p^* = -p$)].

On dira aussi que L^* est l'opérateur frontière adjoint de L relativement à P.

La formule de Green (1.5) (n° 1.2) admet alors l'extension suivante (vérification immédiate à partir des définitions) :

THÉORÈME I. - Soient (P, L) un système frontière de classe A_λ, et (P^*, L^*) le système frontière adjoint. Alors :

$$\int_M \{u\, Pv - v\, P^* u\}\, d\tau = - \int_{\partial M} \{u\, Lv - v\, L^* u\}\, d\sigma \qquad (u, v \in C^2(M)) \quad . \tag{1.10}$$

1.7. Systèmes frontière elliptiques d'ordre 1 et d'ordre 2. - On dira que le système frontière (P, L) de classe A_λ [22] est elliptique d'ordre 1 (resp. elliptique d'ordre 2) si, dans la décomposition de L sous la forme (1.8), Q

---

[22] n° 1.6.

est un opérateur différentiel du premier ordre [resp. un opérateur elliptique (exp. 3, n° 1.9)] sur ∂M, et si T et T^* appliquent continûment $C^2(\partial M)$ dans $C^{1,\lambda}(\partial M)$ [resp. $C^{0,\lambda}(\partial M)$].

Les théorèmes 3 et 3' de l'exposé n° 4 entraînent alors, en vertu du théorème de stabilité de l'indice (exp. 4, n° I.4) et de la compacité de T [compacité de $C^{2,\lambda}(\partial M)$ dans $C^{1,\lambda}(\partial M)$ dans le cas elliptique d'ordre 1, et de $C^{2,\lambda}(\partial M)$ dans $C^{0,\lambda}(\partial M)$ dans le cas elliptique d'ordre 2], les propriétés suivantes :

(I_1) Si (P, L) est de classe A_λ et elliptique d'ordre 1, l'application $u \to (Pu, Lu)$ est d'indice 0 de $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M) \times C^{1,\lambda}(\partial M)$.

(I_2) Si (P, L) est de classe A_λ et elliptique d'ordre 2, l'application $u \to (Pu, Lu)$ est d'indice 0 de $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$.

De plus, si (P, L) est elliptique d'ordre 1 (resp. d'ordre 2), il en est de même de (P^*, L^*). En outre, "l'existence" pour le problème aux limites $Pu = f$, $Lu = 0$ entraîne "l'unicité" pour le problème aux limites $P^*u = f$, $L^*u = \varphi$:

PROPOSITION. - Soit (P, L) un système frontière de classe A_λ. On suppose que le problème aux limites $Pu = -f$, $Lu = 0$ admet une solution $u \in C^2(M)$ pour un ensemble $\mathcal{U}$ dense dans $C(M)$ de seconds membres f. Alors,

$$u \in C^2(M), \qquad P^*u = 0 \text{ et } L^*u = 0 \Rightarrow u = 0 \quad (^{23}).$$

En effet, soit $u \in C^2(M)$ tel que $P^*u = 0$ et $L^*u = 0$. On a, d'après la formule de Green (1.10),

$$\int_M u\, Pv\, d\tau + \int_{\partial M} u\, Lv\, d\sigma = 0 \qquad \text{pour tout } v \in C^2(M) .$$

D'où

$$\int_M uf\, d\tau = 0 \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{U}$$

d'après l'hypothèse ; d'où $u = 0$, et la proposition.

De la proposition précédente et des propriétés (I_1) et (I_2) découle le fait important que "l'unicité" pour le problème aux limites $Pu = f$, $Lu = \varphi$ entraîne "l'existence" pour le problème adjoint $P^*u = f$, $L^*u = \varphi$:

---

(23) Comme tous ceux de ce paragraphe, ce résultat reste valable dans le cas où $\partial M = \emptyset$ après une adaptation évidente.

THÉORÈME II. - Soit (P , L) un système frontière de classe A_λ elliptique d'ordre 1 [resp. d'ordre 2]. On suppose que

(U) $$u \in C^2(M) , \quad Pu = 0 \text{ et } Lu = 0 \Longrightarrow u = 0 .$$

Alors, les applications $u \to (Pu , Lu)$ et $u \to (P^* u , L^* u)$ sont des isomorphismes de $C^{2,\lambda}(M)$ sur $C^{0,\lambda}(M) \times C^{1,\lambda}(\partial M)$ [resp. de $C^{2,\lambda}(M)$ sur $C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$].

On appliquera, en particulier, ce résultat dans le cas où la propriété d'unicité (U) est assurée par les propriétés de maximum étudiées dans l'exposé n° 4 (n° II.3). Plus précisément :

1.8. - On dira que <u>le système frontière</u> (P , L) <u>de classe</u> A_λ <u>(n° 1.6) est du type</u> (pm) [24] si :

- P est un opérateur de diffusion (exp. 3, n° 1.8), c'est-à-dire : $P1 \leqslant 0$.
- L est un opérateur frontière de Ventcel' (exp. 3, n° 4.7 et 4.8 ; et n° 1.5 ci-dessus) : c'est-à-dire, dans la forme (1.8) de L , Q est un opérateur de diffusion $(Q1 \leqslant 0)$ et T est un opérateur de Levy sur ∂M .
- Dans chaque composante connexe de M , l'une des deux fonctions $P1$ ou $L1$ n'est pas identiquement nulle.

De la proposition 7 de l'exposé n° 4 (n° II.2), il résulte que, si (P , L) est du type (pm) ,

$$u \in C^2(M) , \quad Pu \leqslant 0 \text{ et } Lu \leqslant 0 \Longrightarrow u \geqslant 0 .$$

En particulier, l'hypothèse d'unicité (U) du théorème II est satisfaite.

1.9. <u>Une condition suffisante pour qu'un opérateur de Levy sur</u> ∂M <u>admette un adjoint</u>. - Soient η une fonction de $C(\partial M)$, et $t(x' , y')$ un noyau fonction sur ∂M d'ordre μ avec $0 < \mu < 1$ (n° 0.3). On définit une application linéaire continue T de $C^1(\partial M)$ dans $C(\partial M)$ en posant,

$$(1.11) \quad T\varphi(x') = \eta(x') \varphi(x') + \int_{\partial M} t(x' , y')[\varphi(y') - \varphi(x')] \sigma(dy') \qquad [x' \in \partial M , \quad \varphi \in C^1(\partial M)] .$$

En particulier, lorsque η est une fonction $\leqslant 0$, et t un noyau $\geqslant 0$, T est un opérateur de Levy sur ∂M d'ordre 1 (exp. 3, n° 2.6 et 2.10).

---

[24] Principe du maximum.

PROPOSITION. - Si le noyau t est symétrique $(t = \check{t})$, alors l'opérateur T défini par (1.11) est auto-adjoint (relativement à μ' ; n° 1.4) :

(1.12) $$\int_{\partial M} \varphi T\psi \, d\sigma = \int_{\partial M} \psi T\varphi \, d\sigma \qquad (\varphi , \psi \in C^1(\partial M)) \quad .$$

En effet, φ et ψ étant des fonctions de $C^1(\partial M)$, on a,

$$I = \iint_{\partial M\times\partial M} t(x , y)[\varphi(y) - \varphi(x)][\psi(y) - \psi(x)] \, \sigma(dx) \, \sigma(dy)$$

$$= \iint_{\partial M\times\partial M} t(x , y)[\varphi(y) - \varphi(x)] \, \psi(y) \, \sigma(dx) \, \sigma(dy) - \iint_{\partial M\times\partial M} t(x , y)[\varphi(y) - \varphi(x)] \, \psi(x) \, \sigma(dx) \, \sigma(dy)$$

$$= \int_{\partial M} \psi(y) \, \sigma(dy) \int_{\partial M} t(x , y)[\varphi(y) - \varphi(x)] \, \sigma(dx) - \int_{\partial M} \psi(x) \, \sigma(dx) \int_{\partial M} t(x , y)[\varphi(y) - \varphi(x)] \, \sigma(dy)$$

$$= - 2 \int_{\partial M} \psi(x) \, \sigma(dx) \int_{\partial M} t(x , y)[\varphi(y) - \varphi(x)] \, \sigma(dy) \quad ,$$

d'après la symétrie de t ;

$$= - 2 \int_{\partial M} \varphi(x) \, \sigma(dx) \int_{\partial M} t(x , y)[\psi(y) - \psi(x)] \, \sigma(dy) \quad ,$$

en échangeant les rôles de φ et ψ ;

d'où la proposition.

<u>Remarque</u> 1. - On établit comme dans l'exposé n° 4 (n° I.8) que, pour que l'opérateur T défini par (1.11) applique $C^1(\partial M)$ dans $C^{0,\lambda}(\partial M)$, il suffit que

$$\eta \in C^{0,\lambda}(\partial M) \quad ,$$

et que le noyau t soit de la forme,

(1.13) $$t(x' , y') = f(x' , y') \, \overline{x'y'}^{-n-\alpha} \quad ,$$

où $\alpha < 1 - 2\lambda$ et où f est une fonction mesurable bornée sur $\partial M \times \partial M$ telle que,

$$|f(x_1' , y) - f(x_2' , y)| \leqslant \text{Cte} \, \overline{x_1' x_2'}^{\mu} \quad (x_1' , x_2' , y \in \partial M) \quad \text{avec} \quad 1 > \mu \geqslant \frac{\lambda}{1 - \lambda - \alpha} .$$

On peut obtenir aussi, dans le même ordre d'idée, une condition suffisante pour que T applique $C^2(\partial M)$ dans $C^{1,\lambda}(\partial M)$: il suffit pour cela, au moins lorsque

λ est assez petit, que t soit de la forme (1.13) précédente, et que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- $t(. , y')$ est de classe C^1 sur $\partial M \setminus \{y'\}$ pour tout $y' \in \partial M$.
- Pour tout champs de vecteurs X sur ∂M de classe C^∞ , le noyau

$$\frac{\partial}{\partial X_{x'}} t(. , y') = \frac{\partial}{\partial X} t(x' , y')$$

satisfait aux conditions (a') et (b') du théorème 2 de l'exposé n° 4 (n° I.8).

- Les fonctions $x' \rightarrow \int_{\partial M} t(x' , y') \, \sigma_\alpha(x' , y')(\chi_\alpha^j(y') - \chi_\alpha^j(x')) \, \sigma(dy')$ sont de classe $C^{1,\lambda}$ sur ∂M (avec les notations introduites au n° 2.6 de l'exposé n° 3).

Remarque 2. - On peut établir aussi l'existence d'un adjoint convenable pour T lorsque le noyau t n'est plus symétrique, mais antisymétrique [donc aussi dans le cas général, par décomposition de t en parties symétrique et antisymétrique], ou lorsque T est d'ordre supérieur à 1 ,

$$[\quad T\varphi(x') = a(x') \, \varphi(x') + \frac{\partial}{\partial X} \varphi(x') + \int_{\partial M} t(x' , y')[\varphi(y') - \theta_{x'} \, \varphi(y')] \, \sigma(dy')$$

(avec les notations du n° 2.6 de l'exposé n° 3), t étant un noyau d'ordre supérieur à 1 sur ∂M] ; la situation est alors plus complexe et exige des hypothèses sur t faisant intervenir un "développement en parties homogènes" [voir à ce sujet le théorème 4.4 de [10]].

Remarque 3. - On notera que, dans le cas où M n'est pas connexe, la valeur de $T\varphi(x')$ $(\varphi \in C^2(\partial M))$, pour x' sur une composante connexe C de M , peut dépendre des valeurs prises par φ sur les composantes connexes de M autres que C (c'est pour inclure cette éventualité que M n'a pas été supposée connexe).

§ 2. Construction d'une fonction de Green au sens large à partir d'une solution fondamentale ; formule de représentation intégrale de Stokes-Levi.

2.1. - Dans tout ce paragraphe, on désigne par (P , L) un système frontière de classe A_λ sur M (n° 1.6).

2.2. - On introduit d'abord les fonctions de Levi relatives à l'opérateur elliptique P :

PROPOSITION. - Il existe sur M au moins un noyau-fonction $\Lambda(x , y)$ (au sens strict ; n° 0.2) ayant les propriétés suivantes :

(L_1) $\Lambda(x , y)$ est d'ordre -2 et de classe C^2 en y (n° 0.2).

(L_2) Pour chaque $x \in \mathring{M}$, $P^* \Lambda_x \in \mathcal{L}^1(M , \tau)$ ([25]).

(L_3) Pour chaque $x \in \mathring{M}$, $\lim\limits_{V \downarrow \{x\}} \int_{\partial V} \frac{\partial}{\partial \gamma_V} \Lambda_x \, d\sigma_V = 1$ ([26]) (la limite étant prise selon la base de filtre décroissante $\mathcal{B}_x$ des sous-variétés à bord compactes de M , de classe C^∞ et de dimension n , telles que $x \in \mathring{V} \subset \overline{V} \subset \mathring{M}$).

Un noyau-fonction Λ sur M , ayant les propriétés (L_1), (L_2), (L_3), sera appelé, ainsi qu'il est de tradition (voir le livre de MIRANDA [13], page 13), <u>fonction de Levi relative à</u> P . En outre, on appellera <u>fonction de Levi au sens large relative à</u> P , tout noyau-fonction au sens large Λ sur M (n° 0.2) ayant la propriété (L_1') ci-dessous ainsi que les propriétés (L_2) et (L_3) :

(L_1') $\Lambda(x , y)$ est d'ordre -2 localement, et de classe C^2 en y (n° 0.2).

Pour établir la proposition précédente, on peut construire Λ "par recollement": Désignant par (U_α , χ_α) un recouvrement fini de M par des cartes locales, et, pour chaque α , par φ_α une fonction $\geqslant 0$ de $C^\infty(M \times M)$ à support dans $U_\alpha \times U_\alpha$ de telle sorte que $\sum\limits_\alpha \varphi_\alpha(x , y) = 1$ au voisinage de la diagonale de $M \times M$, on obtient une fonction de Levi Λ sur M en posant,

$$\Lambda(x , y) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x , y)\, \Lambda_\alpha(x , y) \qquad (x , y \in M \times M , \quad x \neq y) \quad , \tag{2.1}$$

où, pour chaque α , Λ_α est une fonction de Levi relative à P sur U_α . On est ainsi ramené au cas où M est plongée dans R^n ; cas où on peut expliciter une fonction de Levi (voir actuellement à ce sujet le livre de MIRANDA [13], page 13).

<u>Remarque</u> 1. - On notera l'interdépendance suivante des propriétés (L_1), (L_2) et (L_3) : la formule de Green (1.5) (n° 1.3), appliquée à une variété $W \setminus V$ (où $V \in \mathcal{B}_x$, $W \in \mathcal{B}_x$ et $x \in \mathring{V} \subset \overline{V} \subset \mathring{W}$), et aux fonctions 1 et Λ_x , montre, compte tenu de (L_1) et (L_2) qui entraînent l'intégrabilité de Λ_x et $P^* \Lambda_x$ sur M , que

$$\lim_{V \downarrow \{x\}, W \downarrow \{x\}} \left[\int_{\partial W} \frac{\partial}{\partial \gamma_W} \Lambda_x \, d\sigma_W - \int_{\partial V} \frac{\partial}{\partial \gamma_V} \Lambda_x \, d\sigma_V \right] = 0 \quad ;$$

([25]) Voir la remarque 2 ci-dessous.

([26]) Avec les notations introduites au n° 0.1.

donc que $\lim\limits_{V\downarrow\{x\}} \int_{\partial V} \frac{\partial}{\partial\gamma_V} \Lambda_x \, d\sigma_V$ existe. La propriété (L_3) apparaît ainsi comme une condition de normalisation.

Remarque 2. – C'est la classe C^1 de g (n° 0.1) qui permet la propriété (L_2) : on vérifie, en fait, par un calcul direct sur la fonction de Levi explicitée dans R^n, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|P^* \Lambda_x(y)| \leqslant C \, \overline{xy}^{1-n} \qquad (x \in \mathring{M} , \quad y \in M , \quad x \neq y) \quad .$$

Remarque 3. – En fait, une fonction de Levi relative à P "suffisamment régulière" ne dépend que de la partie principale Π de P [c'est-à-dire de la métrique riemannienne g conjuguée de Π] : on peut introduire une classe de noyaux-fonction K d'ordre $-q$ (q entier, $0 < q < n$) ayant un symbole principal k [k étant une fonction continue sur $T^*(M)$ telle que

$$\lim_{\mu\to+\infty} (i\mu)^q \, e^{-i\mu h(x)} \, K[fe^{i\mu h}](x) = f(x) \, k(x \, , \, d_x h)$$

($f , h \in C^\infty(M)$, $x \in M$, $d_y h \neq 0$ pour tout $y \in \operatorname{Supp} f$)]. Une fonction de Levi relative à P (c'est-à-dire à Π) apparaît alors comme un tel noyau K dont le symbole principal k est (l'opposé de) l'inverse de Π :

$$(2.2) \qquad k(x \, ; \, \omega) = \frac{-1}{\Pi_x(\omega \, , \, \omega)} \qquad (x \in M \, , \quad \omega \in T^*_x(M) \, , \quad \omega \neq 0) \quad (^{27}) \, .$$

Compte tenu de la propriété multiplicative des symboles, l'introduction des fonctions de Levi apparaît ainsi comme un premier pas dans "la recherche d'un inverse pour P " : on commence par chercher le symbole de l'inverse. Dans le cas où toutes les données sont de classe C^∞ (ou au moins de classe C^m avec m supérieur à n), les considérations précédentes sont des cas particuliers de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels actuellement en cours d'édification [voir CALDERON [4] et la bibliographie qui y figure ; en particulier les travaux de HÖRMANDER et de SEELEY]. Pour le cas "peu différentiable" étudié ici, cette théorie semble être encore à faire.

Remarque 4. – Une fonction de Levi Λ relative à P peut aussi être considérée comme une paramétrix (ou inverse à droite "approché") de P^* : Si Λ et f sont

---

(27) Le signe $-$ est ici à rapprocher du fait que l'opérateur de Green G [dont le noyau sera une fonction de Levi particulière (voir le n° 2.4 ci-dessous)] est l'opposé d'un inverse à droite de P : $PGf = -f$. Voir aussi la relation (2.3).

suffisamment régulières, Λf est de classe C^2, au moins sur $\mathring{M}$, et on a, pour $x \in \mathring{M}$,

$$(2.3) \qquad P^*[\Lambda f](x) = -f(x) + \int_M P^*\Lambda_x(y)\, f(y)\, \tau(dy)$$

(voir [13], n° 13, page 23).

2.3. Formule de représentation intégrale de Stokes-Levi.

THÉORÈME [28]. - Soit Λ une fonction de Levi au sens large sur M relative à P. Pour tout $u \in C^2(M)$ et tout $x \in \mathring{M}$,

$$(2.4) \qquad u(x) = \int_M \{u\, P^*\Lambda_x - \Lambda_x\, Pu\}\, d\tau + \int_{\partial M} \{u\, L^*\Lambda_x - \Lambda_x\, Lu\}\, d\sigma \qquad [29] .$$

COROLLAIRE. - Pour tout $u \in C^2(M)$ et tout $x \in \mathring{M}$,

$$(2.5) \qquad u(x) = \int_M \{u\, P^*\Lambda_x - \Lambda_x\, Pu\}\, d\tau + \int_{\partial M} \{u \frac{\partial}{\partial \gamma} \Lambda_x - \Lambda_x \frac{\partial u}{\partial \gamma} + \Lambda_x\, up\}\, d\sigma \qquad [29] .$$

En effet, soient $u \in C^2(M)$, $x \in \mathring{M}$, (U, χ) une carte locale de $\mathring{M}$ au voisinage de x $(x \in U)$, et, pour chaque $\rho > 0$ assez petit, V_ρ l'image par χ^{-1} de la boule (ouverte) euclidienne de centre $\chi(x)$ et de rayon ρ. Appliquant la formule de Green (1.5) (n° 1.3) à la variété compacte $M \setminus V_\rho$, et aux fonctions Λ_x et u, on obtient [28],

$$(2.6) \qquad -\int_{\partial V_\rho} u \frac{\partial}{\partial \gamma_{V_\rho}} \Lambda_x\, d\sigma_{V_\rho} + \int_{\partial V_\rho} \Lambda_x\Big(\frac{\partial u}{\partial \gamma_{V_\rho}} + p_{V_\rho}\, u\Big)\, d\sigma_{V_\rho}$$

$$= \int_{M \setminus V_\rho} \{\Lambda_x\, Pu - u\, P^*\Lambda_x\}\, d\tau + \int_{\partial M} \{\Lambda_x \frac{\partial u}{\partial \gamma} - u \frac{\partial}{\partial \gamma} \Lambda_x + \Lambda_x\, up\}\, d\sigma$$

[en posant $p_{V_\rho} = g(X, \gamma_{V_\rho})$ (sur ∂V_ρ), où X est toujours le champs de vecteurs intervenant dans la forme (1.3) de P (n° 1.2)]. Faisant tendre ρ vers 0 dans (2.6), et tenant compte des propriétés (L_1), (L_2) et (L_3) de Λ (n° 2.2), on obtient (2.5). On en déduit (2.4), puisque, par définition de Q^*, T^* et L^* (n° 1.4 et 1.5), on a,

---

[28] Sous les hypothèses faites sur (P, L) au n° 2.1, et avec les notations des n° 0.1 et 0.2.

[29] La première intégrale a un sens car les fonctions Λ_x et $P^*\Lambda_x$ sont dans $\mathcal{L}^1(M, \tau)$ par définition de Λ (n° 2.1).

$$\int_{\partial M} \{u\, L^* \Lambda_x - \Lambda_x\, Lu\}\, d\sigma = \int_{\partial M} \{u \frac{\partial}{\partial \gamma} \Lambda_x - \Lambda_x \frac{\partial u}{\partial \gamma} + \Lambda_x\, up\}\, d\sigma$$

$$+ \int_{\partial M} \{u\, Q^* \Lambda_x - \Lambda_x\, Qu\}\, d\sigma + \int_{\partial M} \{u\, T^* \Lambda_x - \Lambda_x\, Tu\}\, d\sigma$$

$$= \int_{\partial M} \{u \frac{\partial}{\partial \gamma} \Lambda_x - \Lambda_x \frac{\partial u}{\partial \gamma} + \Lambda_x\, up\}\, d\sigma \quad .$$

C. Q. F. D.

2.4. - On appellera <u>fonction de Green au sens large</u> (resp. <u>fonction de Green au sens strict</u>, ou seulement <u>fonction de Green</u>) <u>du système frontière</u> $(P\ ,\ L)$ <u>sur</u> M (n° 2.1), un noyau-fonction au sens large (resp. un noyau-fonction au sens strict [30]) $G(x\ ,\ y)$ sur M ayant la propriété $(L_1^!)$ [resp. la propriété (L_1) ; n° 2.2] ainsi que les propriétés $(G_2^!)$, $(G_2^{"})$ et (G_3) ci-dessous :

$(G_2^!)$ $P^* G_x(y) = 0$ pour $x \in \mathring{M}$, $y \in M$, $x \neq y$.

$(G_2^{"})$ $L^* G_x(y') = 0$ pour $x \in \mathring{M}$ et $y' \in \partial M$.

(G_3) $\int_{\partial V} \frac{\partial}{\partial \gamma_V} G_x\, d\sigma_V = 1$ pour tout $x \in \mathring{M}$, et toute sous-variété à bord V de M , compacte, de classe C^∞ , et de dimension n telle que $x \in \mathring{V} \subset \overline{V} \subset \mathring{M}$ [31].

Une fonction de Green au sens large (resp. au sens strict) du système frontière $(P\ ,\ L)$ est, en particulier, une fonction de Levi au sens large (resp. au sens strict) relative à P (n° 2.2) ; la formule de représentation intégrale de Stokes-Levi (n° 2.3) fournit alors la formule de représentation cherchée :

THÉORÈME III. - Soit G une fonction de Green au sens large du système frontière $(P\ ,\ L)$. Alors, pour tout $u \in C^2(M)$ et tout $x \in \mathring{M}$,

(2.7) $u(x) = - \int_M G(x\ ,\ y)\, Pu(y)\, \tau(dy) - \int_{\partial M} G(x\ ,\ y')\, Lu(y')\, \sigma(dy')$ [32] .

De plus, si G est une fonction de Green au sens strict de $(P\ ,\ L)$, la relation (2.7) a aussi lieu pour tout $x \in \partial M$.

La relation (2.7) pour $x \in \mathring{M}$ résulte de (2.4) (n° 2.3) ; lorsque G est une fonction de Green au sens strict, (2.7) est aussi valable pour $x \in \partial M$, puisque

---

[30] Conformément aux définitions du n° 0.2, G est alors continue sur $M \times M \setminus \Delta_{M\times M}$ <u>y compris au bord</u>.

[31] Avec les notations introduites aux n° 0.1 et 0.2.

[32] Ces intégrales ont un sens en vertu de la propriété $(L_1^!)$ de G (n° 2.2).

les deux membres sont fonctions continues de x sur M, ainsi qu'il résulte, pour le second membre, de la propriété (L_1).

COROLLAIRE 1. - Si le système frontière (P , L) admet une fonction de Green au sens large, alors

$$u \in C^2(M) , \quad Pu = 0 \text{ et } Lu = 0 \implies u = 0 .$$

COROLLAIRE 2. - On suppose que le système frontière (P , L) est elliptique et admet une fonction de Green au sens strict $G(x , y)$.

Alors, l'opérateur intégral de noyau $G(x , y)$ prolonge l'opérateur de Green du système (P , L) [33] en un opérateur compact de $\mathcal{L}^\infty(M , \tau)$ dans $C(M)$.

COROLLAIRE 3. - Si le problème aux limites $Pu = - f$, $Lu = 0$ admet une solution $u \in C^2(M)$ pour un ensemble dense dans $C(M)$ de seconds membres f, alors le système frontière (P , L) admet au plus une fonction de Green.

En particulier, si le système frontière (P , L) est elliptique et du type (pm) (n° 1.7 et 1.8), (P , L) admet au plus une fonction de Green $G(x , y)$, et cette fonction de Green, si elle existe, est positive :

$$G(x , y) \geqslant 0 \qquad (x \in M , \ y \in M , \ x \neq y) .$$

Le corollaire 1 ainsi que le début du corollaire 3 résultent directement du théorème III. Le corollaire 2 résulte du corollaire 1, des théorèmes II et III, et des propriétés des opérateurs intégraux rappelées au n° 0.4. La fin du corollaire 3 résulte enfin de la proposition 7 de l'exposé n° 4 (n° II.3).

Remarque. - Ainsi, lorsqu'il y a "existence" pour le problème aux limites $Pu = f$, $Lu = \varphi$, le système frontière (P , L) admet au plus une fonction de Green. On verra ci-dessous (n° 2.7, § 3 et § 4) que l'existence d'une fonction de Green pour le système (P , L) est aussi liée à la possibilité de résoudre le problème aux limites précédent. On pourra alors parler de "la" fonction de Green du système (P , L).

2.5. Fonction de Green du système adjoint.

PROPOSITION. - Soient $G(x , y)$ et $G^*(x , y)$ respectivement des fonctions de Green au sens large du système frontière (P , L) et du système adjoint (P^* , L^*)

---

[33] Voir le n° II.5 de l'exposé n° 4. Cet opérateur existe d'après le corollaire 1 et le théorème II.

(n° 1.6). Alors,

$$G^*(x , y) = G(y , x) \qquad (x \in \mathring{M} , \; y \in \mathring{M} , \; x \neq y) .$$

En effet, soient x_1 et x_2 deux points distincts de $\mathring{M}$, et V_1 (resp. V_2) un voisinage ouvert de x_1 (resp. x_2) image par une carte locale d'une boule (ouverte) euclidienne. On suppose que $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$, $\overline{V_1} \subset \mathring{M}$ et $\overline{V_2} \subset \mathring{M}$, et on considère la variété à bord compacte $\hat{M} = M \setminus V_1 \setminus V_2$. On étend à $\hat{M}$ les opérateurs frontière L et L^* en des opérateurs $\hat{L}$ et $\hat{L}^*$ en posant,

$$\hat{L}u = Lu , \quad \hat{L}^*u = L^*u \quad \text{sur } \partial M ,$$

$$\hat{L}u = -\frac{\partial u}{\partial \gamma_{V_1}} , \quad \hat{L}^*u = -\frac{\partial u}{\partial \gamma_{V_1}} + p_{V_1} u \quad \text{sur } \partial V_i \quad (i = 1 , 2) \quad (^{34}) .$$

$(P , \hat{L})$ et $(P^* , \hat{L}^*)$ sont des systèmes frontière de classe A_λ sur la variété $\hat{M}$ adjoints l'un de l'autre ; et la formule de Green (1.10) (n° 1.6) appliquée à $\hat{M}$, $(P , \hat{L})$ et aux fonctions G_{x_1} et $G^*_{x_2}$ [qui sont de classe C^2 sur $\hat{M}$ d'après la propriété (L'_1)] donne, compte tenu de ce que, d'après les propriété (G'_2) et (G''_2),

$$PG^*_{x_2} = P^*G_{x_1} = 0 \quad \text{sur } \hat{M} \qquad \text{et} \qquad \hat{L}G^*_{x_2} = \hat{L}^*G_{x_1} = 0 \quad \text{sur } \partial M ,$$

$$(2.8) \quad \int_{\partial V_1} \{G_{x_1} \frac{\partial}{\partial \gamma_{V_1}} G^*_{x_2} - G^*_{x_2}(\frac{\partial}{\partial \gamma_{V_1}} G_{x_1} - p_{V_1} G_{x_1})\} \, d\sigma_{V_1}$$

$$+ \int_{\partial V_2} \{G_{x_1} \frac{\partial}{\partial \gamma_{V_2}} G^*_{x_2} - G^*_{x_2}(\frac{\partial}{\partial \gamma_{V_2}} G_{x_1} - p_{V_2} G_{x_1})\} \, d\sigma_{V_2} = 0 .$$

Passant alors à la limite dans (2.8) en contractant V_1 et V_2 vers x_1 et x_2 respectivement, on obtient, compte tenu des propriétés (L'_1) et (G_3),

$$- G^*_{x_2}(x_1) + G_{x_1}(x_2) = 0 \quad ;$$

ou encore,

$$(2.9) \qquad G^*(x_2 , x_1) = G(x_1 , x_2) \quad .$$

(^{34}) Avec les notations du n° 0.1 ; les signes $-$ proviennent de ce que la conormale γ_{V_i} étant intérieure pour V_i est extérieure pour $\hat{M}$ $(i = 1 , 2)$.

Cette relation, ainsi établie pour x_1 et x_2 dans $\mathring{M}$ $(x_1 \neq x_2)$, l'est aussi pour x_1 et x_2 quelconques $(x_1 \neq x_2)$ sur M en vertu de la continuité de G et G^* hors de la diagonale.

C. Q. F. D.

Remarque. - La proposition précédente fournit un autre cas d'unicité de la fonction de Green du système (P, L) [voir la remarque du n° 2.4].

2.6. - On appellera solution fondamentale sur M relative à l'opérateur P de classe A_λ (n° 2.1), tout noyau-fonction $\Gamma(x, y)$ sur M [35] ayant les propriétés (L_1), (G_2') et (G_3) (n° 2.2 et 2.4).

L'existence de solutions fondamentales sur M est examinée dans l'appendice A (n° A.3).

2.7. Construction d'une fonction de Green au sens large à partir d'une solution fondamentale. - On suppose que (P, L) (n° 2.1) est un système frontière elliptique d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) ayant la "propriété d'unicité" (n° 1.7) :

$$(U) \qquad u \in C^2(M), \quad Pu = 0 \text{ et } Lu = 0 \implies u = 0 .$$

On désigne par J^* l'opérateur linéaire continu de $C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $C^{0,\lambda}(\partial M)$) dans $C^{2,\lambda}(M)$ qui résoud le problème aux limites (théorème II, n° 1.7) :

$$u \in C^{2,\lambda}(M), \quad P^*u = 0, \quad L^*u = -\varphi \qquad [\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M) \text{ (resp. } \varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M))] .$$

On suppose, de plus, que P lui-même possède la propriété d'unicité (U_d) (appendice A, n° A.1) qui assure l'existence, sur M, d'une solution fondamentale $\Gamma(x, y)$ relative à P de classe $C^{2,\lambda}_{loc}$ en y [proposition A.3, propriétés (SF_2) et (SF_3), et n° 0.2].

On va chercher une fonction de Green pour (P, L) sous la forme :

$$(2.10) \qquad G(x, y) = \Gamma(x, y) + U(x, y) ,$$

où U est un noyau-fonction de classe C^2 en y à déterminer.

Pour $x \in \mathring{M}$, (G_2') et (G_2'') imposent à U_x de vérifier :

$$(2.11) \qquad \begin{aligned} P^*U_x(y) &= 0 \qquad (y \in M, \ y \neq x) , \\ L^*U_x(y') &= -L^*\Gamma_x(y') \qquad (y' \in \partial M) . \end{aligned}$$

---

[35] Au sens strict.

Ces relations amènent à poser,

(2.12) $$U_x(y) = J^*[L^*\Gamma_x](y) \qquad (x \in \mathring{M} \ , \ y \in M \ , \ y \neq x) \ ,$$

en désignant par $L^*\Gamma_x$ l'image par L^* d'une quelconque [36] fonction $u \in C^{2,\lambda}(M)$ coïncidant avec Γ_x au voisinage de ∂M. En vertu de la classe $C^{2,\lambda}_{loc}$ en y de Γ, une telle fonction u existe, et l'application $x \to L^*\Gamma_x$ ainsi définie est continue de $\mathring{M}$ dans $C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $C^{0,\lambda}(\partial M)$). En vertu des propriétés de l'opérateur J^*, il en résulte que $U_x \in C^{2,\lambda}(M)$ pour tout $x \in \mathring{M}$ et que l'application $x \to U_x$ est continue de $\mathring{M}$ dans $C^{2,\lambda}(M)$. Ainsi, en posant, pour $x \in \mathring{M}$, $y \in M$, $x \neq y$,

(2.13) $$G(x \ , \ y) = \Gamma(x \ , \ y) + J^*[L^*\Gamma_x](y) \ ,$$

on définit une fonction de Green au sens large pour le système frontière $(P \ , \ L)$.

Appliquant la même procédure au système $(P^* \ , \ L^*)$ adjoint de $(P \ , \ L)$, et utilisant la proposition (2.5), on obtient :

THÉORÈME IV. - On suppose que le système frontière $(P \ , \ L)$ (n° 2.1) est elliptique (n° 1.7), et possède les propriétés d'unicité (U) (ci-dessus) et (U_d) (pour le problème de Dirichlet relatif à P ; appendice A, n° A.1).

Alors, les systèmes frontière $(P \ , \ L)$ et $(P^* \ , \ L^*)$ admettent des fonctions de Green au sens large G et G^* (n° 2.4), et on a [37],

(2.14) $$G^*(x \ , \ y) = G(y \ , \ x) \qquad (x \in \mathring{M} \ , \ y \in \mathring{M} \ , \ x \neq y) \ .$$

Les propriétés d'unicité (U) et (U_d) sont satisfaites, en particulier, lorsque le système $(P \ , \ L)$ est du type (pm) (n° 1.8). Les noyaux G et G^* sont alors positifs.

<u>Remarque</u>. - Sous les hypothèses du théorème IV, on obtient, pour le système $(P \ , \ L)$, un peu plus qu'une fonction de Green au sens large, puisque, en vertu de (2.13), $G(x \ , \ y)$ se prolonge continûment pour $x \in \partial M$, $y \in \mathring{M}$. Toutefois, dans la recherche d'une fonction de Green au sens strict, on ne sait pas actuellement aller plus loin par le procédé employé ici ; et pour obtenir un prolongement continu de G à $\partial M \times \partial M \setminus \Delta_{M\times M}$, on construira directement ce prolongement dans les paragraphes 3 et 4 ci-dessous.

---

[36] L^* est quasi-local (exp. 3, n° 4.2 et 4.7) ; voir l'appendice C à ce sujet.

[37] Compte tenu du corollaire 3 du théorème III (n° 2.4) qui assure l'unicité de G.

§ 3. Construction d'une fonction de Green au sens strict à partir d'un noyau-fonction sur ∂M pour l'opérateur K inverse de LH.

3.1. – Dans tout ce paragraphe, on suppose $n \geqslant 3$ [38], et on désigne par (P , L) un système frontière de classe A_λ sur M (n° 1.6). On suppose que (P , L) est elliptique d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) et possède la propriété d'unicité (n° 1.7),

(U) $\qquad u \in C^2(M) , \quad Pu = 0 \text{ et } Lu = 0 \Longrightarrow u = 0 .$

On suppose enfin que P lui-même possède la propriété d'unicité pour le problème de Dirichlet (appendice A, n° A.1),

(U_d) $\qquad u \in C^2(M) , \quad Pu = 0 \text{ et } \gamma^0 u = 0 \Longrightarrow u = 0 .$

On adopte, en ce qui concerne le problème de Dirichlet, les notations introduites dans l'appendice A.

Sous les hypothèses faites, les applications

$$u \to (Pu , Lu) \qquad \text{et} \qquad u \to (P^* u , L^* u)$$

sont des isomorphismes de $C^{2,\lambda}(M)$ sur $C^{0,\lambda}(M) \times C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$) (théorème II, n° 1.7).

On désigne (exp. 4, n° 2.5) par J et J^* respectivement les opérateurs linéaires continus de $C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $C^{0,\lambda}(\partial M)$) dans $C^{2,\lambda}(M)$ qui résolvent les problèmes aux limites,

$$\left.\begin{array}{l} u \in C^{2,\lambda}(M) , \quad Pu = 0 , \quad Lu = - \varphi \\ u \in C^{2,\lambda}(M) , \quad P^* u = 0 , \quad L^* u = - \varphi \end{array}\right\} \quad [\ \varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M) \quad (\text{resp. } \varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M))\ ] .$$

On pose ensuite,

$$K = \gamma^0 J \qquad \text{et} \qquad K^* = \gamma^0 J^* .$$

K et K^* sont ainsi des opérateurs linéaires continus de $C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $C^{0,\lambda}(\partial M)$) dans $C^{2,\lambda}(\partial M)$ inverses des opérateurs LH et $L^* H^*$ respectivement ; et on a,

$$J = HK \qquad \text{et} \qquad J^* = H^* K^*$$

---

[38] Voir la remarque à la fin du n° 3.5 ci-dessous.

(voir aussi à ce sujet le n° 1.1 de l'exposé n° 6).

En vertu de la formule de Green (1.10) (n° 1.6), appliquée à des fonctions $J\varphi$ et $J^*\psi$, K <u>et</u> K^* <u>sont adjoints l'un de l'autre sur</u> ∂M <u>relativement à</u> g' (n° 1.4).

3.2. - Les hypothèses sur (P , L) faites au n° 3.1 sont satisfaites, en particulier, lorsque (P , L) est du type (pm) (n° 1.8) [39]. Les opérateurs J , J^* , K et K^* sont alors positifs (exp. 4, § II) et se prolongent continûment à $C(\partial M)$.

3.3. <u>La fonction de Green au sens large du système</u> (P , L) (n° 2.4 et 2.7) <u>peut être exprimée au moyen du noyau de Green du problème de Dirichlet</u> (n° 3.2). - Il suffit de substituer dans la relation (2.13) le noyau de Green G^0 à la solution fondamentale Γ pour obtenir la proposition suivante :

PROPOSITION. - Soit $G(x , y)$ la fonction de Green (au sens large) du système (P , L) (théorème IV, n° 2.7). Pour chaque $x \in \overset{\circ}{M}$,

$$G_x = G_x^0 + H^* K^* L^* G_x^0 \quad (40) . \tag{3.1}$$

On notera que la relation (3.1) ci-dessus est l'expression, en termes de fonctions de Green, de la relation de Sato et Ueno

$$Gf = G^0 f + HKLG^0 f \qquad (f \in C^{0,\lambda}(M)) \tag{3.2}$$

qui lie l'opérateur de Green G du système (P , L) à l'opérateur de Green G^0 du problème de Dirichlet (voir exp. 4, n° II.5, et exp. 6, n° 1.4).

3.4. - L'existence d'un noyau-fonction convenable pour l'opérateur K entraîne alors l'existence d'une fonction de Green au sens strict pour (P , L) :

---

(39) Lorsqu'une composante connexe C de M a son bord vide, la condition " $P1 \neq 0$ sur C ou $L1 \neq 0$ sur ∂C " qui intervient au n° 1.8, se réduit à la condition " $P1 \neq 0$ sur C " qui intervient dans (D) (n° A.2).

(40) Egalité dans l'espace $C^{2,\lambda}_{loc}(M \setminus \{x\})$; $L^* G_x^0$ est défini et appartient à $C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $C^{0,\lambda}(\partial M)$), puisque $G_x^0 \in C^{2,\lambda}_{loc}(M \setminus \{x\})$ (théorème A.4) et que L^* est quasi-local (exp. 3, n° 4.2).

THÉORÈME V [41]. – On suppose que l'opérateur K inverse de LH (n° 3.1) admet, sur ∂M, un noyau-fonction $k(x', y')$ d'ordre -1 (sur ∂M ; n° 0.3). Alors, le système frontière (P, L) admet une fonction de Green au sens strict $G(x, y)$ donné, par les relations,

$$(3.3) \quad G(x, y) = G^0(x, y) + \int_{\partial M} h^*(y, y')\, \sigma(dy') \int_{\partial M} k(x', y')\, h(x, x')\, \sigma(dx') \quad (x \in \mathring{M},\ y \in \mathring{M},\ x \neq y),$$

$$(3.4) \quad G(x, y') = \int_{\partial M} k(x', y')\, h(x, x')\, \sigma(dx') \quad (x \in \mathring{M},\ y' \in \partial M),$$

$$(3.5) \quad G(x', y) = \int_{\partial M} h^*(y, y')\, k(x', y')\, \sigma(dx') \quad (y \in \mathring{M},\ x' \in \partial M)\ [42],$$

$$(3.6) \quad G(x', y') = k(x', y') \quad (x' \in \partial M,\ y' \in \partial M).$$

La recherche d'une fonction de Green au sens strict pour le système (P, L) est ainsi ramenée à celle du noyau-fonction k de K. On examinera au paragraphe 4 ci-dessous divers cas où le noyau-fonction k existe.

3.5. – La démonstration du théorème V comporte trois parties :

(α) La fonction de Green au sens large du système (P, L) vérifie les relations (3.3), (3.4) et (3.5). En effet, en vertu de la propriété (1) de G^0 (théorème A.4, n° A.4) et de la définition de h (relation (A.9), n° A.5), on a, pour $x \in \mathring{M}$,

$$(3.7) \quad L^* G^0_x(x') = h(x, x') \quad (x' \in \partial M).$$

Par ailleurs, K^* étant adjoint de K sur ∂M relativement à g', $\check{k}$ est un noyau-fonction pour K^* ; autrement dit,

$$(3.8) \quad K^* L^* G^0_x(y') = \int_{\partial M} k(x', y')\, h(x, x')\, \sigma(dx') \quad (y' \in \partial M).$$

D'où (3.3) et (3.4) en vertu de (A.10) (n° A.5), et (3.5) en intervertissant les rôles de (P, L) et (P^*, L^*), compte tenu de la relation (2.14) (théorème IV, n° 2.7).

---

[41] Avec les hypothèses sur (P, L) faites au n° 3.1.

[42] Toutes ces intégrales ont un sens puisque, k étant supposé d'ordre -1 sur ∂M, $k(x', .)$ et $k(. , y')$ appartiennent à $\mathcal{L}^1(\partial M, \sigma)$.

(β) Désignant par G la fonction numérique sur $M \times M \setminus \Delta_{M\times M}$ définie par les relations (3.3) à (3.6), on a, pour $x'_0 \in \partial M$, $y'_0 \in \partial M$, $x'_0 \neq y'_0$,

$$\lim_{x\to x'_0, y\to y'_0} G(x , y) = k(x'_0 , y'_0) = G(x'_0 , y'_0) \tag{3.9}$$

[compte tenu de la propriété (α) et de la continuité de la fonction de Green au sens large, il résulte de (3.9) que G est un noyau au sens strict sur M].

Tout d'abord, la relation

$$\lim_{\substack{x'\to x'_0, y'\to y'_0 \\ x'\in\partial M, y'\in\partial M}} G(x' , y') = G(x'_0 , y'_0)$$

résulte de (3.6) et de la continuité postulée de k sur $\partial M \times \partial M \setminus \Delta_{\partial M\times\partial M}$.

On va ensuite établir que,

$$\lim_{\substack{x\to x'_0, y\to y'_0 \\ x\in\mathring{M}, y\in\mathring{M}}} G(x , y) = k(x'_0 , y'_0) \quad . \tag{3.10}$$

Pour cela, on pose $\overline{x'_0\, y'_0} = \rho$ $(\rho > 0)$ et, pour chaque $\alpha > 0$, on désigne par Φ_α une fonction continue sur $\partial M \times \partial M$ telle que,

(3.11) $\quad 0 \leqslant \Phi_\alpha \leqslant 1$ et $\Phi_\alpha = 1$ au voisinage de la diagonale $\partial M \times \partial M$,

$$\overline{x'y'} \geqslant \rho/4 \implies \Phi_\alpha(x' , y') = 0 \quad , \tag{3.12}$$

$$\sup_{x'\in\partial M} \int_{\partial M} |k(x' , y')|\ \Phi_\alpha(x' , y')\ \sigma(dy') \leqslant \alpha \tag{3.13}$$

$$\text{et} \quad \sup_{y'\in\partial M} \int_{\partial M} |k(x' , y')|\ \Phi_\alpha(x' , y')\ \sigma(dx') \leqslant \alpha$$

[une telle fonction Φ_α existe, en ce qui concerne (3.13), puisque k est d'ordre -1 par hypothèse]. Posant alors,

$$U(x , y) = \int_{\partial M} h^*(y , y')\ \sigma(dy') \int_{\partial M} k(x' , y')\ h(x , x')\ \sigma(dx') \tag{3.14}$$

$$(x \in \mathring{M} , \quad y \in \mathring{M}) ,$$

on écrit,

$$U(x , y) = U'_\alpha(x , y) + U''_\alpha(x , y)$$

$$= \int_{\partial M} h^*(y , y') \sigma(dy') \int_{\partial M} k(x' , y') \Phi_\alpha(x' , y') h(x , x') \sigma(dx')$$

$$+ \int_{\partial M\times\partial M} h^*(y , y') h(x , x') k(x' , y')(1 - \Phi_\alpha(x' , y')) \sigma(dx') \sigma(dy') .$$

La fonction $(x' , y') \longrightarrow k(x' , y')(1 - \Phi_\alpha(x' , y'))$ étant continue sur le compact $\partial M \times \partial M$, et valant $k(x'_0 , y'_0)$ au point (x'_0 , y'_0) en vertu de (3.11) et (3.12), on a, pour chaque $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to x'_0, y\to y'_0} U''_\alpha(x , y) = k(x'_0 , y'_0) \tag{3.15}$$

en vertu de la proposition 4 du chapitre III, § 5 (page 95), de BOURBAKI [2], puisque les mesures $h(x , .)\sigma$ et $h^*(y , .)\sigma$ convergent vaguement vers $\varepsilon_{x'_0}$ et $\varepsilon_{y'_0}$ respectivement en restant dans des ensembles bornés de $\mathfrak{M}(\partial M)$ d'après la proposition A.5.

Ainsi, pour établir (3.10), il reste à montrer, puisque

$$\lim_{x\to x'_0, y\to y'_0} G^0(x , y) = 0 \qquad \text{d'après le théorème A.4 ,}$$

que :

(3.16) Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe α tel que $|U'_\alpha(x , y)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $(x , y) \in \overset{\circ}{M} \times \overset{\circ}{M}$ suffisamment proche de (x'_0 , y'_0).

Or, en vertu de (3.12), on peut écrire

$$U'_\alpha(x , y) = \int_{\overline{y'x'}\leqslant\rho/4} h^*(y , y') \sigma(dy') \int_{\overline{x'x'_0}\leqslant\rho/4} k(x' , y') \Phi_\alpha(x' , y') h(x , x') \sigma(dx')$$

$$+ \int_{\overline{y'x'}\leqslant\rho/4} h^*(y , y') \sigma(dy') \int_{\overline{x'x'_0}\geqslant\rho/4} k(x' , y') h(x , x') \sigma(dx') ;$$

d'où, puisque $\overline{y'x'} \leqslant \rho/4$ et $\overline{x'x'_0} \leqslant \rho/4 \implies \overline{y'x'_0} \leqslant \rho/2 \implies \overline{y'y'_0} \geqslant \rho/2$,

$$|U'_\alpha(x , y)| \tag{3.17}$$

$$\leqslant \int_{\partial M} |h(x , x')| \sigma(dx') \int_{\overline{y'y'_0}\geqslant\rho/2} |h^*(y , y')| |k(x' , y')| \Phi_\alpha(x' , y') \sigma(dy')$$

$$+ \int_{\partial M} |h^*(y , y')| \sigma(dy') \int_{\overline{x'x'_0}\geqslant\rho/4} |h(x , x')| |k(x' , y')| \Phi_\alpha(x' , y') \sigma(dx') .$$

Tenant compte, alors, de la majoration (A.15) de h et h^* (n° A.6), et de la propriété (3.13) de Φ_α, on obtient, à partir de (3.17), pour $\overline{xx'_0} \leqslant \rho/8$ et $\overline{yy'_0} \leqslant \rho/8$,

$$|U'_\alpha(x\,,\,y)| \leqslant \alpha[C^*(\rho/8)^{1-n}\int_{\partial M}|h(x\,,\,x')|\,\sigma(dx') + C(\rho/8)^{1-n}\int_{\partial M}|h(y\,,\,y')|\,\sigma(dy')]$$
$$\leqslant \alpha(\rho/8)^{1-n}(C^*\|H^*\| + C\|H\|)\quad .$$

D'où (3.16) d'après (A.11) (n° A.5), et la relation (3.10) annoncée.

On établirait de façon analogue, mais plus simple, les relations

$$\lim_{\substack{x\to x'_0,\,y'\to y'_0\\ x\in\mathring{M},\,y'\in\partial M}} G(x\,,\,y') = k(x'_0\,,\,y'_0)\quad ,$$

et

$$\lim_{\substack{x'\to x'_0,\,y\to y'_0\\ x'\in\partial M,\,y\in\mathring{M}}} G(x'\,,\,y) = k(x'_0\,,\,y'_0)\quad ,$$

qui, jointes à (3.10), entraînent (3.9) et le fait que G est un noyau au sens strict sur M.

(γ) G <u>est un noyau d'ordre</u> -2 <u>sur</u> M. – En effet, puisque $G^0(x\,,\,y)$ est lui-même un noyau d'ordre -2 sur M (théorème A.4), il suffit de montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

(3.18) $$|U(x\,,\,y)| \leqslant C_1\,\overline{xy}^{2-n}\qquad (x\in\mathring{M}\,,\quad y\in\mathring{M}\,,\quad x\neq y)$$ [43].

Pour cela, posant,

(3.19) $$V(x\,,\,y') = \int_{\partial M} k(x'\,,\,y')\,h(x\,,\,x')\,\sigma(dx')\qquad (x\in\mathring{M}\,,\quad y'\in\partial M)\quad ,$$

on va établir d'abord l'existence d'une constante $C'_1 > 0$ telle que,

(3.20) $$|V(x\,,\,y')| \leqslant C'_1\,\overline{xy'}^{2-n}\qquad (x\in\mathring{M}\,,\quad y'\in\partial M)\quad .$$

Or, si $\overline{xy'} = \rho$, on peut écrire,

$$V(x\,,\,y') = \int_{\overline{x'y'}\leqslant\rho/2} k(x'\,,y')\,h(x\,,x')\,\sigma(dx') + \int_{\overline{x'y'}\geqslant\rho/2} k(x'\,,y')\,h(x\,,x')\,\sigma(dx')\;;$$

([43]) $U = G - G^0$ (relation (3.14)).

d'où, en vertu de la majoration (A.15) de h (nº A.6), et de ce que,

$$\overline{x'y'} \leqslant \rho/2 \quad \text{et} \quad \overline{xy'} = \rho \implies \overline{xx'} \geqslant \rho/2 \quad ,$$

(3.21) $|V(x\,,\,y')|$

$$\leqslant C(\rho/2)^{1-n}\,C_0 \int_{\overline{x'y'}\leqslant\rho/2} \overline{x'y'}^{\,2-n}\,\sigma(dx') + C_0(\rho/2)^{2-n}\int_{\partial M} |h(x\,,\,x')|\;\sigma(dx')\ \text{(44)};$$

d'où l'existence de C'_1 en vertu de (A.11) (nº A.5), puisque

$$\int_{\overline{x'y'}\leqslant\rho/2} \overline{x'y'}^{\,2-n}\,\sigma(dy')$$

est majoré, indépendamment de y', par Cte $\times\ \rho$.

On déduit ensuite (3.18) de (3.20) : posant cette fois $\overline{xy} = \rho$, on peut écrire,

$$U(x\,,\,y) = \int_{\overline{y'x}\leqslant\rho/2} h^*(y\,,\,y')\,V(x\,,\,y')\,\sigma(dy') + \int_{\overline{y'x}\geqslant\rho/2} h^*(y\,,\,y')\,V(x\,,\,y')\,\sigma(dy') \quad ;$$

d'où, en vertu de la majoration (A.15) de h (nº A.6), de (3.20), et de ce que,

$$\overline{y'x} \leqslant \rho/2 \quad \text{et} \quad \overline{xy} = \rho \implies \overline{y'y} \geqslant \rho/2 \quad ,$$

(3.22) $|U(x\,,\,y)|$

$$\leqslant C(\rho/2)^{1-n}\,C'_1 \int_{\overline{y'x}\leqslant\rho/2} \overline{y'x}^{\,2-n}\,\sigma(dy') + C'_1(\rho/2)^{2-n}\int_{\partial M} |h^*(y\,,\,y')|\;\sigma(dy') \ .$$

Pour conclure, il reste à montrer que $\int_{\overline{y'x}\leqslant\rho/2} \overline{y'x}^{\,2-n}\,\sigma(dy')$ est majoré, indépendamment de x par Cte $\times\ \rho$: or, désignant par x_1 un point de ∂M réalisant le minimum de la distance de x à ∂M , on a, $\overline{y'x_1} \leqslant \overline{y'x} + \overline{xx_1} \leqslant 2\overline{y'x}$ $(y' \in \partial M)$; d'où

$$\int_{\overline{y'x}\leqslant\rho/2} \overline{y'x}^{\,2-n}\,\sigma(dy') \leqslant 2^{2-n}\int_{\overline{y'x_1}\leqslant\rho} \overline{y'x_1}\;\sigma(dy') \quad ,$$

et le résultat annoncé.

Le théorème V est ainsi complètement établi.

---

(44) En désignant par C_0 une constante telle que $k(x'\,,\,y') \leqslant C_0\,\overline{x'y'}^{\,2-n}$ $(x' \in \partial M\ ,\ \ y' \in \partial M\ ,\ \ x' \neq y')$ [C_0 existe puisque k est supposé d'ordre -1 sur ∂M].

Remarque. - Dans ce paragraphe, on a supposé que $n = \dim M \geqslant 3$. **Lorsque $n = 2$, la plupart des développements précédents subsistent.**

Toutefois, dans l'alinéa (γ) ci-dessus, les majorations écrites doivent être alors modifiées (en introduisant des logarithmes), et on obtient seulement que G est d'ordre $-2+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

3.6. Cas d'un opérateur frontière de la forme $Lu = \alpha \frac{\partial u}{\partial \gamma} + Q(\gamma^0 u) + T(\gamma^0 u)$.- Conservant à P et L la signification qu'ils ont reçu au n° 1.8, on peut envisager des opérateurs frontière L^α de la forme

$$(3.23) \qquad L^\alpha u = \alpha\, Lu = \alpha\left\{\frac{\partial u}{\partial \gamma} + Q(\gamma^0 u) + T(\gamma^0 u)\right\} \qquad (u \in C^2(M)) \quad ,$$

où α est une fonction de $C^{0,\lambda}(\partial M)$ partout > 0 .

Dans ces conditions, si le système frontière (P , L) admet une fonction de Green $G(x , y)$ (n° 2.4), la solution du problème aux limites $Pu = - f$, $L^\alpha u = - \varphi$ admet la formule de représentation intégrale :

$$(3.24) \qquad u(x) = \int_M G_x\, f\, d\tau + \int_{\partial M} G_x\, \alpha^{-1}\, \varphi\, d\sigma \qquad (x \in \mathring{M}) \quad .$$

En particulier, lorsque $G(x , y)$ est une fonction de Green au sens strict, le noyau de l'opérateur K , qui inverse $L^\alpha H$, est donné par

$$(3.25) \quad k(x' , y') = G(x' , y')\, \frac{1}{\alpha(y')} \qquad (x' \in \partial M , \ y' \in \partial M , \ x' \neq y') \quad .$$

Ainsi, le cas considéré ci-dessus, où $\alpha \equiv 1$, apparaît comme caractérisé par le fait que le noyau-fonction de K est la restriction à ∂M du noyau-fonction de l'opérateur de Green (résolvant le problème aux limites $Pu = - f$, $Lu = 0$) ; voir à ce sujet la fin de la remarque (d) du n° 4.9 de l'exposé n° 3.

§ 4. Construction d'un noyau-fonction sur ∂M pour l'opérateur K inverse de LH.

4.1. - Dans tout ce paragraphe, on suppose $n \geqslant 3$, et on désigne par (P , L) un système frontière de classe A_λ sur M (n° 1.6) pour lequel L est de l'une des deux formes suivantes ("cas (1)" et "cas (2)") :

$$(1) \qquad Lu = \frac{\partial u}{\partial \gamma} + T(\gamma^0 u) \qquad (u \in C^2(M)) \quad ,$$

$$(2) \qquad Lu = \frac{\partial u}{\partial \gamma} + Q(\gamma^0 u) + T(\gamma^0 u) \qquad (u \in C^2(M)) \quad ,$$

où :

– Q est un opérateur elliptique sur ∂M de classe A_λ relativement à g' (n° 1.5) ayant la propriété d'unicité sur ∂M (voir la remarque 1 ci-dessous) :

$$(U') \qquad \varphi \in C^2(\partial M) \quad \text{et} \quad Q\varphi = 0 \implies \varphi = 0 \ .$$

– T est un opérateur continu de $C^2(M)$ dans $C^{1,\lambda}(\partial M)$ du type auto-adjoint introduit dans la proposition 1.9 [45].

Le système frontière $(P\ ,\ L)$ est ainsi elliptique d'ordre 1 dans le cas (1) et elliptique d'ordre 2 dans le cas (2) (n° 1.7). On suppose, comme au § 3 (n° 3.1), que sont satisfaites les propriétés d'unicité (U) et (U_d), et on adopte les mêmes notations.

On suppose de plus dans le cas (2) que Q est de classe A_λ relativement à la métrique riemannienne g'_1 sur ∂M conjuguée de sa partie principale. L'opérateur de Green de Q (qui existe en vertu de l'hypothèse (U')) admet ainsi, en vertu des résultats du n° A.3 (appendice A), un noyau-fonction χ (relativement à la métrique g') : χ est l'unique noyau-fonction d'ordre -2 sur ∂M caractérisé par la relation,

$$(4.1) \quad \chi Q\zeta(x') = \int_{\partial M} \chi(x'\ ,\ y')\ Q\zeta(y')\ \sigma(dy') = -\zeta(x') \quad (x' \in \partial M\ ,\ \ \zeta \in C^2(\partial M)) \ .$$

En particulier,

$$(4.2) \qquad \psi \in C(\partial M) \quad \text{et} \quad \chi\psi = 0 \implies \psi = 0 \ .$$

On notera que $\check{\chi}$ est le noyau de l'opérateur de Green de Q^* (n° 1.3, remarque 2), que, pour tout $y' \in \partial M$,

$$\check{\chi}_{y'} \in C^{2,\lambda}_{loc}(\partial M \setminus \{y'\}) \qquad [\text{appendice A, n° A.3, propriété } (SF_2)]\ ,$$

et que, pour tout couple $(H\ ,\ K)$ de compacts disjoints de ∂M , l'application $x' \to \check{\chi}_{x'}$ de H dans $C^{2,\lambda}(\partial M)$ est continue et que, pour chaque μ , $0 < \mu \leqslant \lambda$, il existe une constante $C_\mu > 0$ de sorte que,

$$(4.3) \quad \|\check{\chi}_{x'}\|_{j,K} \leqslant C_\lambda\ d(H\ ,\ K)^{3-n-j} \quad \text{et} \quad \|\check{\chi}_{x'}\|_{j,\mu,K} \leqslant C_\mu\ d(H\ ,\ K)^{3-n-j-\mu}$$
$$(x' \in H\ ,\ \ j = 1\ ,\ 2)$$

[appendice A, n° A.3, propriété (SF_3)].

---

[45] Voir la remarque 2 ci-dessous et la remarque 1 du n° 4.7.

On désignera enfin par $\Gamma(x, y)$ une solution fondamentale sur M relative à P ayant les propriétés (SF_1) à (SF_5) énoncées au n° A.3.

Remarque 1. - L'hypothèse (U') sur Q ne diminue pas la généralité car on peut toujours remplacer Q par $\hat{Q} = Q - \alpha$, où $\alpha > 0$ est assez grand pour que (U') soit satisfaite par $\hat{Q}$ $(\alpha > \|Q1\|)$. Il suffit ensuite d'ajouter à T l'opérateur $\varphi \to \alpha\varphi$.

Remarque 2. - On pourrait faire sur T des hypothèses beaucoup plus faibles. En particulier, supprimer le caractère autoadjoint, et, dans le cas (2), supposer que T est seulement d'ordre $2 - \lambda$ et applique $C^2(\partial M)$ dans $C^{0,\lambda}(\partial M)$. Mais les propriétés requises pour l'adjoint de T (en particulier le lemme 4.6 ci-dessous) sont alors beaucoup plus difficiles à établir [voir la remarque 1 du n° 4.7].

Remarque 3. - Lorsque T est nul, le cas (1) se réduit au problème de Neumann, et le cas (2) au problème de Višik (voir [16]).

Par contre, le problème aux dérivées obliques (cas où Q est du premier ordre, non nul) ne rentre pas dans le cadre proposé ici (voir à ce sujet les remarques des n° 4.4 et 4.7).

4.2. - La méthode employée ci-dessous pour construire le noyau-fonction k de K réclamé par le théorème VI, consiste à chercher k sous la forme,

$$(4.4)\quad k(x', y') = F(x', y') + \int_{\partial M} F(x', \xi') Z(\xi', y')\, \sigma(d\xi') \qquad (x' \in \partial M,\ y' \in \partial M,\ x' \neq y'),$$

où, sur ∂M, F est un noyau-fonction d'ordre -1 à choisir convenablement [46], et Z un noyau-fonction d'ordre $-1 + \mu$ $(0 < \mu < 1)$ que l'on cherche à déterminer comme noyau résolvant d'une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce dans l'espace de Banach $C(\partial M)$ associée à un noyau-fonction $N(x', y')$ sur ∂M d'ordre $-1 + \mu$ (voir à ce sujet l'appendice B) :

$$(4.5)\quad Z(x', y') - \int_{\partial M} N(x', z') Z(z', y')\, \sigma(dz') = N(x', y') \qquad (x' \in \partial M,\ y' \in \partial M,\ x' \neq y').$$

---

(46) Si Z est d'ordre $-1 + \mu$, le noyau-produit FZ est d'ordre $-2+\mu<-1$, ce qui fait que, lorsque k et F ont des symboles principaux, ceux-ci sont les mêmes.

Il revient au même (voir l'appendice B, et le n° 4.7 ci-dessous) de dire que l'on cherche à mettre la solution φ de l'équation $LH\varphi = -\psi$ sous la forme,

$$\varphi(x') = \int_{\partial M} F(x' , z') \eta(z') \sigma(dz') \qquad (x' \in \partial M) , \tag{4.6}$$

où η est une fonction de $C(\partial M)$ à déterminer par une équation intégrale de deuxième espèce de noyau N :

$$\eta(x') - \int_{\partial M} N(x' , y') \eta(y') \sigma(dy') = \psi(x') \qquad (x' \in \partial M) . \tag{4.7}$$

Cette réduction va être possible, grâce au résultat suivant :

4.3. - On désigne par $F(x' , y')$ le noyau-fonction sur ∂M identique, dans le cas (1) au noyau $2\Gamma(x' , y')$ (restriction à ∂M du noyau double de la solution fondamentale $\Gamma(x , y)$; n° 4.1), et dans le cas (2) au noyau de Green $\chi(x' , y')$ de Q (n° 4.1).

PROPOSITION [47]. - Il existe un noyau-fonction N sur ∂M d'ordre -1 dans le cas (1) et d'ordre $-1+\mu$ pour tout $\mu > 0$ dans le cas (2) tel que, pour tout $\zeta \in C^{2,\lambda}(M)$, et tout $x' \in \partial M$,

$$\int_{\partial M} \check{F}_{x'} L^* H^* \zeta \, d\sigma = -\zeta(x') + \int_{\partial M} \check{N}_{x'} \zeta \, d\sigma . \tag{4.8}$$

Cette proposition résulte immédiatement de la caractérisation de χ (relation (4.1)) et des lemmes 4.4, 4.5 et 4.6 ci-dessous.

4.4. LEMME [47]. - Si on pose $N^{(1)}(x' , y') = 2\{\frac{\partial}{\partial \gamma} \check{\Gamma}_{x'}(y') + p(y') \check{\Gamma}_{x'}(y')\}$ $(x' \in \partial M , \ y' \in \partial M , \ x' \neq y')$, $N^{(1)}$ est un noyau d'ordre -1 sur ∂M , et pour tout $\zeta \in C^{2,\lambda}(\partial M)$,

$$\int_{\partial M} 2\check{\Gamma}_{x'} \frac{\partial}{\partial \gamma} H^* \zeta \, d\sigma = -\zeta(x') + \int_{\partial M} N^{(1)}_{x'} \zeta \, d\sigma \qquad (x' \in \partial M) \quad [48] . \tag{4.9}$$

En effet, on va d'abord montrer que, pour $x \in \mathring{M}$,

$$\int_{\partial M} \check{\Gamma}_x \frac{\partial}{\partial \gamma} H^* \zeta \, d\sigma = \int_{\partial M} \zeta\{\frac{\partial}{\partial \gamma} \check{\Gamma}_x + p\Gamma_x\} d\sigma - H\zeta(x) . \tag{4.10}$$

---

[47] Sous les hypothèses et avec les notations du n° 4.1.

[48] Voir la remarque ci-dessous.

Désignant pour cela par V une sous-variété à bord compacte de M telle que $x \in \mathring{V} \subset V \subset \mathring{M}$, et appliquant la formule de Green (1.5) à la variété $M \setminus V$ et aux fonctions $\check{\Gamma}_x$ et $H^*\zeta$, on obtient [compte tenu de la propriété (SF_1) de Γ (n° A.3)],

$$0 = \int_{M\setminus V} \{H^*\zeta P\check{\Gamma}_x - \check{\Gamma}_x P^*H^*\zeta\}\, d\tau = \int_{\partial M} \check{\Gamma}_x \frac{\partial}{\partial \gamma} H^*\zeta\, d\sigma - \int_{\partial M} \zeta\left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \check{\Gamma}_x + p\Gamma_x\right) d\sigma$$
$$- \int_{\partial V} \{\check{\Gamma}_x \frac{\partial}{\partial \gamma_V} H^*\zeta - H^*\zeta \frac{\partial}{\partial \gamma_V} \check{\Gamma}_x - p_V\, \zeta\Gamma_x\}\, d\sigma_V\ .$$

D'où (4.10) [en vertu des propriétés (L_1) et (G_3) de Γ (n° 2.2 et 2.4)] en contractant V au point x.

Faisant tendre alors, dans (4.10), x vers $x' \in \partial M$, on obtient, d'après les propriétés (SF_4) et (SF_5) de Γ (n° A.3),

$$(4.11) \qquad \int_{\partial M} \check{\Gamma}_{x'} \frac{\partial}{\partial \gamma} H^*\zeta\, d\sigma = \int_{\partial M} \zeta\{\frac{\partial}{\partial \gamma} \Gamma_{x'} + p\Gamma_{x'}\}\, d\sigma - \frac{1}{2}\zeta(x')\ .$$

D'où (4.9) et le lemme.

<u>Remarque</u>. - Soient Q_1 un opérateur différentiel du premier ordre sur ∂M de classe A_λ relativement à g', et Q_1^* son adjoint.

On peut obtenir la relation (4.12) suivante lorsque l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \gamma} H^*$ est remplacé par $\frac{\partial}{\partial \gamma} H^* + Q^*$:

$$(4.12) \quad \int_{\partial M} \check{\Gamma}_{x'}\{\frac{\partial}{\partial \gamma} H^*\zeta + Q^*\zeta\}\, d\sigma = \int^{\mathcal{V}p}_{\partial M} \zeta\{\frac{\partial}{\partial \gamma} \check{\Gamma}_{x'} + Q\Gamma_{x'}\}\, d\sigma - \frac{1}{2}\zeta(x') \qquad (x' \in \partial M)\ ,$$

l'intégrale au second membre étant prise en valeur principale (voir [13], chapitre II, théorème 15.IV).

4.5. LEMME (49). - Il existe un noyau-fonction $N^{(2)}$ sur ∂M d'ordre $-1+\mu$ pour tout $\mu > 0$ tel que, pour tout $\zeta \in C^{2,\lambda}(\partial M)$,

$$(4.13) \qquad \int_{\partial M} \chi_{x'} \frac{\partial}{\partial \gamma} H^*\zeta\, d\sigma = \int_{\partial M} N^{(2)}_{x'}\, \zeta\, d\sigma \qquad (x' \in \partial M)\ .$$

En effet (50), on désigne d'abord, pour chaque $\alpha > 0$, par φ^α une fonction de classe C^∞ sur $\partial M \times \partial M$, comprise entre 0 et 1, égale à 1 au voisinage de la diagonale $\Delta_{\partial M\times\partial M}$ et telle que

---

(49) Sous les hypothèses et avec les notations du n° 4.1.

(50) Les idées de cette démonstration sont dues à J.-M. BONY.

(4.14) $$\overline{x'y'} \geq \alpha \implies \varphi^{\alpha}(x', y') = 0 \quad .$$

On suppose de plus que la famille $(\varphi^{\alpha})_{\alpha>0}$ a été choisie de telle sorte que, pour chaque μ, $0 < \mu \leq \lambda$, il existe une constante C_{μ} telle que, pour tout $x' \in \partial M$ et tout $\alpha > 0$,

(4.15) $$\|\varphi^{\alpha}_{x'}\|_{0,\mu} \leq C_{\mu}\, \alpha^{-\mu} \quad \text{et} \quad \|\varphi^{\alpha}_{x'}\|_{1,\mu} \leq C_{\mu}\, \alpha^{-1-\mu} \quad .$$

(α) Formellement, le noyau $N^{(2)}$ est donné par,

$$N^{(2)}_{x'} = \frac{\partial}{\partial \gamma} H\check{\chi}_{x'} - p\check{\chi}_{x'} \qquad (x' \in \partial M)$$

[il en serait ainsi d'après la formule de Green (1.5) (n° 1.3) si $\chi_{x'}$ appartenait à $C^{2,\lambda}(\partial M)$]. En fait, on pose, pour $x' \neq y'$,

(4.16) $$N^{(2)}(x', y') = \int_{\partial M} \theta(y', z')\, \varphi^{\alpha}_{x'}(z')\, \check{\chi}_{x'}(z')\, \sigma(dz')$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \gamma} H[\check{\chi}(1 - \varphi^{\alpha}_{x'})](y') - p(y')\, \check{\chi}_{x'}(y') \quad [51],$$

où α est tel que $\overline{x'y'} > \alpha$. Le second membre de (4.16) est bien défini puisque $\theta(y', .)$ est continue sur le support de $\varphi^{\alpha}_{x'}\, \check{\chi}_{x'}$, et que $\check{\chi}_{x'}(1 - \varphi^{\alpha}_{x'})$ étant dans $C^{2,\lambda}(\partial M)$ (n° 4.1), $H[\check{\chi}_{x'}(1 - \varphi^{\alpha}_{x'})]$ est dans $C^{2,\lambda}(M)$; et ce second membre ne dépend pas de α (pourvu que $\overline{x'y'} > \alpha$), puisque l'on a, par dérivation sous le signe somme,

(4.17) $$\frac{\partial}{\partial \gamma} H\varphi(y') = \int_{\partial M} \theta(y', z')\, \varphi(z')\, \sigma(dz')$$

pour tout $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ nulle au voisinage de y'.

(β) La fonction $N^{(2)}$ définie par (4.16) est un noyau-fonction d'ordre $-1 + \mu$ pour tout $\mu > 0$. En effet, tout d'abord, $N^{(2)}$ est continue sur $\partial M \times \partial M \setminus \Delta_{\partial M \times \partial M}$: cette continuité résulte, pour le premier terme au second membre, de celle de θ (corollaire 3 de la proposition A.6), et, pour le second, de la continuité de $x' \to \check{\chi}_{x'}(1 - \varphi^{\alpha}_{x'})$ de ∂M dans $C^{2,\lambda}(\partial M)$ (n° 4.1) et de celle de H de $C^{2,\lambda}(\partial M)$ dans $C^{2,\lambda}(M)$.

---

[51] $\theta(y', z') = \frac{\partial}{\partial \gamma} h^{z'}(y')$ est la dérivée normale du noyau de Poisson (appendice A, n° A.6), et p est le terme complémentaire de la formule de Green (n° 1.3).

Ensuite, $\mu > 0$ étant donné, $N^{(2)}$ est d'ordre $-1+\mu$; autrement dit, il existe une constante $C_\mu > 0$ telle que,

$$|N^{(2)}(x', y')| \leqslant C_\mu \, \overline{x'y'}^{2-n-\mu} \qquad (x' \in \partial M , \; y' \in \partial M , \; x' \neq y') \; . \tag{4.18}$$

On va examiner séparément les trois termes du second membre de (4.16) : posant $\overline{x'y'} = \rho > 0$, on a, pour le premier, en prenant $\alpha = \rho/2$,

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\partial M} \theta(y', z') \, \varphi^{\alpha}_{x'}(z') \, \check{\chi}_{x'}(z') \, \sigma(dz')\right| \\ &\qquad \leqslant \int_{\overline{z'x'} \leqslant \rho/2} |\theta(y', z')| \, |\check{\chi}_{x'}(z')| \, \sigma(dz') \\ &\qquad \leqslant \text{Cte} \times \rho^{-n} \int_{\overline{z'x'} \leqslant \rho/2} \overline{z'x'}^{3-n} \, \sigma(dz') \leqslant \text{Cte} \; \rho^{2-n} \quad (^{52}) \; , \end{aligned}$$

puisque

$$\overline{z'x'} \leqslant \rho/2 \quad \text{et} \quad \overline{x'y'} = \rho \implies \overline{z'y'} \geqslant \rho/2 \; ,$$

et en vertu de la majoration (A.16) de θ et de l'ordre -2 de χ .

En ce qui concerne le deuxième terme, on remarque d'abord qu'il suffit de montrer l'existence de C_μ pour $\mu < \lambda$. On remarque ensuite que les données qui sont de classe $C^{k,\lambda}$ $(k = 0 , 1 , 2)$ sont aussi de classe $C^{k,\mu}$ pour $\mu < \lambda$. En particulier, la proposition (A.5) (appendice A, n° A.5) entraîne que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \gamma} H$ est continu de $C^{1,\mu}(\partial M)$ dans $C^{0,\mu}(\partial M)$. Ainsi, il suffit d'obtenir une majoration de la forme,

$$\|\check{\chi}_{x'}(1 - \varphi^{\rho/2}_{x'})\|_{1,\mu} \leqslant C'_\mu \; \rho^{2-n-\mu} \; , \tag{4.19}$$

où la constante C'_μ ne dépend ni de x' , ni de ρ . Or, une telle majoration résulte sans difficulté de (4.3) (n° 4.1), de (4.15), et de ce que la norme $\| \;\|_{0,\mu}$ donne lieu à une inégalité de la forme

$$\|fg\|_{0,\mu} \leqslant \text{Cte} \; (\|f\|_{0,\mu} \|g\|_0 + \|f\|_0 \|g\|_{0,\mu}) \; .$$

(γ) La relation (4.13) est satisfaite lorsque $x' \notin \operatorname{Supp} \zeta$: la formule de Green donne d'abord,

---

(52) Dans le cas où $n > 3$; dans le cas où $n = 3$, on a une majoration par $\text{Cte} \; \rho^{-n} \int_{\overline{z'x'} \leqslant \rho/2} |\log \overline{z'x'}| \, \sigma(dz') \leqslant \text{Cte} \; \rho^{2-n-\mu}$.

(4.20) $$\int_{\partial M} \check{\chi}_{x'}(1-\varphi^{\alpha}_{x'}) \frac{\partial}{\partial \gamma} H^{*}\zeta \, d\sigma = \int_{\partial M} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} H - p\right)[\check{\chi}_{x'}(1-\varphi^{\alpha}_{x'})] \, \zeta \, d\sigma \quad ,$$

puisque $\check{\chi}_{x'}(1-\varphi^{\alpha}_{x'}) \in C^{2,\lambda}(\partial M)$. Ensuite, prenant $\alpha = \frac{1}{2} d(x' , \operatorname{Supp} \zeta)$, on a, d'après (4.17) [appliquée au noyau $\theta^{*}(x' , y') = \frac{\partial}{\partial \gamma} h^{*x'}(y')$],

$$\int_{\partial M} \varphi^{\alpha}_{x'} \check{\chi}_{x'} \frac{\partial}{\partial \gamma} H^{*}\zeta \, d\sigma = \int_{\overline{y'x'} \leqslant \alpha} \varphi^{\alpha}_{x'}(y') \, \check{\chi}_{x'}(y') \, \sigma(dy') \int_{\overline{z'x'} \geqslant 2\alpha} \theta^{*}(y' , z') \, \zeta(z') \, \sigma(dz')$$
$$= \int_{\overline{z'x'} \geqslant 2\alpha} \zeta(z') \, \sigma(dz') \int_{\overline{y'x'} \leqslant \alpha} \theta^{*}(y' , z') \, \varphi^{\alpha}_{x'}(y') \, \check{\chi}_{x'}(y') \, \sigma(dy') \; ;$$

d'où

(4.21) $$\int_{\partial M} \varphi^{\alpha}_{x'} \, \check{\chi}_{x'} \, \frac{\partial}{\partial \gamma} H^{*}\zeta \, d\sigma$$
$$= \int_{\overline{z'x'} \geqslant 2\alpha} \zeta(z') \, \sigma(dz') \int_{\overline{y'x'} \leqslant \alpha} \theta(z' , y') \, \varphi^{\alpha}_{x'}(y') \, \check{\chi}_{x'}(y') \, \sigma(dy') \; ,$$

en vertu de (A.17) (n° A.6). En rapprochant (4.20) et (4.21), on obtient la relation (4.13) cherchée (si $x' \notin \operatorname{Supp} \zeta$), en vertu de la définition de $N^{(2)}$ (relation (4.16)).

(δ) Enfin, la relation (4.13) est satisfaite pour tout $\zeta \in C^{2,\lambda}(\partial M)$: en effet, en vertu de (γ) ci-dessus, on a, pour $\zeta \in C^{2,\lambda}(\partial M)$ et $\alpha > 0$,

(4.22) $$\int_{\partial M} \check{\chi}_{x'} \, \frac{\partial}{\partial \gamma} H^{*}[\zeta(1-\varphi^{\alpha}_{x'})] \, d\sigma = \int_{\partial M} N^{(2)}_{x'} \; \zeta(1-\varphi^{\alpha}_{x'}) \, d\sigma \quad .$$

Lorsque α tend vers 0 , le second membre tend vers $\int_{\partial M} N^{(2)}_{x'} \; \zeta \, d\sigma$ en vertu du théorème de Lebesgue, puisque $N^{(2)}_{x'} \in \mathcal{L}^{1}(\partial M , \sigma)$. Il suffit donc, pour conclure, de montrer que le premier membre tend vers $\int_{\partial M} \check{\chi}_{x'} \, \frac{\partial}{\partial \gamma} H^{*}\zeta \, d\sigma$; ou encore, en vertu de l'ordre -2 de $\check{\chi}$, que,

(4.23) $$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\partial}{\partial \gamma} H^{*}[\zeta\varphi^{\alpha}_{x'}](y') = 0 \qquad \text{pour tout } \; y' \neq x' \quad ,$$

et qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que, pour tout $\alpha > 0$,

(4.24) $$\left|\frac{\partial}{\partial \gamma} H^{*}[\zeta\varphi^{\alpha}_{x'}](y')\right| \leqslant C' \, \overline{x'y'}^{\,-1-\lambda} \qquad (x' \in \partial M \; , \; y' \in \partial M \; , \; x' \neq y') \quad .$$

Pour établir (4.23), on pose $\overline{x'y'} = \rho$, et on remarque qu'en vertu de (4.17), de la majoration (A.16) de θ^{*} (n° A.6), et de (4.15) ci-dessus, on a, pour $\alpha \leqslant \rho/2$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \gamma} H^{*}[\zeta\varphi^{\alpha}_{x'}](y')\right| \leqslant \text{Cte} \, \|\zeta\| \, \rho^{-n} \int_{\overline{z'x'} \leqslant \alpha} \sigma(dz') \leqslant \text{Cte} \, \|\zeta\| \, \rho^{-n} \, \alpha^{n-1} \quad .$$

Enfin, pour établir (4.24), on déduit d'abord de (4.15) l'existence d'une constante $C'' > 0$ telle que, pour tout $\alpha > 0$, et $x' \in \partial M$,

$$\|\zeta\omega^{\alpha}_{x'}\|_{1,\lambda} \leqslant C'' \alpha^{-1-\lambda} . \tag{4.25}$$

Posant alors encore $\overline{x'y'} = \rho$, on a, d'une part, en vertu de la continuité de H^* de $C^{1,\lambda}(\partial M)$ dans $C^{1,\lambda}(M)$ (proposition A.5), et de (4.25),

$$\left|\frac{\partial}{\partial\gamma} H^*[\zeta\omega^{\alpha}_{x'}](y')\right| \leqslant \text{Cte } \rho^{-1-\lambda} \qquad \text{pour tout } \alpha \geqslant \rho/2 .$$

D'autre part, d'après (4.17), (A.16) et (4.25), on a, pour $\alpha \leqslant \rho/2$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial\gamma} H^*[\zeta\omega^{\alpha}_{x'}](y')\right| \leqslant \text{Cte } \|\zeta\| \rho^{-n} \int_{\overline{z'x'} \leqslant \rho/2} \sigma(dz') \leqslant \text{Cte } \|\zeta\| \rho^{-1} .$$

C. Q. F. D.

4.6. LEMME. - Il existe un noyau-fonction $N^{(3)}$ sur ∂M, d'ordre -1, tel que, pour tout $\zeta \in C^{2,\lambda}(\partial M)$,

$$\int_{\partial M} \check{X}_{x'} T\zeta \, d\sigma = \int_{\partial M} N^{(3)}_{x} \zeta \, d\sigma \qquad (x' \in \partial M) . \tag{4.26}$$

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du précédent, mais plus facile (le noyau $t(x', y')$ de T jouant le rôle de θ).

4.7. - A partir de la proposition 4.3, on introduit l'équation intégrale annoncée au n° 4.2 :

LEMME. - Soient η et ψ des fonctions de $C(M)$. Les deux relations suivantes sont équivalentes :

(α) $\int_{\partial M} (F\eta)L^*H^*\zeta \, d\sigma = -\int \psi\zeta \, d\sigma$ pour tout $\zeta \in C^{2,\lambda}(\partial M)$,

(β) $\eta - N\eta = \psi$.

[F et N désignant les noyaux sur ∂M intervenant dans la proposition 4.3, les fonctions $F\eta$ et $N\eta$ sont continues puisque F et N sont d'ordre < 0 (n° 0.4).]

En effet, pour tout $\zeta \in C^{2,\lambda}(\partial M)$, on a,

$$\int_{\partial M} F\eta\, L^*H^*\zeta\, d\sigma = \int_{\partial M} L^*H^*\zeta(y')\, \sigma(dy') \int_{\partial M} F(y'\,,\, x')\, \eta(x')\, \sigma(dx')$$

$$= \int_{\partial M} \eta(x')\, \sigma(dx') \int_{\partial M} \check{F}(x'\,,\, y')\, L^*H^*\zeta(y')\, \sigma(dy')$$

$$= - \int_{\partial M} \eta\zeta\, d\sigma + \int_{\partial M} \eta(x')\, \sigma(dx') \int_{\partial M} \check{N}(x'\,,\, y')\, \zeta(y')\, \sigma(dy') \;,$$

en vertu de la proposition 4.3 ;

$$= - \int_{\partial M} \zeta(\eta - N\eta)\, d\sigma \quad .$$

D'où le lemme.

On remarque alors que :

- d'une part, dans le cas (1) comme dans le cas (2), le noyau F est injectif [dans le cas (1) cela résulte de la propriété (A.4) de la solution fondamentale Γ (appendice A, n° A.3), et dans le cas (2) de la relation (4.2)] ;
- d'autre part, L^*H^* applique $C^{2,\lambda}(\partial M)$ sur un sous-espace dense dans $C(\partial M)$ [cela résulte de l'hypothèse d'unicité faite sur $(P\,,\,L)$ au n° 4.1, et du théorème II (n° 1.7)].

On déduit, donc, du lemme que

$$\eta \in C(\partial M) \quad \text{et} \quad \eta - N\eta = 0 \implies \eta = 0 \quad .$$

Ainsi, le noyau de l'opérateur $\underset{\sim}{1} - N$ dans $C(\partial M)$ est réduit à $\{0\}$. L'équation intégrale de Fredholm

(4.27) $$\eta - N\eta = \psi$$

admet donc une solution $\eta \in C(\partial M)$, et une seule, pour tout $\psi \in C(\partial M)$; et il existe un noyau Z sur ∂M ayant la même singularité que N (en particulier, Z est d'ordre $-1+\mu$ pour tout $\mu > 0$), tel que cette solution soit donnée par

$$\eta = \psi + Z\psi$$

[voir l'appendice B, théorème B.2].

Si on suppose maintenant que $\psi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ [dans le cas (2) il suffirait de supposer que $\psi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$], et si $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$ est la solution de l'équation $LH\varphi = -\psi$, on a aussi, en vertu de la formule de Green (1.10) (n° 1.6) appliquée aux fonctions $H\varphi$ et $H^*\zeta$,

$$\int_{\partial M} \varphi L^*H^*\zeta\, d\sigma = \int_{\partial M} \zeta LH\varphi\, d\sigma = - \int_{\partial M} \zeta\psi\, d\sigma \qquad \text{pour tout} \quad \zeta \in C^{2,\lambda}(\partial M) \quad .$$

Appliquant le lemme, on obtient donc

$$\varphi = F\eta = (F + FZ)\psi \quad .$$

~~Finalement, comme on a aussi~~ $\varphi = K\psi$ par définition de l'opérateur K (n° 3.1), on obtient,

$$K = F + FZ \quad .$$

L'opérateur K admet ainsi le noyau-fonction

$$k(x' , y') = F(x' , y') + \int_{\partial M} F(x' , z') \, Z(z' , y') \, \sigma(dz')$$
$$(x' \in \partial M \ , \quad y' \in \partial M \ , \quad x' \neq y') \ ;$$

et ce noyau est d'ordre -1, puisque, d'une part F est d'ordre -1 et d'autre part, Z étant, comme N, par exemple d'ordre $-\frac{1}{2}$, le noyau FZ est d'ordre $-1-\frac{1}{2}$, donc aussi d'ordre -1 [voir l'appendice B, proposition B.1, propriétés (2) et (3)].

On a ainsi établi la proposition suivante :

PROPOSITION ([53]). - L'opérateur K, inverse de LH, admet un noyau-fonction $k(x' , y')$ d'ordre -1 (sur ∂M ; n° 0.3).

On déduit alors du théorème V (n° 3.4) le théorème suivant :

THÉORÈME VI. - Sous les hypothèses faites au n° 4.1, le système frontière (P , L) admet une fonction de Green au sens strict ([54]).

<u>Remarque</u> 1. - Le système frontière (P , L) admet aussi une fonction de Green au sens strict lorsque l'on remplace l'hypothèse faite sur T au n° 4.1 par toute autre entraînant que la conclusion du lemme 4.6 subsiste [la proposition 4.3 subsiste alors aussi ainsi que la démonstration précédente].

<u>Remarque</u> 2. - Lorsque l'opérateur Q est d'ordre 1, ainsi qu'on l'a laissé entendre au n° 4.4 (remarque), la relation fondamentale (4.8) (proposition 4.3) subsiste à condition de prendre en valeur principale l'intégrale au second membre. L'équation intégrale (4.27) qui intervient ci-dessus n'est plus alors du type de Fredholm car $\check{N}$ est un opérateur de Calderon-Zygmund. La conclusion subsiste cependant (voir GIRAUD [7] et [9] et MIHLIN [12]).

([53]) Sous les hypothèses faites au n° 4.1.

([54]) N° 2.4.

Appendice A

Noyaux de Green et de Poisson du problème de Dirichlet

On introduit ci-dessous diverses propriétés fines des noyaux de Green et de Poisson du problème de Dirichlet qui sont utilisées dans le reste de l'exposé.

Ces propriétés sont énoncées avec seulement de très vagues indications de démonstrations, et des références à des situations particulières [cas d'un ouvert de R^n et travaux de GIRAUD répertoriés par MIRANDA dans son livre [13] ; cas de données C^∞ et travaux récents sur les opérateurs pseudo-différentiels (voir [4], [10] et [11]). Ces propriétés apparaissent donc, telles qu'elles sont énoncées, comme des conjectures raisonnables. Mettre au point des démonstrations complètes constitue tout un programme de travail !

A.1. - Dans tout cet appendice, on désigne par P un opérateur elliptique sur M de classe A_λ (relativement à g ; n° 1.1) dont la partie principale est conjuguée de g ; et on suppose que P possède la propriété d'unicité pour le problème de Dirichlet :

$$(U_d) \qquad u \in C^2(M) , \quad Pu = 0 \quad \text{et} \quad \gamma^0 u = 0 \implies u = 0 .$$

Les applications $u \to (Pu , \gamma^0 u)$ et $u \to (P^* u , \gamma^0 u)$ sont alors des isomorphismes de $C^{2,\lambda}(M)$ sur $C^{0,\lambda}(M) \times C^{2,\lambda}(\partial M)$ [de la propriété d'unicité pour P, on déduit d'abord que $u \to (Pu , \gamma^0 u)$ est un isomorphisme de $C^{2,\lambda}(M)$ sur $C^{0,\lambda}(M) \times C^{2,\lambda}(\partial M)$ (voir exp. 4, n° I.4 et I.5) ; de la formule de Green (1.5) (n° 1.3) résulte alors la propriété d'unicité pour P^*, et le résultat annoncé].

On désignera par G^0 l'opérateur de Green, et par H l'opérateur harmonique du problème de Dirichlet associé à P : G^0 et H sont les applications linéaires continues de $C^{0,\lambda}(M)$ sur $C^{2,\lambda}(M)$ et de $C^{2,\lambda}(\partial M)$ dans $C^{2,\lambda}(M)$ respectivement caractérisées par les propriétés :

$$(A.1) \qquad PG^0 f = - f , \quad \gamma^0 G^0 f = 0 \qquad (f \in C^{0,\lambda}(M)) ,$$

$$(A.2) \qquad PH\omega = 0 , \qquad \gamma^0 H\omega = \omega \qquad (\omega \in C^{2,\lambda}(\partial M)) \quad (^{55}) .$$

---

(55) Voir exp. 4, n° I.6.

On désignera de même par G^{0*} l'opérateur de Green, et par H^* l'opérateur harmonique du problème de Dirichlet associé à P^*.

A.2. – En vertu des propriétés de maximum (exp. 4, n° I.2, proposition 2), la propriété (U_d) est satisfaite, en particulier (exp. 4, théorème 1A), lorsque :

(D) P ou P^* est un opérateur de diffusion [$P1 \leqslant 0$ (resp. $P^*1 \leqslant 0$)] et, dans chaque composante connexe de M dont le bord est vide, la fonction $P1$ (resp. P^*1) n'est pas identiquement nulle.

Les opérateurs G^0 et H se prolongent alors en des opérateurs positifs (donc continus) respectivement de $C(M)$ dans $C(M)$ et de $C(\partial M)$ dans $C(M)$.

A.3. <u>Solutions fondamentales relatives à</u> P (voir le n° 2.6).

PROPOSITION [56]. – Il existe, sur M, au moins une solution fondamentale $\Gamma(x, y)$ relative à P ayant les propriétés suivantes :

(SF_1) $\check{\Gamma}(x, y) = \Gamma(y, x)$ est une solution fondamentale relative à P^*.

(SF_2) La fonction $(x, y) \to \Gamma(x, y)$ est de classe $C^{2,\lambda}_{loc}$ sur $M \times M \setminus \Delta_{M\times M}$.

(SF_3) Pour tout couple (H, K) de compacts disjoints de M, il existe une constante $C > 0$ telle que,

(A.3) $\|\Gamma_x\|_{j,K} \leqslant C\, d(H, K)^{2-n-j}$ et $\|\Gamma_x\|_{j,\lambda,K} \leqslant C\, d(H, K)^{2-n-j-\lambda}$ $(x \in H,\ j = 1, 2)$

et

(A.3') L'application $x \to \Gamma_x$ de H dans $C^{2,\lambda}(K)$ est continue.

(SF_4) Les noyaux-fonctions $\frac{\partial}{\partial\gamma}\Gamma_{x'}(y')$ et $\frac{\partial}{\partial\gamma}\check{\Gamma}_{x'}(y')$ $(x' \in \partial M,\ y' \in \partial M,\ x' \neq y')$ sur ∂M sont d'ordre -1 (sur ∂M ; n° 0.3).

(SF_5) Pour chaque $\zeta \in C(\partial M)$,

(A.4) $\int_{\partial M} \Gamma(x', y')\, \zeta(y')\, \sigma(dy') = 0$ pour tout $x' \in \partial M \implies \zeta = 0$,

(A.4') $\int \check{\Gamma}(x', y')\, \zeta(y')\, \sigma(dy') = 0$ pour tout $x' \in \partial M \implies \zeta = 0$,

---

[56] Sous les hypothèses faites sur P au n° A.1 ; on rappelle en particulier que g est supposée de classe $C^{1,\lambda}$ (n° 0.1).

$$\text{(A.5)}\quad \lim_{\substack{x\to x'\\ x\in \overset{\circ}{M}}} \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial \gamma}\Gamma_x(y')\,\zeta(y')\,\sigma(dy') = \frac{1}{2}\zeta(x') + \int_{\partial M}\frac{\partial}{\partial \gamma}\Gamma_{x'}(y')\,\zeta(y')\,\sigma(dy') \quad (x'\in \partial M)$$

$$\text{(A.5')}\quad \lim_{\substack{x\to x'\\ x\in \overset{\circ}{M}}} \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial \gamma}\check{\Gamma}_x(y')\,\zeta(y')\,\sigma(dy') = \frac{1}{2}\zeta(x') + \int_{\partial M}\frac{\partial}{\partial \gamma}\check{\Gamma}_{x'}(y')\,\zeta(y')\,\sigma(dy') \quad (x'\in \partial M).$$

[Voir [13], chapitres II, III et IV, et les travaux de GIRAUD qui y sont cités.]

En particulier, lorsque la variété M est sans bord $(\partial M = \emptyset)$, la solution fondamentale Γ est, en vertu du théorème III (n° 2.4 ; L étant alors l'opérateur frontière trivial sur ∂M qui est vide), l'unique fonction de Green de l'opérateur P, et la relation (2.7) (n° 2.4) s'écrit,

$$\text{(A.6)}\qquad u(x) = -\int_M \Gamma(x\,,\,y)\,Pu(y)\,\tau(dy) \qquad (x\in M\,,\ u\in C^2(M)) \quad ([57])\ .$$

<u>Remarque</u> 1. – En fait, pour établir l'existence de la solution fondamentale Γ sur la variété M, on commence par traîter le cas où M est une variété (compacte) sans bord : sous l'hypothèse d'unicité qui se réduit ici $(\partial M = \emptyset)$ à

$$u \in C^2(M) \quad \text{et} \quad Pu = 0 \implies u = 0 \quad ,$$

on peut utiliser la méthode basée sur la recherche du noyau résolvant d'une équation intégrale de Fredholm (voir [13], n° 19, page 49, et l'appendice B) pour construire Γ, puis les majorations höldériennes (voir [13], théorème 36.IV, page 129) pour obtenir la régularité (SF_2).

On passe ensuite au cas où $\partial M \neq \emptyset$, en plongeant M dans une variété compacte sans bord $\hat{M}$ (son double, par exemple) à laquelle on prolonge l'opérateur P en un opérateur $\hat{P}$ convenable ; et en prenant la restriction à M de la fonction de Green $\hat{\Gamma}$ de $\hat{P}$ obtenue comme ci-dessus.

<u>Remarque</u> 2. – Les propriétés (SF_4) et (SF_5) (relations (A.4) et (A.5)) sont à la base de la résolution du problème de Dirichlet par réduction à une équation intégrale de Fredholm (voir [13], n° 21, page 59).

([57]) On peut appliquer, en particulier, ce dernier résultat à la variété ∂M munie de la métrique riemannienne g' .

A.4. Noyau de Green.

THÉORÈME [58]. - Il existe un noyau-fonction (au sens strict ; n° 0.2) $G^0(x, y)$ sur M, et un seul, ayant les propriétés suivantes :

(1) G^0 est une solution fondamentale sur M relative à P (n° 2.6).

(2) $G^0(x, y') = 0$ pour tout $x \in M$, $y' \in \partial M$, $x \neq y'$.

De plus, le noyau $\check{G}^0$ transposé de G^0 (n° 0.2) est une solution fondamentale sur M relative à P^*, et :

(3) $\check{G}^0(y, x') = G^0(x', y) = 0$ pour tout $x' \in \partial M$, $y \in M$, $x' \neq y$.

En outre, les noyaux $G^0(x, y)$ et $\check{G}^0(x, y)$ sont de classe $C^{2,\lambda}_{loc}$ en y (n° 0.2).

[A partir d'une solution fondamentale Γ relative à P et de la solution du problème de Dirichlet, on établit facilement, comme au n° 2.7, l'existence du "noyau au sens large" G^0 (avec la propriété (2) pour $x \in \overset{\circ}{M}$). Le fait que G^0 est un noyau d'ordre -2 sur M (relations (0.2) et (0.2'), n° 0.2), la classe $C^{2,\lambda}_{loc}$ en y pour G^0 et $\check{G}^0$, ainsi que la relation

$$\lim_{\substack{x \to x' \\ y \to y'}} G^0(x, y) = 0 \qquad (x' \in \partial M, \; y' \in \partial M, \; x' \neq y'),$$

résultent ensuite des majorations höldériennes au voisinage d'un ouvert de ∂M contenues dans le théorème 36.IV de [13]. La propriété de symétrie résulte enfin d'une démonstration analogue à celle de la proposition 2.5 ci-dessus.]

COROLLAIRE 1. - Pour tout $u \in C^2(M)$ et tout $x \in \overset{\circ}{M}$,

$$\text{(A.7)} \qquad u(x) = -\int_M G^0(x, y)\, Pu(y)\, \tau(dy) + \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial \nu} G^0_x(y')\, u(y')\, \sigma(dy')$$

et

$$\text{(A.7')} \qquad u(x) = -\int_M \check{G}^0(x, y)\, P^*u(y)\, \tau(dy) + \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial \nu} \check{G}^0_x(y')\, u(y')\, \sigma(dy').$$

COROLLAIRE 2. - Pour tout $f \in C^{0,\lambda}(M)$ et tout $x \in M$,

$$\text{(A.8)} \qquad G^0 f(x) = \int_M G^0(x, y)\, f(y)\, \tau(dy)$$

et

$$\text{(A.8')} \qquad G^{0*} f(x) = \int_M \check{G}^0(x, y)\, f(y)\, \tau(dy) = \int_M G^0(y, x)\, f(y)\, \tau(dy).$$

---

[58] Sous les hypothèses faites sur P au n° A.1.

[Le corollaire 1 résulte directement de la formule de représentation intégrale de Stokes-Levi (2.5) (n° 2.3) et de la définition de $G^0(x, y)$. Les relations (A.8) et (A.8'), pour $x \in \mathring{M}$, résultent du corollaire 1 ; pour $x \in \partial M$, elles se réduisent à $0 = 0$.]

Du corollaire 2, on déduit, compte tenu de la continuité de $G^0(x, y)$ sur $M \times M \setminus \Delta_{M\times M}$ (voir le n° 0.4) :

COROLLAIRE 3. – Les opérateurs de Green G^0 et G^{0*} se prolongent en des opérateurs linéaires compacts de $\mathcal{L}^\infty(M, \tau)$ dans $C(M)$ (encore notés G^0 et G^{0*}) définis par les relations (A.8) et (A.8').

A.5. <u>Noyaux de Poisson</u> – Pour $x \in M$, $y' \in \partial M$, $x \neq y'$, on pose

(A.9) $$h(x, y') = \frac{\partial}{\partial \nu} G_x^0(y') \quad \text{et} \quad h^*(x, y') = \frac{\partial}{\partial \nu} \check{G}_x^0(y') \quad (^{59}) .$$

h (resp. h^*) est le noyau de Poisson relatif à P (resp. P^*). Les noyaux G^0 et $\check{G}^0$ étant de classe C^2 en y, h et h^* sont des fonctions continues sur $\mathring{M} \times \partial M$, et, en vertu des relations (A.7) et (A.7') ci-dessus, on a, par définition de H et H^* (n° A.1) : pour tout $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$, $(x \in \mathring{M})$,

(A.10) $$H\varphi(x) = \int_{\partial M} h(x, y')\, \varphi(y')\, \sigma(dy') \quad \text{et} \quad H^*\varphi(x) = \int_{\partial M} h^*(x, y')\, \varphi(y')\, \sigma(dy') .$$

Ceci étant :

PROPOSITION (59). – Les opérateurs harmoniques H et H^* se prolongent (de façon unique) en des opérateurs linéaires continus de $C(\partial M)$ dans $C(M)$ (encore notés H et H^*) définis par (A.10), et résolvant le problème de Dirichlet : Pour tout $\varphi \in C(\partial M)$, $H\varphi$ et $H^*\varphi$ sont de classe C^2 sur $\mathring{M}$, et

$$P[H\varphi](x) = P^*[H^*\varphi](x) = 0 \qquad (x \in \mathring{M}) ,$$

$$\gamma^0\, H\varphi = \gamma^0\, H^*\varphi = \varphi .$$

De plus, H et H^* appliquent continûment $C^{1,\lambda}(\partial M)$ dans $C^{1,\lambda}(M)$.

[Dans le cas où M est plongée dans R^n, les résultats de la première partie sont établis dans le livre de MIRANDA [13], chapitre III ; et la deuxième partie dans GIRAUD [6] ainsi que, avec des données C^∞, dans le travail d'AGMON-DOUGLIS et NIRENBERG [1].]

---

(59) Sous les hypothèses faites au n° A.1.

COROLLAIRE.

(A.11) $$\sup_{x\in \overset{\circ}{M}} \int_{\partial M} |h(x\ ,\ y')|\ \sigma(dy') = \|H\| < +\infty$$

$$\text{et}\quad \sup_{y\in \overset{\circ}{M}} \int_{\partial M} |h^*(y\ ,\ x')|\ \sigma(dx') = \|H^*\| < +\infty\ .$$

A.6. - Les singularités du noyau de Poisson et de sa dérivée normale à la frontière peuvent être précisées comme suit :

PROPOSITION (60).

(1) Pour chaque $y' \in \partial M$, la fonction $h^{y'} = h(.\ ,\ y')$ est de classe C^2 (même de classe $C^{2,\lambda}_{loc}$) sur $M \setminus \{y'\}$, et

(A.12) $$Ph^{y'}(x) = 0 \qquad \text{pour tout}\quad x \in M \setminus \{y'\}\ .$$

(2) Il existe une constante $C > 0$ telle que,

(A.13) $$|h(x\ ,\ y')| \leqslant C\,\frac{d(x\ ,\ \partial M)}{\overline{xy'}^{\,n}} \qquad (x \in M\ ,\ y' \in \partial M\ ,\ x \neq y') \quad (^{61})\ .$$

COROLLAIRE 1. - Pour tout $y' \in \partial M$,

(A.14) $$\lim_{x\to x'} h(x\ ,\ y') = 0 \qquad (x' \in \partial M\ ,\ x' \neq y')\ ,$$

la limite étant uniforme lorsque x' décrit le complémentaire d'un voisinage de y'.

COROLLAIRE 2.

(A.15) $$|h(x\ ,\ y')| \leqslant \frac{C}{\overline{xy'}^{\,n-1}} \qquad (x \in M\ ,\ y' \in \partial M\ ,\ x \neq y')\ .$$

COROLLAIRE 3. - On pose $\theta(x'\ ,\ y') = \frac{\partial}{\partial\gamma} h^{y'}(x')$ $(x' \in \partial M\ ,\ y' \in \partial M\ ,\ x' \neq y')$. Alors θ est un noyau-fonction d'ordre 1 sur ∂M ; en particulier, C étant la constante qui intervient dans (A.13),

(A.16) $$\theta(x'\ ,\ y') \leqslant C\ \overline{x'y'}^{\,-n} \qquad (x' \in \partial M\ ,\ y' \in \partial M\ ,\ x' \neq y)\ .$$

---

(60) Sous les hypothèses faites sur P au n° A.1.

(61) $d(x\ ,\ \partial M)$ désignant la distance géodésique (relativement à g ; n° 0.1) de x à ∂M.

En outre,

(A.17) $\theta^*(y', x') = \frac{\partial}{\partial \gamma} h^{*x'}(y') = \theta(x', y') \quad (x' \in \partial M , \quad y' \in \partial M , \quad x' \neq y')$.

[La propriété (1) de la proposition précédente peut être établie à partir des majorations höldériennes au voisinage du bord contenues dans le théorème 36.IV de [13]. La majoration (A.13) (qui est tout-à-fait explicite pour le noyau de Poisson ordinaire d'une boule) réclame une étude fine du "développement en parties homogènes" du noyau h . Dans le cas de données C^∞ , un tel développement est sans doute plus ou moins classique (voir [3]). Dans le cas étudié ici, on peut procéder à partir des équations intégrales de Fredholm qui permettent de résoudre le problème de Dirichlet (voir [13], n° 21, page 60, équation (21.3)) et fournissent une expression explicite du noyau de Poisson en fonction d'une solution fondamentale.]

Appendice B

Noyau résolvant pour une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce sur $C(M)$

Les notations sont celles introduites au § 0.

B.1. Produit de deux noyaux.

PROPOSITION. - Soient N' et N'' des noyaux-fonctions ([62]) sur M respectivement d'ordres $-q'$ et $-q''$ avec $0 < q' < n$ et $0 < q'' < n$.

(1) Pour tout $(x , y) \in M \times M$, $x \neq y$, la fonction $z \to N'(x , z) N''(z , y)$ est dans $\mathcal{L}^1(M , \tau)$, et, si on pose,

(B.1) $$N(x , y) = \int_M N'(x , z) N''(z , y) \tau(dy) ,$$

on définit un noyau-fonction N sur M ([63]).

(2) Si $q' + q'' \leqslant n$, N est d'ordre $-(q' + q'')$.

(3) Si $q' + q'' > n$, N peut être prolongé en une fonction continue sur $M \times M$.

(4) Pour tout $f \in C(M)$,

(B.2) $$Nf = N'[N''f] .$$

([62]) Au sens strict ; voir le n° 0.2.

([63]) N° 0.2 ; en particulier, N est continu sur $M \times M \setminus \Delta_{M\times M}$.

En effet, on établit d'abord l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour $x \in M$, $y \in M$, $x \neq y$,

$$\text{(B.3)} \qquad \int_M |N'(x, z)\, N''(z, y)|\, \tau(dz) \leqslant C\, \overline{xy}^{q'+q''-n} \qquad \text{si} \quad q' + q'' < n ,$$

$$\text{(B.3')} \qquad \leqslant C \log \frac{\delta(M)}{\overline{xy}} \qquad \text{si} \quad q' + q'' = n .$$

Pour cela, on pose $\overline{xy} = \rho$ $(\rho > 0)$ et on majore l'intégrale en la partageant comme suit en quatre morceaux :

$$\int_{\overline{zx} \leqslant \rho/2} |N'(x, z)\, N''(z, y)|\, \tau(dz) \leqslant \text{Cte}\ \rho^{q''-n} \int_{\overline{zx} \leqslant \rho/2} \overline{zx}^{q'-n}\, dz \leqslant \text{Cte}\ \rho^{q'+q''-n}$$

(puisque $\overline{zx} \leqslant \rho/2$ et $\overline{xy} = \rho \implies \overline{zy} \geqslant \rho/2$). De même,

$$\int_{\overline{zy} \leqslant \rho/2} |N'(x, z)\, N''(z, y)|\, \tau(dz) \leqslant \text{Cte}\ \rho^{q'+q''-n} .$$

Ensuite,

$$\int_{\substack{2\rho \geqslant \overline{zx} \geqslant \rho/2 \\ \overline{zy} \geqslant \rho/2}} |N'(x, z)\, N''(z, y)|\, \tau(dz) \leqslant \text{Cte}\ \rho^{q'-n}\, \rho^{q''-n} \int_{\overline{zx} \leqslant 2\rho} \tau(dz) \leqslant \text{Cte}\ \rho^{q'+q''-n} .$$

Enfin,

$$\int_{\substack{\overline{zx} \geqslant 2\rho \\ \overline{zy} \geqslant \overline{zx}}} |N'(x, z)\, N''(z, y)|\, \tau(dz) \leqslant \text{Cte} \int_{\overline{zx} \geqslant 2\rho} \overline{zx}^{(q'+q''-n)-n}\, \tau(dz)$$

$$\leqslant \text{Cte}\ \rho^{q'+q''-n} \qquad \text{si} \quad q' + q'' < n$$

$$\leqslant \text{Cte} \log \frac{\delta(M)}{\rho} \qquad \text{si} \quad q' + q'' = n ;$$

et, de même pour

$$\int_{\substack{\overline{zx} \geqslant 2\rho \\ \overline{zy} \leqslant \overline{zx}}} |N'(x, z)\, N''(z, y)|\, \tau(dz) .$$

D'où (B.3) et (B.3').

On montre ensuite que la fonction $(x, y) \to N(x, y)$ définie par (B.1) est continue sur $M \times M \setminus \Delta_{M \times M}$ en utilisant une fonction $(x, y) \to \Phi(x, y)$ continue sur $M \times M$, égale à 1 au voisinage de $\Delta_{M \times M}$ et à support petit, et en décomposant l'intégrale en

$$\int_M N'(x\,,\,z)\,N''(z\,,\,y)(1-\Phi(x\,,\,z))(1-\Phi(z\,,\,y))\,\tau(dz)$$

qui est fonction continue de $(x\,,\,y)$ sur $M\times M$, et en un reste qui est petit avec le support de Φ. Les propriétés (1) et (2) sont ainsi établies, ainsi que (4) qui résulte immédiatement de (1).

Pour établir la propriété (3), il suffit de montrer que, pour $q' + q'' > n$,

$$\text{(B.4)} \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \int N'(x\,,\,z)\,N''(z\,,\,y)\,\tau(dz)$$

existe pour chaque $x_0 \in M$; ou encore que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que,

$$\text{(B.5)} \quad \int_{\overline{zx_0}\leqslant\rho} |N'(x\,,\,z)\,N''(z\,,\,y)|\,\tau(dz) \leqslant \varepsilon \quad \text{dès que} \quad \overline{xx_0} \leqslant \rho/2 \quad \text{et} \quad \overline{yx_0} \leqslant \rho/2 \ .$$

Or, pour $\overline{xx_0} \leqslant \rho/2$ et $\overline{yy_0} \leqslant \rho/2$, on a,

$$\int_{\substack{\overline{zx_0}\leqslant\rho\\ \overline{zx}\geqslant\overline{zy}}} |N'(x\,,\,z)\,N''(z\,,\,y)|\,\tau(dz) \leqslant \text{Cte} \int_{\overline{zy}\leqslant 2\rho} \overline{zy}^{(q'+q''-n)-n}\,\tau(dz) \leqslant \text{Cte}\ \rho^{q'+q''-n} ,$$

et de même,

$$\int_{\substack{\overline{zx_0}\leqslant\rho\\ \overline{zx}\leqslant\overline{zy}}} |N'(x\,,\,z)\,N''(z\,,\,y)|\,\tau(dz) \leqslant \text{Cte}\ \rho^{q'+q''-n} .$$

C. Q. F. D.

Le noyau N défini par (B.1) sera noté $N'N''$ comme l'opérateur intégral associé, et appelé produit de N' et N''.

B.2. THÉORÈME. - Soit N un noyau-fonction (au sens strict) sur M d'ordre $-q$ avec $0 < q < n$ (n° 0.2).

On suppose que,

$$(U_f) \qquad \eta \in C(M) \quad \text{et} \quad \eta - N\eta = 0 \implies \eta = 0 .$$

Alors, il existe un noyau-fonction Z sur M d'ordre $-q$ (et un seul) tel que,

$$\text{(B.6)} \qquad Z - NZ = Z .$$

En outre, pour tout $\psi \in C(M)$, la fonction $\eta = \psi + Z\psi$ est l'unique solution de l'équation intégrale

(B.7) $$\eta - N\eta = \psi \quad .$$

Z <u>est le noyau résolvant de l'équation intégrale</u> (B.7). - On établit ce résultat comme suit à partir du théorème de stabilité de l'indice (exp. 4, n° I.4) [ou seulement du théorème de Riesz (voir [5], page 310)] et de la proposition B.1 ci-dessus :

(α) L'opérateur linéaire (associé au noyau) N étant <u>compact</u> de $C(M)$ dans $C(M)$ (voir le n° 0.4 ci-dessus), l'application linéaire $\underset{\sim}{1} - N : \eta \rightarrow \eta - N\eta$ est un isomorphisme de $C(M)$ sur $C(M)$ (64) en vertu du théorème de Riesz et de l'hypothèse d'unicité (U_f).

(β) On cherche à mettre la solution η de (B.7) sous la forme $\eta = \psi + Z\psi$, où Z est un noyau-fonction d'ordre $-q'$ (avec $0 < q' < n$) à déterminer : Tout d'abord, la relation

(B.8) $$\psi + Z\psi - N(\psi + Z\psi) = \psi \qquad \text{pour tout} \quad \psi \in C(M)$$

est équivalente à l'égalité entre noyaux (ou opérateurs),

(B.9) $$Z - NZ = N \quad .$$

On cherche alors une solution pour (B.9) sous la forme

(B.10) $$Z = \sum_{k=1}^{p} N^k + Z^{(p)} \quad (^{65}) \; ,$$

où $Z^{(p)}$ est un noyau sur M d'ordre $-q''$, avec $0 < q'' < n$, à déterminer : Pour que Z vérifie (B.9), il faut et il suffit que $Z^{(p)}$ vérifie

(B.11) $$Z^{(p)} - NZ^{(p)} = N^{p+1} \quad .$$

Or, en vertu de la proposition (B.1) (propriétés (2) et (3)), pour p assez grand, le noyau N^{p+1} se prolonge en une fonction continue sur $M \times M$; autrement dit, $x \rightarrow N_x^{p+1}$ est une application continue de M dans $C(M)$. Tenant compte alors du résultat de (α) ci-dessus et posant, pour chaque $x \in M$,

---

(64) Isomorphisme pour la structure d'espace vectoriel topologique de $C(M)$ muni de la norme uniforme.

(65) N^k désigne la puissance k-ième de N .

(B.12) $$Z_x^{(p)} = (\underset{\sim}{1} - N)^{-1} (N_x^{p+1}) \quad ,$$

on définit un noyau $Z^{(p)}$ sur M, continu sur $M \times M$ et vérifiant (B.11). Le noyau Z défini, à partir de ce noyau $Z^{(p)}$, par (B.10) répond à la question puisque tous les noyaux N^k et $Z^{(p)}$ sont d'ordre $-q$ d'après la proposition B.1 (propriétés (2) et (3)).

C. Q. F. D.

Appendice C

Impossibilité d'une fonction de Green lorsque l'opérateur frontière L n'est pas quasi-local

Le résultat suivant justifie le caractère quasi-local (exp. 3, n° 4.2 et 4.7) imposé aux opérateurs frontière pour lesquels on recherche une fonction de Green :

On considère, sur M, un opérateur elliptique P de classe A_λ (relativement à g) dont la partie principale est conjuguée de g (n° 1.1), et un opérateur frontière L de la forme (66),

(C.1) $$Lu = \frac{\partial u}{\partial \gamma} + Q(\gamma^0 u) + Tu \qquad (u \in C^2(M)) \quad ,$$

où Q est un opérateur elliptique sur ∂M de classe $C^{0,\lambda}$, et T un opérateur frontière de Ventcel' de type intégral (exp. 3, n° 4.4) appliquant continûment $C^2(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M)$.

On suppose que le système frontière (P, L) possède la propriété d'unicité

(U) $$u \in C^2(M) \; , \qquad Pu = 0 \;\text{ et }\; Lu = 0 \implies u = 0 \quad .$$

Il en résulte, en vertu du théorème de stabilité de l'indice et du théorème 3 de l'exposé n° 4 (n° II.4), que l'application $u \to (Pu, Lu)$ est un isomorphisme de $C^{2,\lambda}(M)$ sur $C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$.

Dans ces conditions (66) :

PROPOSITION. - On suppose qu'il existe une fonction de Levi au sens large $G(x, y)$ relative à P sur M (n° 2.2) ayant les propriétés (G_2') et (G_3) (n° 2.4) et telle que, pour tout $u \in C^2(M)$ et tout $x \in \mathring{M}$,

---

(66) On aurait un résultat analogue dans le cas elliptique d'ordre 1 (n° 1.7).

(C.2) $$u(x) = - \int_M G_x \, Pu \, d\tau - \int_{\partial M} G_x \, Lu \, d\sigma \quad .$$

Alors, l'opérateur frontière L est quasi-local :

(C.3) $$u \in C^2(M) \quad \text{et} \quad \gamma^0 u = 0 \implies Tu = 0 \quad .$$

En effet, soit $u \in C^2(M)$ telle que $\gamma^0 u = 0$. En vertu du corollaire de la proposition 2.3, on a,

$$u(x) = - \int_M G_x \, Pu \, d\tau - \int_{\partial M} G_x \frac{\partial u}{\partial \gamma} d\sigma \qquad (x \in \mathring{M}) \quad .$$

D'où, compte tenu de (C.1) et de (C.2),

(C.4) $$\int_{\partial M} G_x \, Tu \, d\sigma = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathring{M} \quad .$$

On en déduit que $Tu = 0$: puisque $Tu \in C^{0,\lambda}(\partial M)$, la fonction $x \longrightarrow \int_{\partial M} G_x Tu \, d\sigma$ coïncide sur $\mathring{M}$ (d'après (C.2)) avec la solution $v \in C^{2,\lambda}(M)$ du système $Pv = 0$, $Lv = - Tu$.

C. Q. F. D.

Appendice D

Un théorème de convergence au bord

Le résultat suivant généralise le théorème A.11 de l'exposé n° 1 ; il jouera un rôle important dans l'exposé n° 6.

D.1. PROPOSITION. - Soit $N(x , y)$ un noyau-fonction au sens strict sur M d'ordre $-q$ avec $1 < q < n$ (n° 0.2). Alors, pour $f \in C(M)$ et $x \in M$,

(D.1) $$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_{D_\rho} N(x , y) \, f(y) \, \tau(dy) = \int_{\partial M} N(x , y') \, f(y') \, \sigma(dy') \quad ([67]) ,$$

la convergence ayant lieu uniformément lorsque x décrit M, et f un sous-ensemble équicontinu de $C(M)$.

En effet, pour chaque $\alpha > 0$, soit ϖ_α une fonction de $C(M \times M)$, comprise entre 0 et 1, égale à 1 au voisinage de la diagonale $\Delta_{M \times M}$ et telle que

---

([67]) Avec les notations du n° A.11 de l'exposé n° 1, pour chaque $\rho > 0$, D_ρ désigne l'ensemble $\{x \mid x \in M \text{ et } d(x , \partial M) < \rho\}$.

(D.2) $$\overline{xy} \geqslant \alpha \implies \varphi^{\alpha}(x , y) = 0 \ .$$

Soit, par ailleurs, H un sous-ensemble équicontinu de $C(M)$.

On décompose l'intégrale du premier membre de (D.1) en la somme de deux termes au moyen de φ^{α} : le premier terme, $\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} N_x(1 - \varphi_x^{\alpha})f \, d\tau$, converge, pour chaque $\alpha > 0$, lorsque ρ tend vers 0 vers $\int_{\partial M} N_x(1 - \varphi_x^{\alpha})f \, d\sigma$ en vertu du théorème A.11 de l'exposé n° 1, et ceci uniformément lorsque x décrit M et f décrit H [l'ensemble des fonctions $N_x(1 - \varphi_x^{\alpha})$ $(x \in M)$ est équicontinu puisque compact dans $C(M)$ comme image de M par l'application continue $x \to N_x(1 - \varphi_x^{\alpha})$].

Considérant alors le deuxième terme, $\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} N_x \, \varphi_x^{\alpha} f \, d\tau$, il reste à montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ et $\rho_0 > 0$ tels que

(D.3) $$\left|\int_{\partial M} N_x \, \varphi_x^{\alpha} f \, d\sigma\right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour} \quad x \in M \quad \text{et} \quad f \in H \ ,$$

(D.4) $$\left|\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} N_x \, \varphi_x^{\alpha} f \, d\tau\right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour} \quad x \in M \ , \quad f \in H \quad \text{et} \quad 0 < \rho < \rho_0 \ .$$

La relation (D.3) résulte des majorations suivantes :

$$\left|\int_{\partial M} N_x \, \varphi_x^{\alpha} f \, d\sigma\right| \leqslant \text{Cte} \, \|f\| \int_{\overline{y'x} \leqslant \alpha} \overline{y'x}^{\,q-n} \, \sigma(dy')$$

$$\leqslant \text{Cte} \, \|f\| \int_{\overline{y'x'} \leqslant 2\alpha} \overline{y'x'}^{\,q-n} \, \sigma(dy') \leqslant \text{Cte} \, \|f\| \, \alpha^{q-1}$$

[en désignant par x' un point de ∂M tel que $\overline{xx'} = d(x , \partial M)$, on a

$$\overline{y'x'} \leqslant \overline{y'x} + \overline{xx'} \leqslant 2\overline{y'x} \quad] .$$

En ce qui concerne (D.4), on remarque d'abord que, lorsque x décrit un compact K de $\overset{\circ}{M}$,

$$\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} N_x \, \varphi_x^{\alpha} f \, d\tau = 0$$

dès que $\rho < d(K , \partial M)$. Considérant ensuite un recouvrement fini de ∂M par des cartes locales (U_i , χ_i) de M , et tenant compte de ce que, sur chaque U_i , la distance géodésique $\overline{xy}$ est localement équivalente à la distance euclidienne $|x - y|$ ([68]), on obtient une inégalité de la forme,

---

([68]) On identifie $x \in U_i$ et $\chi_i(x) \in \overline{R^{n+}}$.

$$\text{(D.5)}\qquad \left|\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho\cap U_i} N_x\,\varphi_x^\alpha\, f\, d\tau\right| \leqslant \text{Cte}\,\|f\|\,\frac{1}{\rho}\int_{\substack{0\leqslant y_n\leqslant C_i\rho\\ |y-x|\leqslant C_i\alpha}} |y-x|^{q-n}\,dy \qquad (x\in U_i)\ ,$$

où C_i est une constante > 0 convenable. On en déduit (D.4), car, désignant par z' la projection sur l'hyperplan R_0^n (exp. 1, n° 1.1) de $z \in \overline{R^{n+}}$, on a, puisque $|y - x| \geqslant |y' - x'|$,

$$\frac{1}{\rho}\int_{\substack{0\leqslant y_n\leqslant C_i\rho\\ |y-x|\leqslant C_i\alpha}} |y-x|^{q-n}\,dy \leqslant \frac{1}{\rho}\int_0^{C_i\rho} dy^n \int_{|y'-x'|\leqslant C_i\alpha} |y'-x'|^{q-n}\,dy'$$

$$\leqslant \text{Cte}\ \alpha^{q-1}\ .$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Soit $(\Phi_\rho)_{\rho>0}$ une famille de fonctions de $C^\infty(M)$ telle que $0 \leqslant \Phi_\rho \leqslant 1_{D_\rho}$ pour tout $\rho > 0$, et

$$\lim_{\rho\downarrow 0} \frac{1}{\rho}\int_M \{1_{D_\rho} - \Phi_\rho\}\, d\tau = 0\ .$$

Alors, pour $f \in C(M)$ et $x \in M$,

$$\text{(D.6)}\qquad \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{1}{\rho}\int_M N_x\,\Phi_\rho\, f\, d\tau = \int_M N_x\, f\, d\sigma\ ,$$

avec la même uniformité que dans la proposition D.1.

D.2. - Le corollaire de la proposition D.1 peut être illustré par la propriété suivante : On considère un système frontière $(P\ ,\ L)$ ayant, par exemple, les propriétés postulées au n° 3.1, et admettant une fonction de Green au sens strict $G(x\ ,\ y)$. On désigne par f une fonction de $C^{0,\lambda}(M)$, et, pour chaque $\rho > 0$, par u_ρ la fonction de $C^{2,\lambda}(M)$ définie par :

$$\text{(D.7)}\qquad Pu_\rho = -\frac{1}{\rho}\,\Phi_\rho\, f\ ,\qquad Lu_\rho = 0 \quad {}^{(69)}\ .$$

On désigne, de plus, par u la fonction de $C^{2,\lambda}(M)$ définie par

$$\text{(D.8)}\qquad Pu = 0\ ,\qquad Lu = -\gamma^0 f\ .$$

Alors,

---

(69) $(\Phi_\rho)_{\rho>0}$ étant la famille de fonctions introduite dans le corollaire de la proposition (D.1).

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \|u_\rho - u\| = 0 \ .$$

[Il suffit de remarquer que,

$$u_\rho(x) = \frac{1}{\rho} \int_M G_x \, \Phi_\rho \, f \, d\tau \quad ,$$

$$u(x) = \int_{\partial M} G_x \, f \, d\sigma \qquad (x \in M) \quad ,$$

et d'appliquer la proposition D.1.]

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON (S.), DOUGLIS (A.) and NIRENBERG (L.). - Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equation satisfying general boundary conditions, I., Comm. pure and appl. Math., t. 12, 1959, p. 623-727.

[2] BOURBAKI (N.). - Intégration. Chap. 1-4. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[3] BOUTET de MONVEL (L.). - Pseudo-noyaux de Poisson et opérateurs pseudo-différentiels sur une variété à bords, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, p. 3927-3930.

[4] CALDERON (A. P.). - Singular integrals, Bull. Amer. math. Soc., t. 72, 1966, p. 427-463.

[5] DIEUDONNÉ (J.). - Fondements de l'analyse moderne. - Paris, Gauthier-Villars, 1965 (Cahiers scientifiques, 28).

[6] GIRAUD (G.). - Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 49, 1932, p. 1-104.

[7] GIRAUD (G.). - Equations à intégrales principales ; étude suivie d'une application, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 51, 1936, p. 251-372.

[8] GIRAUD (G.). - Généralisation des problèmes sur les opérateurs du type elliptique, Bull. Sc. math., 2e série, t. 56, 1932, 1re partie, p. 248-272 et 281-312.

[9] GIRAUD (G.). - Equations à intégrales principales d'ordre quelconque, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 53, 1936, p. 1-40.

[10] HÖRMANDER (L.). - Pseudo-differential operators, Comm. pure and appl. Math., t. 18, 1965, p. 501-517.

[11] ITÔ (S.). - Fundamental solution of parabolic differential equation and boundary value problem, Jap. J. Math., t. 27, 1957, p. 55-102.

[12] MIKHLIN (S. G.). - Multidimensional singular integrals and integral equations. - New York, London, Pergamon Press, 1965.

[13] MIRANDA (C.). - Equazioni alle derivate parziali di tipo ellitico. - Berlin, Springer-Verlag, 1955 (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 2).

[14] SATO (K.) and UENO (T.). - Multidimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ., t. 4, 1965, p. 529-605.

[15] Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, 10e année, 1965/66.

[16] VIŠIK (M. I.). - Sur les problèmes aux limites généraux pour les équations différentielles elliptiques [en russe], Trudy Mosk. Mat. Obšč., t. 1, 1952, p. 187-246 ; Doklady Akad. Nauk SSSR, N. S., 1952, p. 181-184.