Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

PHILIPPE COURRÈGE

Formules de Green

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 10, nº 1 (1965-1966), exp. nº 1, p. 1-30

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1965-1966__10_1_A1_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
10e année, 1965/66, n° 1

17 mars 1966

FORMULES DE GREEN

par Philippe COURRÈGE

§ 0. Introduction.

La formule de Green

$$\int_M (u\Delta v - v\Delta u)\, d\tau = \int_{\partial M} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

apparaît déjà à peu près sous cette forme dans le mémoire de GREEN [5], dans le cas où M est un ouvert de R^3 de frontière ∂M assez régulière, et où Δ est l'opérateur de la place ordinaire.

Dans le cas où M est un ouvert de R^n, cette formule joue un rôle fondamental en théorie du potentiel classique (voir BRELOT [3], p. 167, KELLOG [7], p. 86, et MIRANDA [8], p. 9) ; et, plus généralement, en théorie des problèmes aux limites elliptiques d'ordre supérieur, on en utilise couramment une extension au cas où l'on remplace Δ par un opérateur elliptique d'ordre $2m$ (voir, par exemple AGMON [1], p. 92).

Dans le cas où M est une variété riemannienne à bord, les éléments constitutifs de la formule (mesures riemanniennes τ et σ, opérateurs Δ et $\frac{\partial}{\partial n}$), si ce n'est la formule elle-même, apparaissent parfois dans le texte des ouvrages ou cours de géométrie différentielle (voir par exemple le livre de HELGASON [6], p. 386), mais ceci de façon dispersée, et mélangée à de savantes considérations qui, loin de l'éclairer, le voilent même souvent par des hypothèses parasites [il en est ainsi, par exemple, du caractère orientable de M, qui, bien qu'inutile (voir les n° 2.2 et 3.1), semble nécessaire si l'on déduit la formule de Green de la formule générale de Stokes $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$].

On trouvera ci-dessous un exposé élémentaire de la formule de Green sur une variété à bord C^∞ munie d'une métrique riemannienne (cadre "minimal" pour ce sujet), ne faisant appel à aucune connaissance préalable de géométrie différentielle : les éléments nécessaires en sont introduits au § 1 ; au § 2, on définit et caractérise les termes intervenant (mesure riemannienne, opérateurs gradient et divergence, dérivée normale, associés à une métrique riemannienne) ; enfin, au § 3, on établit la formule de Green. On présente, par ailleurs, en appendice, divers compléments qui seront utilisés dans la suite du présent séminaire [11].

§ 1. Préliminaires sur les variétés à bord [1].

1.1. Fonctions de classe C^p sur $\overline{R^{n+}}$. – On posera, n étant un entier $\geqslant 0$,

$$\overline{R^{n+}} = \{z \mid z = (z^i) \in R^n \text{ et } z^n \geqslant 0\}$$

et

$$R_0^n = \{z \mid z \in R^n \text{ et } z^n = 0\} \quad .$$

Si Ω est un ouvert de $\overline{R^{n+}}$, et si f est une fonction numérique définie sur Ω, en vertu d'une forme élémentaire du théorème de Whithney (voir [12]), il est équivalent d'affirmer que f se prolonge en une fonction de classe C^p $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$ sur un ouvert $\tilde{\Omega}$ de R^n tel que $\Omega = \tilde{\Omega} \cap \overline{R^{n+}}$, ou que f admet des dérivées partielles continues sur Ω jusqu'à l'ordre p, ces dérivées étant prises dans la direction $z^n \geqslant 0$ aux points de $\Omega \cap R_0^n$. On dira alors que f est de classe C^p sur Ω.

1.2. Structure de variété à bord. – Soient M un espace topologique séparé, et n un entier $\geqslant 1$.

On convient ici d'appeler carte locale de variété à bord de dimension n sur M tout couple (U, χ) où U est un ouvert de M, et χ un homéomorphisme de U sur un ouvert du demi-espace fermé $\overline{R^{n+}}$ (n° 1.1). Pour chaque $x \in U$, on note $\chi^i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les coordonnées de $\chi(x)$ dans R^n.

Un atlas de variété à bord sur M de classe C^∞ et de dimension n est alors un ensemble $\mathfrak{a}$ de cartes locales (de variété à bord) sur M tel que :

($\mathfrak{a}_1$) les cartes locales de $\mathfrak{a}$ recouvrent M,

($\mathfrak{a}_2$) pour tout couple (U, χ), $(\hat{U}, \hat{\chi})$ d'éléments de $\mathfrak{a}$ tels que $U \cap \hat{U} \neq \emptyset$, l'application $\hat{\chi} \circ \chi^{-1}$ de $\chi(U \cap \hat{U})$ sur $\hat{\chi}(U \cap \hat{U})$, ainsi que son application inverse, sont de classe C^∞ (au sens défini au n° 1.1).

Deux atlas $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sur M sont équivalents si $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{a}'$ est encore un atlas. Un atlas $\mathfrak{a}$ est complet si $\mathfrak{a}$ contient tout atlas qui lui est équivalent. Tout atlas sur M est contenu dans un atlas complet, et un seul.

Ceci étant, la phrase "soit M une variété à bord de classe C^∞ et de dimension n" correspond à la donnée d'un espace topologique séparé M et, dessus,

---

[1] Pour plus de détails, voir le chapitre I du livre de HELGASON [6] ou aussi la monographie de MUNKRES [9].

d'un atlas complet $\mathcal{A}$ de variété à bord de classe C^∞ et de dimension n ; une carte locale (U, χ) de M étant alors un élément de cet atlas ([2]).

On suppose, dans toute la suite, que M désigne une telle variété.

Si V est un ouvert de M, l'atlas complet $\mathcal{A}$, définissant la structure de variété à bord de M, induit sur V un atlas complet qui fait de V une variété à bord de classe C^∞ et de dimension n.

1.3. Fonctions numériques de classe C^p. Changements de coordonnées. - Si V est un ouvert de M, on désigne par $C^p(V)$ (p entier $\geqslant 0$, fini ou $+\infty$) l'espace vectoriel des fonctions numériques sur V telles que, pour toute carte locale (U, χ) de M (n° 1.2) :

(1.0) $\qquad f \circ \chi^{-1}$ est de classe C^p sur $\chi(U)$ $\qquad$ (au sens du n° 1.1) .

Pour que M soit de classe C^p sur V, il suffit, en vertu de $(\mathcal{A}_2)$ (n° 1.2), que (1.0) ait lieu pour un ensemble de cartes locales recouvrant V.

Si (U, χ) est une carte locale de M, $f \in C^1(U)$ et $x \in U$, on note $\frac{\partial f}{\partial \chi^i}(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ la dérivée $\frac{\partial}{\partial z^i}(f \circ \chi^{-1})$ prise au point $\chi(x)$.

En particulier, si $(\hat{U}, \hat{\chi})$ est une autre carte locale de M, $\frac{\partial \chi^i}{\partial \hat{\chi}^j}(x)$ désigne, pour $x \in U \cap \hat{U}$, la dérivée $\frac{\partial}{\partial z^j}(\chi^i \circ \hat{\chi}^{-1})$ prise au point $\hat{\chi}(x)$. Les matrices $\left[\frac{\partial \chi^i}{\partial \hat{\chi}^j}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\left[\frac{\partial \hat{\chi}^i}{\partial \chi^j}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont ainsi, inverses l'une de l'autre.

1.4. - On appelle bord de M, et on note ∂M le sous-ensemble de M formé des $x \in M$ pour lesquels il existe une carte locale (U, χ) de variété à bord sur M (n° 1.2) telle que :

(1.1) $$x \in U \quad \text{et} \quad \chi^n(x) = 0 .$$

∂M possède les propriétés suivantes :

$(\mathcal{B}_1)$ ∂M est un sous-ensemble fermé de M ;

$(\mathcal{B}_2)$ il existe sur ∂M un atlas complet $\mathcal{B}$ de variété (sans bord) de classe C^∞ et de dimension $n-1$, et un seul, tel que, pour toute carte locale (U, χ) de M, on définisse une carte locale $(U \cap \partial M, \chi')$ sur ∂M appartenant à $\mathcal{B}$

([2]) On distinguera évidemment une "carte locale de variété à bord sur (l'espace topologique) M", et une "carte locale de M". Voir le n° 1.11 à ce sujet.

en posant :

(1.2) $$\chi'(x) = (\chi^1(x) , \ldots , \chi^{n-1}(x)) \qquad (x \in U \cap \partial M) .$$

∂M sera toujours considéré comme variété (de dimension $n-1$) pour la structure définie par $\mathcal{B}$. L'ouvert $M \setminus \partial M$ de M est naturellement une variété (sans bord) de dimension n. En particulier, si $\partial M = \emptyset$, M est une variété (sans bord) ; ce qui permet de considérer une variété (sans bord) comme une variété à bord vide.

1.5. Espaces fibrés tangents $T(M)$ et $T(\partial M)$. – Pour chaque $x \in M$, on désigne par $G_x(M)$ l'espace vectoriel sur R des germes de fonctions numériques de classe C^∞ sur un voisinage de x, et par $T_x(M)$ l'espace des formes linéaires $\xi : f \longrightarrow \xi.f$ sur $G_x(M)$ ayant la propriété suivante (propriété de dérivation au point x) :

(1.3) $$\xi.(fg) = f(x)\xi.g + g(x)\xi.g \qquad (f , g \in G_x(M)) .$$

$T_x(M)$ est l'espace tangent en x à M, et ses éléments les vecteurs tangents en x à M. $T_x(M)$ est un espace vectoriel (sur R) de dimension n :

Si (U , χ) est une carte locale de M au voisinage de x $(x \in U)$, les formes linéaires $f \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \chi^i}(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des vecteurs tangents en x à M qui forment une base de $T_x(M)$ (voir, par exemple, HELGASON [6], p. 10). On notera $\partial^x/\partial\chi^i$ le vecteur tangent $f \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \chi^i}(x)$ en x $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Ceci permet d'écrire :

$$\xi.f = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial f}{\partial \chi^i}(x)$$

pour $\xi \in T_x(M)$ de la forme $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \, \partial^x/\partial\chi^i$; d'où il résulte que l'application $f \longrightarrow \xi.f$ peut être prolongée de façon unique aux fonctions f de classe C^1 au voisinage de x en conservant la propriété (1.3).

Si $x \in \partial M$, on définit un isomorphisme $\xi \longrightarrow \xi'$ de l'espace tangent $T_x(\partial M)$ à la variété ∂M en x sur un hyperplan de l'espace tangent $T_x(M)$ en posant, pour chaque $f \in C^\infty(M)$: $\xi'.f = \xi.f_{\partial M}$ (où $f_{\partial M}$ désigne la restriction de f à ∂M). On considèrera toujours $T_x(\partial M)$ comme plongé dans $T_x(M)$ par cet isomorphisme. Si (U , χ) est une carte locale de M au voisinage de x, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, le vecteur tangent $\partial^x/\partial\chi'^i \in T_x(\partial M)$ (n° 1.4) est ainsi identifié au vecteur tangent $\partial^x/\partial\chi^i \in T_x(M)$.

Enfin, si V est un ouvert de M, on identifie $T_x(V)$ à $T_x(M)$ pour tout $x \in V$.

1.6. - Un champs de vecteurs sur la variété M est une famille $(X_x)_{x\in M}$ où $X_x \in T_x(M)$ pour chaque $x \in M$.

Si X est un champs de vecteurs sur M et si $f \in C^1(M)$, on note $X.f$ la fonction numérique $x \longrightarrow X_x.f$ sur M ; on dit que X est de classe C^q $(0 \leqslant q \leqslant \infty)$ si $X.f \in C^q(M)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.

$f \longrightarrow X.f$ est alors une application de caractère local (supp $X.f \subset$ supp f) de $C^1(M)$ dans $C^0(M)$ ayant, de plus, la propriété de dérivation :

$$X.(fg) = f(X.g) + g(X.f) \qquad (f\ ,\ g \in C^1(M)) \quad . \tag{1.4}$$

Les champs de vecteurs apparaissent ainsi comme les opérateurs différentiels homogènes du 1er ordre sur M (3).

L'ensemble des champs de vecteurs de classe C^q sur M constitue un module sur l'algèbre $C^q(M)$ qui sera noté $\mathscr{V}^q(M)$.

1.7. Applications différentiables. Différentielles. - Soit $\hat{M}$ une deuxième variété (avec ou sans bord) de classe C^∞ et de dimension $\hat{n}$. On dit qu'une application Φ de M dans $\hat{M}$ est de classe C^p $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$ si $\hat{f} \circ \Phi \in C^p(M)$ pour tout $\hat{f} \in C^p(\hat{M})$.

Si Φ est de classe C^1, on appelle différentielle de Φ en $x \in M$ l'application linéaire $d_x \Phi$ de $T_x(M)$ dans $T_{\Phi(x)}(\hat{M})$ définie en posant :

$$d_x\,\Phi(\xi).\hat{f} = \xi.(\hat{f} \circ \Phi) \qquad \text{pour tout } \hat{f} \in C^\infty(\hat{M}) \text{ et } \xi \in T_x(M) \quad . \tag{1.5}$$

En particulier (prenant $M = R$), si $f \in C^1(M)$ (4) et $x \in M$, on note $d_x f$ la forme linéaire sur $T_x(M)$ définie par :

$$\langle d_x f\ ,\ \xi\rangle = \xi.f \qquad (\xi \in T_x(M)) \quad . \tag{1.6}$$

Si $\hat{\hat{M}}$ est une troisième variété, et si Ψ est une application de classe C^1 de $\hat{M}$ dans $\hat{\hat{M}}$, la fonction composée $\Psi \circ \Phi$ est aussi de classe C^1, et la propriété de composition des différentielles s'écrit :

---

(3) Voir le § 1 de l'exposé n° 3 du présent séminaire [11].

(4) Les fonctions $f \in C^p(M)$ (n° 1.3) sont exactement les applications de classe C^p de M dans R.

$$(1.7) \qquad d_x(\Psi \circ \Phi) = d_{\Phi(x)} \Psi \circ d_x \Phi \qquad (x \in M) .$$

1.8. - Une p-forme différentielle sur M (p entier > 0) est une famille $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ où, pour chaque $x \in M$, ω_x est une forme p-linéaire sur $T_x(M)$:

$$(\xi_1 , \ldots , \xi_p) \longrightarrow \omega_x(\xi_1 , \ldots , \xi_p) .$$

Si ω est une p-forme différentielle sur M, et si $X^1 , \ldots , X^p$ sont des champs de vecteurs sur M, on note $\omega(X^1 , \ldots , X^p)$ la fonction numérique $x \longrightarrow \omega_x(X^1_x , \ldots , X^p_x)$ sur M. On dit que ω est de classe C^q $(0 \leqslant q \leqslant \infty)$ si $\omega(X^1 , \ldots , X^p)$ est une fonction de classe C^q pour tout système $(X^1 , \ldots , X^p)$ de champs de vecteurs de classe C^∞.

Les composantes de ω relativement à la carte locale (U , χ) de M sont les fonctions $x \longrightarrow \omega_x(\partial^x/\partial\chi^{\sigma 1} , \ldots , \partial^x/\partial\chi^{\sigma p})$, $\sigma \in \{1 , 2 , \ldots , n\}^{\{1,2,\ldots,p\}}$.

En particulier, si $f \in C^{q+1}(M)$, et si on pose $\omega_x = d_x f$ pour tout $x \in M$, on définit une 1-forme de classe C^q sur M qui est notée df. Si X est un champs de vecteurs sur M, on note fréquemment $\langle df , X \rangle$ au lieu de $X.f$ la fonction $x \longrightarrow \langle d_x f , X_x \rangle$.

1.9. - Un champs de p-vecteurs (p entier > 0) sur M est une famille $(\Pi_x)_{x \in M}$ où, pour chaque $x \in M$, Π_x est une forme p-linéaire sur le dual $T^*_x(M)$ de l'espace tangent $T_x(M)$.

Si Π est un champs de p-vecteurs sur M, et si $\omega^1 , \ldots , \omega^p$ sont des 1-formes différentielles sur M, on note $\Pi(\omega^1 , \ldots , \omega^p)$ la fonction

$$x \longrightarrow \Pi_x(\omega^1_x , \ldots , \omega^p_x)$$

sur M. On dit que Π est de classe C^q si $\Pi(\omega^1 , \ldots , \omega^p)$ est de classe C^q pour tout système $(\omega^1 , \ldots , \omega^p)$ de 1-formes de classe C^∞.

1.10. Partitions de l'unité.

THÉORÈME (5). - On suppose que la variété M est normale (6). Alors, pour tout recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de M localement fini et formé d'ouverts relative-

(5) Voir HELGASON [6], p. 8.
(6) En temps qu'espace topologique.

ment compacts, il existe une famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ de fonctions positives de classe C^∞ sur M telle que :

(i) pour chaque $\alpha \in A$, φ_α a son support compact contenu dans U_α ;

(ii) pour chaque $x \in M$, $\sum_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(x) = 1$.

La famille (φ_α) est appelée une partition de l'unité sur M subordonnée au recouvrement (U_α).

1.11. Cartes locales de M de classe C^p $(p \geqslant 0)$. – On note d'abord que, si (U, χ) est une carte locale de M (n° 1.2), pour chaque $x \in U$, la famille $(d_x \chi^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est exactement la base de l'espace $T^*_x(M)$ (dual de $T_x(M)$), duale de la base $(\partial^x/\partial\chi^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$:

$$\langle d_x \chi^j , \partial^x/\partial\chi^i\rangle = \delta_{ji} \qquad (1 \leqslant i , j \leqslant n) . \tag{1.8}$$

Ceci étant, on appellera carte locale de M de classe C^p (p entier $\geqslant 0$, fini ou $+\infty$), toute carte locale de variété à bord sur M, (U, χ) (voir le n° 1.2 : U est un ouvert de M et χ un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\overline{R^{n+}}$), telle que χ et χ^{-1} soient des applications de classe C^p (n° 1.7).

En particulier, une carte locale de M de classe C^0 est seulement une carte locale de variété à bord sur M, et une carte locale de M de classe C^∞ est une carte locale de M (élément de l'atlas complet définissant la structure de variété de M ; n° 1.2).

Si (U, χ) est une carte locale de M de classe C^p avec $p \geqslant 1$, et si $x \in U$, la famille $(d_x \chi^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ forme encore une base de l'espace $T^*_x(M)$, on notera encore $(\partial^x/\partial\chi^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base de $T_x(M)$ duale de $(d_x \chi^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (relation (1.8)). Si $f \in C^1(U)$ et $x \in U$, posant, comme au n° 1.3,

$$\frac{\partial f}{\partial\chi^i}(x) = \frac{\partial}{\partial z^i}(f \circ \chi^{-1})(\chi(x)) ,$$

on a encore,

$$\frac{\partial f}{\partial\chi^i}(x) = \langle d_x f , \partial^x/\partial\chi^i\rangle \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) . \tag{1.9}$$

Dans la suite, une carte locale de M de classe C^p $(p \geqslant 1)$ sera couramment appelée simplement "carte locale de M" lorsque la valeur précise de p n'importe pas (pourvu que $p \geqslant 1$).

§ 2. Métriques riemanniennes. Mesure riemannienne, gradient et divergence associés (7).

2.1. — Une métrique riemannienne sur M est une 2-forme différentielle g sur M (n° 1.8) telle que, pour tout $x \in M$, la forme bilinéaire

$$\xi , g \longrightarrow g_x(\xi , \eta)$$

sur $T_x(M)$ soit symétrique et définie positive :

$$g_x(\xi , \eta) = g_x(\eta , \xi) \qquad \text{pour tout } \xi , \eta \in T_x(M) ,$$

et

$$g_x(\xi , \xi) > 0 \qquad \text{pour tout } \xi \in T_x(M) , \ \xi \neq 0 .$$

Si (U , χ) est une carte locale de M (8), on notera, pour $x \in U$,

$$g_{ij}(x) = g_x(\partial^x/\partial\chi^i , \partial^x/\partial\chi^j) \qquad (1 \leq i , j \leq n)$$

les composantes de g_x relativement à la base $(\partial^x/\partial\chi^i)_{1 \leq i \leq n}$ de $T_x(M)$ (n° 1.5) ; et on posera

$$g^\chi(x) = \det[g_{ij}(x)] .$$

On a, $g_{ij}(x) > 0$ $(1 \leq j \leq n)$ et $g^\chi(x) > 0$ pour tout $x \in U$.

Si la variété M est paracompacte, il n'est pas difficile de construire sur M une métrique riemannienne de classe C^∞ : désignant par (U_α , χ_α) un recouvrement localement fini de M par des cartes locales et par (φ_α) une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement (n° 1.10), il suffit de se donner, pour chaque α, et chaque $x \in U_\alpha$, une matrice définie positive $g^\alpha_{ij}(x)$ fonction C^∞ de x, et de poser, pour chaque $x \in M$ et chaque $\xi , \eta \in T_x(M)$:

$$g_x(\xi , \eta) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \sum_{i,j=1}^{n} g^\alpha_{ij}(x)\, \xi^i \eta^j$$

où $\xi^i = \langle d_x \chi^i , \xi \rangle$ et $\eta^j = \langle d_x \chi^j , \eta \rangle$ $(1 \leq i , j \leq n)$.

Inversement, s'il existe une métrique riemannienne sur M, M est métrisable en temps qu'espace topologique (appendice n° A.3), donc paracompacte en vertu du théo-

---

(7) M désigne toujours une variété à bord de classe C^∞ et de dimension n (n° 1.2).

(8) De classe C^p avec $p \geq 1$ (voir le n° 1.11).

rème en 4 lemmes de BOURBAKI ([2], § 4, n° 5).

La comparaison de deux métriques riemanniennes sur M fait apparaître la fonction scalaire suivante :

LEMME. - Soient g et $\hat{g}$ deux métriques riemanniennes de classe C^q sur M. Il existe une fonction, partout > 0, $d \in C^q(M)$ (et une seule) telle que, pour tout $x \in M$ et toute suite $\xi_1, \ldots, \xi_n$ de vecteurs de $T_x(M)$, on ait

(2.1) $$\det[\hat{g}_x(\xi_i , \xi_j)] = d(x) \det[g_x(\xi_i , \xi_j)] .$$

En particulier, si (U , χ) est une carte locale de M, et si $x \in U$,

(2.1') $$d(x) = \frac{\hat{g}^\chi(x)}{g^\chi(x)} .$$

[Vérification sans difficulté à partir de (2.1') grâce à la relation,

$$\det[g(\xi_i , \xi_j)] = (\det[\xi_i^k])^2 g^\chi .]$$

La fonction d sera appelée densité de $\hat{g}$ par rapport à g, et notée $\hat{g}/g$.

2.2. Mesure riemannienne associée à une métrique riemannienne.

THÉORÈME. - Si g est une métrique riemannienne de classe C^0 sur M, il existe une mesure de Radon positive τ_g sur M, et une seule, telle que, pour toute carte locale (U , χ) de M (9), et toute fonction $f \in C^0(M)$ à support compact contenu dans U,

(2.2) $$\int_M f \, d\tau_g = \int_{\chi(U)} f(\chi^{-1}(z)) \sqrt{g^\chi(\chi^{-1}(z))} \, dz \quad (10)$$

En outre, si $\hat{g}$ est une autre métrique riemannienne de classe C^0 sur M, on a $\tau_{\hat{g}} = \sqrt{\hat{g}/g}\, \tau_g$ (11) :

(2.2') $$\int_M f \, d\tau_{\hat{g}} = \int_M f \sqrt{\hat{g}/g} \, d\tau_g$$ pour tout $f \in C^0(M)$ à support compact.

τ_g est la mesure riemannienne associée à g. On la note couramment τ au lieu de τ_g.

---

(9) De classe C^p avec $p \geqslant 1$ (voir le n° 1.11).

(10) dz est la mesure de Lebesgue sur R^n.

(11) Où $\hat{g}/g$ est la densité de $\hat{g}$ par rapport à g (n° 2.1).

En effet, considérant une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de M par des cartes locales [12] (théorème 1.10), d'une part l'unicité de τ_g résulte immédiatement de (2.2), d'autre part son existence sera établie si l'on montre que,

$$\int_{\chi(U)} f \circ \chi^{-1} \sqrt{g^{\chi} \circ \chi^{-1}}\, dx = \int_{\hat{\chi}(\hat{U})} f \circ \hat{\chi}^{-1} \sqrt{g^{\hat{\chi}} \circ \hat{\chi}^{-1}}\, dx \quad ,$$

dès que (U , χ) et $(\hat{U} , \hat{\chi})$ étant des cartes locales de M, $\operatorname{supp} f \subset U \cap \hat{U}$.

Or, posant $\Omega = \chi(U \cap \hat{U})$, $\hat{\Omega} = \hat{\chi}(U \cap \hat{U})$ et $\Phi = \hat{\chi} \circ \chi^{-1}$, et tenant compte de la formule de changement de variable pour les intégrales multiples, on est ramené à montrer que,

$$\int_{\Omega} f \circ \chi^{-1} \sqrt{g^{\chi} \circ \chi^{-1}}\, dx = \int_{\Omega} f \circ \chi^{-1} \sqrt{g^{\hat{\chi}} \circ \chi^{-1}}\, |J_{\Phi}|\, dx \quad ;$$

ou encore que,

$$g^{\chi} \circ \chi^{-1} = (g^{\hat{\chi}} \circ \chi^{-1})|J_{\Phi}|^2 \quad ;$$

ce qui résulte de la manière dont on passe des composantes g_{ij} aux composantes $\hat{g}_{k\ell}$:

$$g_{ij} = \sum_{k,\ell} \hat{g}_{k\ell} \frac{\partial \hat{\chi}^k}{\partial \chi^i} \frac{\partial \hat{\chi}^\ell}{\partial \chi^j} \qquad (1 \leqslant i , j \leqslant n) \quad . \tag{2.3}$$

Comme (2.2') résulte immédiatement de (2.2) et (2.1'), le théorème est établi.

Remarque 1. - On notera que l'existence de τ_g ne réclame pas que la variété M soit orientable, ainsi qu'on pourrait le penser lorsqu'on définit τ_g à partir de l'élément de volume riemannien η_g par la relation :

$$\int_M f\, d\tau_g = \int_{M,\theta} f\, \eta_g \qquad (\text{où } \theta \text{ est l'orientation de } M \text{ définie par } \eta_g) \quad .$$

Même remarque pour la densité $\hat{g}/g$ qui pourrait être aussi définie par :

$$\eta_{\hat{g}} = \sqrt{\hat{g}/g}\; \eta_g \quad .$$

Remarque 2. - La correspondance $(M , g) \longrightarrow \tau_{M,g}$ introduite dans le théorème précédent est caractérisée par les trois propriétés suivantes :

(α) Soient M et $\hat{M}$ des variétés de même dimension, g et $\hat{g}$ des métriques riemanniennes sur M et $\hat{M}$, et Φ une injection de M sur un ouvert de $\hat{M}$, de classe C^1 (n° 1.7) ainsi que Φ^{-1}, telle que, pour tout $x \in M$ et $\xi, \eta \in T_x(M)$,

---

[12] M étant pourvue d'une métrique riemannienne est paracompacte (n° 2.1).

$$\hat{g}_{\Phi(x)}(d_x\,\Phi(\xi)\ ,\ d_x\,\Phi(\eta)) = g_x(\xi\ ,\ \eta)\ .$$

Alors, $\tau_{M,\hat{g}}$ induit sur $\Phi(M)$ la mesure image $\Phi(\tau_{M,g})$.

($\alpha\alpha$) Si g et $\hat{g}$ sont deux métriques riemanniennes sur la variété M ,

$$\tau_{M,\hat{g}} = \sqrt{\hat{g}/g}\ \tau_{M,g}\ .$$

($\alpha\alpha\alpha$) Si M est un ouvert de $\overline{R^{n+}}$, et si g est la métrique euclidienne, $\tau_{M,g}$ est la mesure induite par la mesure de Lebesgue.

[Vérification sans difficulté : la condition (α) justifie le transport local de τ_g sur R^n , ($\alpha\alpha$) et ($\alpha\alpha\alpha$) font apparaître le facteur $\sqrt{g^\chi \circ \chi^{-1}}$ dans la relation (2.2). On notera que, si M est un ouvert de R^n , g la métrique euclidienne sur M , et $\hat{g}$ l'image de g par une bijection Φ de M sur M de classe C^1 ainsi que Φ^{-1} , la propriété ($\alpha\alpha$) est une conséquence de (α), ($\alpha\alpha\alpha$) et de la formule de changement de variable dans les intégrales multiples. Toutefois, la propriété ($\alpha\alpha$) demeure requise, car une métrique $\hat{g}$ sur M n'est pas toujours image de la métrique euclidienne.]

2.3. Métrique riemannienne induite sur le bord et mesure associée. — On a vu (n° 1.5) que, pour chaque $x \in \partial M$, $T_x(\partial M)$ est canoniquement plongé dans $T_x(M)$. Ainsi, si g est une métrique riemannienne sur M , en posant

$$g'_x(\xi\ ,\ \eta) = g_x(\xi\ ,\ \eta) \qquad \text{pour } x \in \partial M \text{ et } \xi\ ,\ \eta \in T_x(\partial M)\ ,$$

on définit une métrique riemannienne g' sur ∂M appelée la métrique induite par g sur ∂M , ou encore la restriction de g à ∂M . La mesure riemannienne sur ∂M associée à g' sera notée σ_g , ou simplement σ .

2.4. Opérateur gradient associé à une métrique riemannienne. — Soit g une métrique riemannienne sur M de classe C^p $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Pour chaque $x \in M$, la forme bilinéaire g_x sur $T_x(M)$ définit une application linéaire bijective γ_x de $T^*_x(M)$ sur $T_x(M)$:

Si $\theta \in T^*_x(M)$, $\gamma_x(\theta)$ est l'unique vecteur tangent en x tel que

$$(2.4) \qquad g_x(\gamma_x(\theta)\ ,\ \xi) = \langle\theta\ ,\ \xi\rangle \qquad \text{pour tout } \xi \in T_x(M)\ .$$

Si ω est une 1-forme différentielle (n° 1.8) sur M de classe C^q $(0 \leqslant q \leqslant p)$, et si on pose $X_x = \gamma_x(\omega_x)$ pour tout $x \in M$, on définit un champs de vecteurs $X = (X_x)_{x\in M}$ de classe C^q sur M . On note $X = \gamma(\omega)$.

En particulier, si $f \in C^{q+1}(M)$, on notera $\operatorname{grad}_g f$ ou simplement $\operatorname{grad} f$ le champs de vecteurs (de classe C^q) $\gamma(df)$.

On peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. - Si g est une métrique riemannienne sur M de classe C^p $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$, il existe une application $f \longrightarrow \operatorname{grad} f$, et une seule, de $C^1(M)$ dans $\mathcal{V}^0(M)$ telle que, pour $f \in C^1(M)$,

(2.5) $$g(\operatorname{grad} f\ ,\ X) = \langle df\ ,\ X\rangle \qquad \text{pour tout } X \in \mathcal{V}^0(M) \quad .$$

De plus, $\operatorname{supp}(\operatorname{grad} f) \subset \operatorname{supp} f$ (caractère local) ([13]), $\operatorname{grad} f$ est de classe C^q $(0 \leqslant q \leqslant p)$ si $f \in C^{q+1}$, et

(2.6) $$\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u \quad .$$

2.5. Champs de 2-vecteurs conjugué d'une métrique riemannienne. - Avec les notations du n° 2.4, pour chaque $x \in M$, on définit une forme bilinéaire $\check{g}_x$ symétrique définie positive sur $T^*_x(M)$ en posant,

(2.7) $$\check{g}_x(\alpha\ ,\ \beta) = g_x(\gamma_x(\alpha)\ ,\ \gamma_x(\beta)) \qquad (\alpha\ ;\ \beta \in T^*_x(M)) \quad .$$

$\check{g} = (\check{g}_x)_{x \in M}$ ainsi défini est un champs de 2-vecteurs (n° 1.9) sur M (de classe C^p en même temps que g), appelé le champs de 2-vecteurs conjugué de g .

Pour chaque $x \in M$, $\check{g}_x$ est une forme bilinéaire sur $T^*_x(M)$ symétrique et définie positive ; inversement, tout champs de 2-vecteurs sur M ayant cette propriété est conjugué d'une métrique riemannienne sur M définie de façon unique par (2.7).

Si $(U\ ,\ \chi)$ est une carte locale de M , et si $x \in U$, les composantes de $\check{g}_x$ relativement à la base $(d_x \chi^i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $T^*_x(M)$ (base duale de $(\partial^x/\partial\chi^i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$) sont notées $g^{ij}(x)$:

(2.8) $$g^{ij}(x) = \check{g}_x(d_x \chi^i\ ,\ d_x \chi^j) \qquad (1 \leqslant i\ ,\ j \leqslant n) \quad .$$

Pour chaque $x \in M$, les matrices $[g^{ij}(x)]$ et $[g_{ij}(x)]$ sont inverses l'une de l'autre :

(2.9) $$\sum_k g_{ik}(x)\ g^{kj}(x) = \delta^j_i \qquad \text{pour } 1 \leqslant i\ ,\ j \leqslant n \quad .$$

[En effet, $g(\gamma(d\chi^i)\ ,\ \partial/\partial\chi^j) = \langle d\chi^i\ ,\ \partial/\partial\chi^j\rangle = \delta^i_j$, par définition de γ ; et

([13]) supp désigne le support.

$\gamma(d\chi^i) = \sum_k g^{ki}\, \partial/\partial\chi^k$, puisque

$$\langle d\chi^k , \gamma(d\chi^i)\rangle = g(\gamma(d\chi^k) , \gamma(d\chi^i)) = \check{g}(d\chi^k , d\chi^i) = g^{ki} \quad .]$$

On en déduit les composantes de grad $f(x)$ $(x \in U , \ f \in C^1(U))$,

$$(2.10) \qquad \langle d_x \chi^j , \operatorname{grad} f(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n} g^{jk}(x) \frac{\partial f}{\partial\chi^k}(x) \qquad (1 \leqslant j \leqslant n) \quad .$$

2.6. Opérateur de divergence associé à une métrique riemannienne.

THÉORÈME. - Soit g une métrique riemannienne de classe C^{p+1} $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$ sur M . Alors, il existe une application R-linéaire, et une seule,

$$X \longrightarrow \operatorname{div}_g(X)$$

de $\mathcal{V}^1(M)$ dans $C^0(M)$ telle que

$$(2.11) \qquad \operatorname{div}_g(fX) = f \operatorname{div}_g(X) + \langle df , X\rangle \qquad (f \in C^1(M) , \ X \in \mathcal{V}^1(M)) ,$$

$$(2.12) \qquad \int_M \operatorname{div}_g(X)\, d\tau_g = 0$$

pour tout $X \in \mathcal{V}^1(M)$ à support compact disjoint de ∂M ;

$$(2.13) \qquad \operatorname{supp} \operatorname{div}_g(X) \subset \operatorname{supp} X \qquad (X \in \mathcal{V}^1(M)) \qquad \text{(caractère local)} .$$

De plus, $\operatorname{div}_g(X)$ est de classe C^q $(0 \leqslant q \leqslant p)$ si X est de classe C^{q+1} ,

div_g , ainsi caractérisé, est appelé l'opérateur divergence associé à la métrique riemannienne g . On notera souvent $\operatorname{div}(X)$ au lieu de $\operatorname{div}_g(X)$.

COROLLAIRE. - Si (U , χ) est une carte locale de M de classe C^2 (14), et si $X \in \mathcal{V}^1(U)$, on a,

$$(2.14) \qquad \operatorname{div}_g(X) = \frac{1}{\sqrt{g^\chi}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\chi^i}(\sqrt{g^\chi}\, X^i) ,$$

où $X^i = \langle d\chi^i , X\rangle$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont les composantes de X (15).

Remarque. - La relation (2.12) est exactement la formule de Green pour une variété sans bord. La caractérisation de l'opérateur div_g , contenue dans le théorème

(14) Voir le n° 1.11.

(15) $g^\chi = \det[g_{ij}]$ (n° 2.1).

précédent, est ainsi celle qui convient dans le présent contexte.

Dans une optique plus géométrique, on pourrait remplacer la propriété (2.12) dans le théorème par la condition suivante :

(2.12') $\quad \operatorname{div}(X) = 0$ pour tout champs de vecteurs X tel que $\mathcal{L}_X(g) = 0$ ([16]) .

(où $\mathcal{L}_X$ est l'opérateur "dérivée de Lie" associé à X).

Démonstration.

(α) D'abord, si un opérateur R-linéaire $X \longrightarrow \operatorname{div}(X)$ de $\mathcal{V}^1(X)$ dans $C^0(X)$ a les propriétés (2.11), (2.12), (2.13), il vérifie aussi (2.14). En effet, en vertu de (2.13) (caractère local), $\operatorname{div}(X)$ ne dépend, sur U, que des valeurs de X sur U, et il suffit d'établir (2.14) pour $X \in \mathcal{V}^1(U)$ à support compact dans U. Or, pour un tel X, on a, d'après (2.11),

$$\operatorname{div}(X) = \operatorname{div}(\sum_i X^i\, \partial/\partial\chi^i) = \sum_i X^i \operatorname{div}(\partial/\partial\chi^i) + \sum_i \frac{\partial X^i}{\partial\chi^i} \;;$$

d'où, d'après (2.13) et (2.1) (n° 2.2),

$$\int_{\chi(U)} \{\sum_i (X^i \operatorname{div}(\partial/\partial\chi^i) + \frac{\partial X^i}{\partial\chi^i})\sqrt{g^\chi}\} \circ \chi^{-1}\, dz = 0 \;;$$

ou encore, en prenant $X^j = 0$ pour $j \neq i$,

$$\int_{\chi(U)} \{\frac{\partial}{\partial\chi^i}(\sqrt{g^\chi}\, X^i) + (\operatorname{div}(\partial/\partial\chi^i) - \frac{1}{\sqrt{g^\chi}}\frac{\partial}{\partial\chi^i}\sqrt{g^\chi})\sqrt{g^\chi}\, X^i\} \circ \chi^{-1}\, dz = 0 \;.$$

Comme cette relation est satisfaite, en particulier, en prenant pour X^i une fonction de classe C^∞ arbitraire à support compact, contenu dans U, et disjoint de ∂M (fonction pour laquelle on a $\int_{\chi(U)} \{\frac{\partial}{\partial\chi^i}(\sqrt{g^\chi}\, X^i)\} \circ \chi^{-1}\, dz = 0$), on obtient finalement,

$$\operatorname{div}(\partial/\partial\chi^i)(x) = \frac{1}{\sqrt{g^\chi(x)}}\frac{\partial\sqrt{g^\chi}}{\partial\chi^i}(x) \qquad \text{pour tout } x \in U \setminus \partial M \;;$$

donc aussi, par continuité des deux membres, pour tout $x \in U$.

(β) Pour montrer l'existence, il suffit de vérifier que "l'expression (2.14) est invariante par changement de coordonnées". La vérification directe est un <u>méchant</u>

([16]) Un champs de vecteurs X tel que $\mathcal{L}_X(g) = 0$ est appelé champs de vecteurs de Killing ; voir à ce sujet S. I. GOLDBERG [4], p. 108.

calcul tensoriel ; heureusement, on peut s'en passer ici en remarquant que div_g, définie par (2.14), satisfait localement (2.11), (2.12) et (2.13) (vérification cette fois immédiate), donc a la même forme dans toute autre carte locale, d'après (α) ci-dessus !

C. Q. F. D.

2.7. <u>L'opérateur divergence comme transposé du gradient</u>. - L'opérateur div_g apparaît comme un opérateur différentiel du premier ordre opérant des champs de vecteurs dans les fonctions. Le théorème suivant précise comment div_g est adjoint de grad_g (sur une variété sans bord).

THÉORÈME. - On suppose que M est une variété sans bord $(\partial M = \emptyset)$, et que g est une métrique riemannienne de classe C^1 sur M. Alors,

(2.15) $$\int_M f \operatorname{div}_g(X)\, d\tau_g = -\int_M \langle df , X\rangle\, d\tau_g = -\int_M g(X , \operatorname{grad}_g f)\, d\tau_g$$

pour tout $f \in C^1(M)$ et $X \in \mathcal{V}^1(M)$ à supports compacts.

(Conséquence immédiate de (2.12), (2.11), et de la définition de grad_g (n° 2.4).)

2.8. <u>Champs de normales extérieures sur le bord</u>. - Un <u>champs de vecteurs extérieurs de classe</u> C^p $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$ sur ∂M est une famille $e = (e_x)_{x \in \partial M}$ où, pour chaque $x \in \partial M$, $e_x \in T_x(M)$, telle que, pour chaque fonction $f \in C^\infty(M)$:

(i) la fonction $x \longrightarrow \langle d_x f , e_x\rangle$ est de classe C^p sur ∂M ;

(ii) si f est $\geqslant 0$ sur M et nulle sur ∂M, alors

$$\langle d_x f , e_x\rangle \leqslant 0 \qquad \text{pour tout } x \in \partial M \quad (^{17}) .$$

On notera alors, pour $f \in C^1(M)$, $\frac{\partial f}{\partial e}$ la fonction $x \longrightarrow \langle d_x f , e_x\rangle$.

THÉORÈME. - Soit g une métrique riemannienne de classe C^p $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$ sur M. Il existe un champs de vecteurs extérieurs n sur ∂M, de classe C^p, et un seul, tel que, pour tout $x \in \partial M$,

(2.16) $$g_x(n_x , n_x) = 1 ,$$

(2.17) $$g_x(n_x , \xi) = 0 \qquad \text{pour tout } \xi \in T_x(\partial M) .$$

De plus, pour toute carte locale (U , χ) de M, et pour tout $x \in U \cap \partial M$, on a,

[17] D'où le vocable "extérieur".

$$(2.18) \qquad \langle d_x \chi^i , n_x \rangle = -\frac{1}{\sqrt{g^{nn}(x)}} g^{ni}(x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \quad [18] .$$

(Vérification sans difficulté, compte tenu de (2.9) (n° 2.5).)

n, ainsi caractérisé, est appelé le champs de normales extérieures sur ∂M associé à g, ou aussi la conormale extérieure associée à g.

§ 3. Formules de Green.

3.1. — Dans tout ce paragraphe, M désigne toujours une variété à bord de classe C^∞ et de dimension n (n° 1.2), g une métrique riemannienne de classe C^1 sur M (n° 2.1), τ et σ les mesures riemanniennes sur M, et ∂M respectivement associées à g et à sa restriction à ∂M (n° 2.2 et 2.3), div et grad les opérateurs divergence et gradient sur M (n° 2.6 et 2.4), et n le champs de normales extérieures sur ∂M (n° 2.8) associé à g.

Remarque. — On ne suppose pas que M est orientable.

3.2. THÉORÈME (Formule de Green) [19]. — Pour chaque champs de vecteurs X sur M, de classe C^1 et à support compact,

$$\text{(G)} \qquad \int_M \operatorname{div}(X)\, d\tau = \int_{\partial M} g(X , n)\, d\sigma \quad [20] .$$

En effet, utilisant d'abord une partition de l'unité sur M [21] (n° 1.10), on se ramène au cas où X a son support dans une carte locale (U , χ) de M.

Pour un tel X, on a (n° 2.2 et 2.6), d'une part,

$$g(X , n) = -\frac{1}{\sqrt{g^{nn}}} \sum_{i,j} g^{ni} X^j g_{ij} \qquad \text{d'après (2.18) (n° 2.8)} ,$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{g^{nn}}} X^n \qquad \text{d'après (2.9) (n° 2.9)} ;$$

donc,

---

[18] On notera que $g^{nn}(x) = \check{g}_x(d_x \chi^n , d_x \chi^n) > 0$ (voir le n° 2.5).

[19] Avec les notations et sous les hypothèses du n° 3.1.

[20] Où $g(X , n)$ désigne la fonction $x \longrightarrow g_x(X_x , n_x)$ sur ∂M ("le flux sortant de X").

[21] M étant pourvue d'une métrique riemannienne est paracompacte (n° 2.1).

(3.1) $$\int_{\partial M} g(X\,,\,n)\,d\sigma = -\int_{\chi(U)\cap R_0^n} \left\{X^n \frac{\sqrt{g'^{\chi'}}}{\sqrt{g^{nn}}}\right\} \circ \chi'^{-1}\,dz' \,,$$

où χ' désigne (n° 1.4) la restriction de χ à $U \cap \partial M$, g' la restriction de g à ∂M , et dz' la mesure de Lebesgue sur R_0^n . D'autre part,

$$\int_M \operatorname{div}(X)\,d\tau = \sum_{i=1}^{n} \int_{\chi(U)} \{\frac{\partial}{\partial \chi^i}(\sqrt{g^\chi}\;X^i)\} \circ \chi^{-1}\,dz \;.$$

Or, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$\int_{\chi(U)} \{\frac{\partial}{\partial \chi^i}(\sqrt{g^\chi}\;X^i)\} \circ \chi^{-1}\,dz = 0 \;,$$

ainsi qu'on le voit, compte tenu de ce que X^i est à support compact, en écrivant l'intégrale sous la forme

$$\int_0^{+\infty} dz^n \int_{R^{n-1}} \frac{\partial}{\partial z^i}\,\Phi^i(z^1\,,\,z^2\,,\,\ldots\,,\,z^n)\,dz^1\,dz^2\ldots dz^{n-1}$$

$$(\text{où}\quad \Phi^i(z) = (\sqrt{g^\chi}\;X^i)(\chi^{-1}(z))) \;.$$

Et, de même, pour $i = n$,

$$\int_{\chi(U)} \{\frac{\partial}{\partial \chi^n}(\sqrt{g^\chi}\;X^i)\} \circ \chi^{-1}\,dz = \int_{R^{n-1}} dz^1 \ldots dz^{n-1} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z^n}\,\Phi^n(z^1\,,\,\ldots\,,\,z^{n-1}\,,\,z^n)\,dz^n$$

$$= -\int_{R^{n-1}} \Phi^n(z^1\,,\,\ldots\,,\,z^{n-1}\,,\,0)\,dz^1\ldots dz^{n-1} \;,$$

en intégrant par parties la dernière intégrale [22],

$$= -\int_{\chi(U)\cap R_0^n} \{X^n\sqrt{g^\chi}\} \circ \chi'^{-1}\,dz' \;;$$

et finalement,

(3.2) $$\int_M \operatorname{div}(X)\,d\tau = -\int_{\chi(U)\cap R_0^n} \{X^n\sqrt{g^\chi}\} \circ \chi'^{-1}\,dz' \;.$$

Comparant (3.1) et (3.2), on voit que le résultat cherché découle de la relation $g^{nn}\,g^\chi = g'^{\chi'}$, elle-même conséquence de (2.9), puisque $g'^{\chi'}$ est exactement le mineur d'indice nn du déterminant g^χ .

C. Q. F. D.

---

[22] La formule de Green n'est autre que la formule d'intégration par parties bien enrobée !

3.3. Opérateur de Laplace-Beltrami de g. - Pour chaque $f \in C^2(M)$, on pose (23) :

$$\Delta_g f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \quad . \tag{3.3}$$

On définit ainsi une application linéaire Δ_g de $C^2(M)$ dans $C^0(M)$ de caractère local (supp $\Delta f \subset$ supp f, $\forall f \in C^2(M)$).

Δ_g est appelé l'opérateur de Laplace-Beltrami (ou simplement le laplacien) associé à la métrique riemannienne g. On notera couramment Δ au lieu de Δ_g.

Si (U, χ) est une carte locale de M de classe C^2, on a, sur U, pour chaque $f \in C^2(M)$,

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{g^\chi}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \chi^i}\left(g^{ij}\sqrt{g^\chi}\,\frac{\partial f}{\partial \chi^j}\right) \quad (24) \quad . \tag{3.4}$$

(Ceci résulte de (2.10) (n° 2.5) et de (2.14) (n° 2.6).)

En particulier, si M est un ouvert de R^n ou de $\overline{R^{n+}}$, et si g est la métrique riemannienne euclidienne ($g^{ij} = \delta^{ij}$), on retrouve le laplacien classique.

Remarque. - Le laplacien Δ apparaît comme un opérateur différentiel du second ordre sur M. En temps que tel, on en donnera une caractérisation dans l'exposé n° 3 de ce séminaire [11] (n° 1.9).

3.4. Formule de Green et laplacien.

THÉORÈME (25). - Pour tout couple u, v de fonctions de $C^2(M)$ à supports compacts,

$$\int_M \{u\Delta v + g(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)\}\, d\tau = \int_{\partial M} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma \quad , \tag{G'}$$

$$\int_M (u\Delta v - v\Delta u)\, d\tau = \int_{\partial M} \left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma \quad (26) \quad . \tag{G''}$$

---

(23) Avec les notations et sous les hypothèses du n° 3.1 : en particulier, g est de classe C^1.

(24) $g^\chi = \det[g_{ij}]$, $[g^{ij}]$ matrice inverse de $[g_{ij}]$ (n° 2.1 et 2.5).

(25) Avec les notations et sous les hypothèses du n° 3.1.

(26) $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \langle d_x u, n_x \rangle$ pour tout $x \in \partial M$ ("dérivée normale extérieure" ; voir le n° 2.8).

En effet, (G') résulte de (G), en prenant $X = u \operatorname{grad} v$; car alors, d'une part,

$$\operatorname{div}(X) = \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = u \operatorname{div}(\operatorname{grad} v) + \langle du \, , \operatorname{grad} v \rangle \quad ,$$

d'après la propriété (2.11) (n° 2.6) de l'opérateur divergence ;

$$= u\Delta v + g(\operatorname{grad} u \, , \operatorname{grad} v) \quad ,$$

par définition de l'opérateur gradient (relation (2.5), n° 2.4).

D'autre part,

$$g(X \, , n) = u \, g(\operatorname{grad} v \, , n) = u\langle dv \, , n \rangle = u \frac{\partial v}{\partial n} \quad ,$$

par définition de grad v et de $\frac{\partial v}{\partial n}$.

Par ailleurs, évidemment, (G") résulte de (G'), compte tenu de la symétrie de g.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. - Si $v \in C^2(M)$ est à support compact,

(G")
$$\int_M \Delta v \, d\tau = \int_{\partial M} \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma \quad .$$

COROLLAIRE 2. - Si M est une variété sans bord $(\partial M = \emptyset)$,

$$\int_M \Delta v \, d\tau = 0 \qquad \text{pour tout } v \in C^2(M) \text{ à support compact} \quad .$$

On renvoie, en guise de conclusion, à l'exposé n° 5 de ce séminaire [11], où l'on verra comment la formule de Green conduit à la notion d'adjoint d'un problème aux limites, et aux formules de représentations intégrales des solutions au moyen des fonctions de Green.

Appendice
sur certains colliers géodésiques au voisinage du bord d'une variété compacte

(voir les n° A.4, A.7 et A.11 ci-dessous).

A.1. - Dans tout cet appendice, M désigne une variété à bord de classe C^∞ et de dimension n $(n \geqslant 1)$ munie d'une métrique riemannienne g de classe C^0. Sauf aux n° A.2 et A.3, on suppose que M est compacte.

A.2. Longueur d'un arc de courbe. - Une courbe (tracée) sur M est une application continue $\gamma : t \longrightarrow \gamma(t)$ d'un intervalle (quelconque) J_γ de la droite réelle $\mathbb{R}$ dans M. Un arc de courbe sur M est une courbe γ dont l'intervalle de définition $J_\gamma = [t_0 \, , t_1]$ est compact ; $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t_1)$ sont appelés, respectivement, l'origine et l'extrémité de l'arc de courbe γ .

Si γ est un arc de courbe sur M de classe C^1 (en tant qu'application de la variété à bord J_γ dans M), on note, pour chaque $t \in J_\gamma$, par $\overset{\circ}{\gamma}(t)$ le vecteur de $T_{\gamma(t)}(M)$ image du vecteur tangent 1 à J_γ par la différentielle $d_t\gamma$ de γ au point t ; $\overset{\circ}{\gamma}(t)$ est caractérisé par la relation (n° 1.7) :

$$\text{(A.1)} \qquad \left[\frac{d}{ds} f \circ \gamma(s)\right]_{s=t} = \langle d_{\gamma(t)} f , \overset{\circ}{\gamma}(t)\rangle \qquad (f \in C^1(M)) \quad .$$

Ceci étant, si γ est un arc de courbe de classe C^1 sur M $(J_\gamma = [t_0 , t_1])$, on définit la longueur $|\gamma|$ de γ (relativement à la métrique riemannienne g sur M) par :

$$\text{(A.2)} \qquad |\gamma| = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\gamma(t)}(\overset{\circ}{\gamma}(t) , \overset{\circ}{\gamma}(t))}\, dt \quad .$$

A.3. Distance géodésique. - On remarque d'abord que, si $x \in M$, l'ensemble C_x des points $y \in M$ qui sont extrémités d'un arc de classe C^1 sur M d'origine x est ouvert et fermé dans M (vérification locale immédiate), donc identique à la composante connexe de x dans M .

Si $y \in C_x$, on pose

$$\text{(A.3)} \qquad d_g(x , y) = \inf_{\gamma\in A(x,y)} |\gamma| \quad ,$$

où $A(x , y)$ est l'ensemble (non vide d'après ce qui précède) des arcs de courbe de classe C^1 sur M d'origine x et d'extrémité y .

Si $y \notin C_x$, on pose (par exemple),

$$\text{(A.4)} \qquad d_g(x , y) = 1 \quad .$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. - La fonction $(x , y) \longrightarrow d_g(x , y)$ est une distance sur la variété M compatible avec sa topologie [27].

---

[27] Démonstration élémentaire à partir du lemme suivant :

LEMME. - Si $\tilde{g}$ est une métrique riemannienne sur un ouvert connexe Ω de R^n, pour tout compact K de Ω , il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\alpha|\xi|^2 \geqslant \tilde{g}_x(\xi , \xi) \geqslant \frac{1}{\alpha}|\xi|^2 \qquad \text{pour tout } x \in K \text{ et } \xi \in R^n \quad .$$

d_g est la <u>distance géodésique</u> associée à la métrique riemannienne g sur M. On notera couramment d au lieu de d_g, et $\overline{xy}$ au lieu de $d_g(x, y)$.

A.4. – <u>La distance géodésique au bord de</u> M sera notée η_g :

$$\text{(A.5)} \qquad \eta_g(x) = d_g(x, \partial M) = \inf_{x' \in \partial M} d_g(x, x') \quad .$$

η_g est une fonction continue sur M et, ∂M étant fermé,

$$\text{(A.6)} \qquad \eta_g(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x \in M \setminus \partial M, \qquad \eta_g(x') = 0 \quad \text{pour} \quad x' \in \partial M \quad .$$

De plus, η_g constitue une "coordonnée intérieure globale" au voisinage de ∂M :

THÉORÈME ([28]). – On suppose que g est de classe C^p $(2 \leqslant p \leqslant \infty)$ sur M ([29]). Alors, il existe un nombre $\rho > 0$ et une application π de l'ouvert

$$D_\rho = \{x \mid \eta_g(x) < \rho\}$$

de M dans ∂M de telle sorte que :

(1) l'application $y \longrightarrow (\pi(y), \eta_g(y))$ est une bijection de D_ρ sur $\partial M \times [0, \rho[$ de classe C^{p-1} ainsi que son application inverse ;

(2) pour chaque $x' \in \partial M$, $\pi(x') = x'$;

(3) pour chaque $x \in D_\rho$,

$$\text{(A.7)} \qquad g_x(\operatorname{grad} \eta_g(x), \operatorname{grad} \eta_g(x)) = 1 \qquad \text{et} \qquad d_x\pi(\operatorname{grad} \eta_g(x)) = 0 \quad .$$

En outre, une fois ρ fixé, l'application π est entièrement déterminée par les propriétés (1), (2) et (3) : si $(x', t) \longrightarrow \gamma_{x'}(t)$ est l'application de $\partial M \times [0, \rho[$ sur D_ρ inverse de $y \longrightarrow (\pi(y), \eta_g(y))$, alors, pour chaque $x' \in \partial M$, $\gamma_{x'}$ est l'unique courbe géodésique (relative à g) définie sur $[0, \rho[$ et telle que,

$$\text{(A.8)} \qquad \gamma_{x'}(0) = x' \qquad \text{et} \qquad \mathring{\gamma}_{x'}(0) = -n_{x'}$$

(où n est le champs de normales extérieures sur ∂M associé à g (n° 2.8)).

On peut établir ce théorème à partir des propriétés de la famille de courbes géodésiques $(\gamma_{x'})_{x' \in \partial M}$ partout normalement au bord, et de la relation

---

([28]) Ce résultat apparaît comme une expression dans le cadre adopté ici du théorème de Malus de l'optique géométrique.

([29]) M est supposée compacte (n° A.1).

$$\text{(A.9)} \qquad d_{(x,y)}\, d_g(\xi\,,\,\eta) = g_y(\theta_y\,,\,\eta) - g_x(\theta_x\,,\,\xi) \qquad (\xi \in T_x(M)\,,\ \ \eta \in T_y(M))$$

donnant la différentielle en $(x\,,\,y)$ de la distance géodésique lorsque x et y décrivent un domaine couvert par un réseau de géodésiques [si γ est l'arc de géodésique $(J_\gamma = [0\,,\,\delta]\,,\ \delta > 0)$, d'origine x, d'extrémité y, et paramétré par la distance $(g_{\gamma(t)}(\mathring{\gamma}(t)\,,\,\mathring{\gamma}(t)) = 1\,,\ \forall\, t \in J_\gamma)$, on a posé, dans (A.9), $\theta_x = \mathring{\gamma}(0)$ et $\theta_y = \mathring{\gamma}(\delta)$].

A.5. – On va étudier ci-dessous (n° **A**.6 à **A**.10) une classe de fonctions ayant la propriété (A.6) de η_g au voisinage du bord, et pouvant constituer des "coordonnées intérieures globales" au voisinage de ∂M d'un maniement plus souple que η_g, et aussi plus économique : le théorème **A**.4 semble exiger que g soit de classe C^2 (au moins sur un voisinage de ∂M) alors que les propriétés concernées ici (n° **A**.7 et **A**.11) doivent raisonnablement être vraies si g est seulement de classe C^1.

A.6. – On appellera <u>coordonnée intérieure globale</u> (au voisinage du bord) sur M, une fonction η définie sur un voisinage ouvert D^η de ∂M dans M et telle que :

(δ) $\eta(x) > 0$ pour $x \in D^\eta \setminus \partial M$, et $\eta(x') = 0$ pour $x' \in \partial M$;

($\delta\delta$) η est de classe C^1 sur D^η, et $\operatorname{grad}\eta(x) \neq 0$ pour tout $x \in D^\eta$ ([30]).

On dira que η est <u>normale</u> (relativement à g) si, de plus :

($\delta\delta\delta$) $g_{x'}(\operatorname{grad}\eta(x')\,,\,\operatorname{grad}\eta(x')) = 1$ pour tout $x' \in \partial M$.

Le lemme suivant établit l'existence de telles coordonnées indépendamment du théorème **A**.4 :

[LEMME. – Si g est de classe C^p avec $p \geqslant 0$ (au moins au voisinage de ∂M), il existe une coordonnée intérieure globale normale de classe C^{p+1}.

En effet, soient $(U_\alpha\,,\,\chi_\alpha)$ un recouvrement fini de M par des cartes locales de classe C^∞, (V_α) un recouvrement ouvert de M tel que, pour chaque α, $\overline{V_\alpha}$ soit compact et contenu dans U_α, et (φ_α) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (V_α) (n° 1.10).

On remarque d'abord que, si, pour chaque α tel que $U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset$, η_α est une

---

([30]) grad désigne l'opérateur gradient associé à g (n° 2.4).

coordonnée intérieure globale de classe C^r sur la variété à bord U_α, la fonction $\eta = \sum_\alpha \varphi_\alpha \eta_\alpha$ est une coordonnée intérieure globale de classe C^r sur M, normale si toutes les η_α le sont. [On a en effet, sur ∂M,

$$\text{grad } \eta = \sum_\alpha \varphi_\alpha \text{ grad } \eta_\alpha \quad ;$$

donc aussi

$$g(\text{grad } \eta , \text{ grad } \eta) = \sum_{\alpha,\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta \, g(\text{grad } \eta_\alpha , \text{ grad } \eta_\beta) \quad .]$$

En particulier, en prenant $\eta_\alpha = x_\alpha^n$, $\eta = \sum_\alpha \varphi_\alpha x_\alpha^n$ est une coordonnée intérieure globale de classe C^∞.

Il reste donc à choisir les η_α normales et de classe C^{p+1}, ce qui est un problème local : si $f \in C^1(U_\alpha)$ est nulle sur $U_\alpha \cap \partial M$, on a,

$$g(\text{grad } f , \text{ grad } f) = g_\alpha^{nn} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha^n}\right)^2 \qquad (\text{n° } 2.5, \text{ relation } (2.10)) \quad ;$$

et on est ramené au problème suivant : étant donnée une fonction $\Psi \in C^p(R^m)$ $(m \geq 1)$, trouver une fonction $u : (r , x) \longrightarrow u(r , x)$ de classe C^{p+1} sur $[0, +\infty[\times R^m$, et telle que, pour tout $x \in R^m$, $u(0 , x) = 0$ et $u'_r(0 , x) = \Psi(x)$.

On résoud ce problème en posant, pour $r > 0$ et $x \in R^m$,

$$u(r , x) = \frac{1}{r^{m-1}} \int_{R^m} \Psi(x - z) \, \Phi\left(\frac{z}{r}\right) dz$$

où Φ est un "échelon unité" sur R^m.

($\Phi \in C^\infty(R^m)$, $\Phi \geq 0$, $\int_{R^m} \Phi(z) \, dz = 1$, $\Phi(-z) = \Phi(z)$, $\text{supp } \Phi \subset \{z \mid |z| \leq 1\}$.)

C. Q. F. D.

A.7. - A toute coordonnée intérieure globale, on peut associer <u>un collier de M</u> :

THÉORÈME ([31]). - On suppose que g est de classe C^p avec $p \geq 1$, et on désigne par η une coordonnée intérieure globale de classe C^{p+1} sur M (n° A.6). Alors, il existe un nombre $\rho > 0$ et une application π de l'ouvert

$$D_\rho^\eta = \{x \mid x \in D^\eta \text{ et } \eta(x) < \rho\} \quad ([32])$$

([31]) Avec les notations du n° A.1 : on suppose que M est compacte.

([32]) D^η est l'ensemble de définition de η (n° A.6).

de M dans ∂M de telle sorte que :

(1) l'application $y \longrightarrow (\pi(y)\ ,\ \eta(y))$ **est une bijection de** D_ρ^η **sur** $\partial M \times [0\ ,\ \rho[$ de classe C^p, ainsi que son application inverse ;

(2) pour chaque $x' \in \partial M$, $\pi(x') = x'$;

(3) pour chaque $x \in D_\rho^\eta$, $d_x\, \pi(\mathrm{grad}\ \eta(x)) = 0$.

De plus, une fois ρ fixé, l'application π est entièrement déterminée par les propriétés (1), (2) et (3), et, posant $E = g(\mathrm{grad}\ \eta\ ,\ \mathrm{grad}\ \eta)$,

(A.10) $$n_{x'} = -\frac{1}{\sqrt{E(x')}}\ \mathrm{grad}\ \eta(x') \qquad \text{pour tout } x' \in \partial M$$ [33] .

COROLLAIRE. - Si $(V\ ,\ \Psi)$ est une carte locale de la variété ∂M de classe C^p, on définit une carte locale $(U\ ,\ \chi)$ de M de classe C^p (n° 1.11) en posant :

(A.11) $$U = \pi^{-1}(V) \quad ,$$

(A.12) $$\chi^j(x) = \Psi^j(\pi(x)) \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \qquad \text{et} \qquad \chi^n(x) = \eta(x) \quad (x \in U) \quad .$$

Et, dans cette carte,

(A.13) $$\frac{\partial f}{\partial n}(x') = -\sqrt{E(x')}\ \frac{\partial f}{\partial \chi^n}(x') \qquad (x' \in U \cap \partial M = V\ ,\quad f \in C^1(M)) \quad ,$$

(A.14) $$\begin{cases} g_{nj}(x) = g^{nj}(x) = 0 & (x \in U\ ,\quad 1 \leqslant j \leqslant n-1) \\ g_{nn}(x) = \dfrac{1}{g^{nn}(x)} = \dfrac{1}{E(x)} & (x \in U) \quad . \end{cases}$$

En particulier, si η est normale,

(A.15) $$g_{nn}(x') = g^{nn}(x') = 1 \qquad (x' \in U \cap \partial M = V) \quad .$$

A.8. - La démonstration du théorème A.7 va reposer sur le théorème d'intégration des champs de vecteurs et le théorème des fonctions implicites :

(α) Pour chaque $x \in D^\eta$, on pose

$$E(x) = g_x(\mathrm{grad}\ \eta(x)\ ,\ \mathrm{grad}\ \eta(x)) \qquad \text{et} \qquad X_x = \frac{1}{E(x)}\ \mathrm{grad}\ \eta(x) \quad .$$

---

[33] n désigne le champs de normales extérieures sur ∂M associé à g (n° 2.8).

X est un champs de vecteurs de classe C^p sur D^η. Pour chaque $x' \in \partial M$, on désigne par $\gamma_{x'}$ la courbe intégrale maximale de X issue de x', et par $J_{x'}$ son intervalle de définition : $J_{x'}$ est un intervalle de R d'intérieur non vide, et

(A.16) $\quad 0 \in J_{x'}\ , \quad \gamma_{x'}(0) = x'\ , \quad X_{\gamma_{x'}(t)} = \mathring{\gamma}_{x'}(t)$ pour tout $t \in J_{x'}$

(théorème d'intégration des champs de vecteurs : existence des courbes intégrales maximales).

(β) Pour tout $x' \in \partial M$, et tout $t \in J_{x'}$,

(A.17) $$\eta(\gamma_{x'}(t)) = t \quad .$$

En effet, posant $\varphi(t) = \eta(\gamma_{x'}(t))$, on a, par définition de X et d'après (A.16),

$$\varphi'(t) = \langle d_{\gamma_{x'}(t)}\, \eta\ ,\ \mathring{\gamma}_{x'}(t)\rangle = g_{\gamma_{x'}(t)}(\operatorname{grad} \eta(\gamma_{x'}(t))\ ,\ \mathring{\gamma}_{x'}(t)) = 1 \quad ;$$

d'où $\varphi(t) \equiv t$ puisque $\varphi(0) = \eta(\gamma_{x'}(0)) = \eta(x') = 0$. Ainsi, η étant $\geqslant 0$, $J_{x'}$ est un intervalle de la forme $[0\ , b(x')[$ où $b(x')$ est une fonction semi-continue inférieurement de x' partout > 0 (34). Il résulte donc de la compacité de ∂M l'existence d'un nombre $\rho_1 > 0$ tel que $[0\ , \rho_1[\ \subset J_{x'}$ pour tout $x' \in \partial M$. On a ainsi défini une application $\Phi : (x'\ , t) \longrightarrow \Phi(x'\ , t) = \gamma_{x'}(t)$ de $\partial M \times [0\ , \rho_1[$ dans M. Cette application est de classe C^p en même temps que X (34). Elle est aussi injective : en effet, si $\gamma_{x'}(t) = \gamma_{y'}(s)$, on a d'abord $t = \eta(\gamma_{x'}(t)) = \eta(\gamma_{y'}(s)) = s$; d'où aussi $x' = y'$, d'après la propriété d'unicité des courbes intégrales maximales de X.

(γ) Pour tout $x' \in \partial M$, la différentielle $d_{(x',0)}\,\Phi$ est inversible :

En effet, prenant une carte locale $(U\ , \chi)$ de M au voisinage de x', la matrice correspondante de $d_{(x',0)}\,\Phi$ est, en vertu de (A.16), de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & X^1_{x'} \\ 0 & 1 & & \vdots & X^2_{x'} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & X^n_{x'} \end{pmatrix}$$

---

(34) Théorème d'intégration des champs de vecteurs : dépendance des conditions initiales.

D'où le caractère inversible de Φ , puisque,

$$X^n_{x'} = \frac{1}{E(x')} \langle d_{x'}\, \chi^n \, , \, \operatorname{grad} \eta(x') \rangle$$

$$= \frac{1}{E(x')} \sum_{k=1}^{n} g^{nk}(x') \frac{\partial \eta}{\partial \chi^k}(x')$$

$$= \frac{1}{E(x')} g^{nn}(x') \frac{\partial \eta}{\partial \chi^n}(x') > 0$$

d'après la propriété $(\delta\delta)$ de η .

(δ) Le théorème des fonctions implicites, joint à la compacité de ∂M et à l'injectivité de Φ , établie en (β), entraînent alors l'existence d'un nombre $\rho > 0$ $(\rho \leqslant \rho_1)$ tel que Φ applique injectivement $\partial M \times [0 \, , \, \rho[$ sur un ouvert W de M , la restriction de Φ à $\partial M \times [0 \, , \, \rho[$ ainsi que son application inverse étant de classe C^p . Cette dernière répond à la question : tout d'abord, en vertu de (A.17), elle s'écrit $y \longrightarrow (\pi(y) \, , \, \eta(y))$, π ayant la propriété (2) d'après (A.16) ; et, en particulier, $W = D^{\eta}_{\rho}$. Ensuite, afin de vérifier la propriété (3), il suffit de prendre $x = \gamma_{x'}(t)$ $(x' \in \partial M \, , \, t \in [0 \, , \, \rho[)$, et de remarquer que, d'après (A.16) et la définition de X ,

(A.18) $$d_x \, \pi(\operatorname{grad} \eta(x)) = d_{\gamma_{x'}(t)} \, \pi(E(x) \, \overset{\circ}{\gamma}_{x'}(t)) = E(x) \, \overset{\circ}{\theta}(t)$$

où θ est la courbe définie par $\theta(s) = \pi(\gamma_{x'}(s))$ $(s \in [0 \, , \, \rho[)$. D'où le résultat cherché, puisque $\theta(s) = x'$ par définition de π .

Inversement, la relation (A.18) montre que, une fois ρ fixé, π est déterminé de façon unique par (1), (2) et (3), puisque $\overset{\circ}{\theta}(s) = 0$ pour tout s d'après (3) et $\overset{\circ}{\theta}(0) = x'$ d'après (2).

Enfin, posant, pour $x' \in \partial M$, $\nu_{x'} = -\frac{1}{\sqrt{E(x')}} \operatorname{grad} \eta(x')$, on a

$$g_{x'}(\nu_{x'} \, , \, \nu_{x'}) = 1$$

et, pour $\xi \in T_{x'}(\partial M)$,

$$g_{x'}(\nu_{x'} \, , \, \xi) = -\frac{1}{\sqrt{E(x')}} g_{x'}(\operatorname{grad} \eta(x') \, , \, \xi) = -\frac{1}{\sqrt{E(x')}} \langle d_{x'} \, \eta \, , \, \xi \rangle = 0 \quad ,$$

puisque η est constante sur ∂M . D'où (A.11) d'après la caractérisation de n (théorème 2.8). Le théorème est établi.

(ε) Le corollaire en résulte sans difficulté : sur $U = \overset{-1}{\pi}(V)$, on a

$$\langle d\chi^j \, , \, \mathrm{grad}\ \eta\rangle = \langle d\psi^j \, , \, d\pi(\mathrm{grad}\ \eta)\rangle = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n-1) \quad ,$$

et

$$\langle d\chi^n \, , \, \mathrm{grad}\ \eta\rangle = \langle d\eta \, , \, \mathrm{grad}\ \eta\rangle = g(\mathrm{grad}\ \eta \, , \, \mathrm{grad}\ \eta) = E \quad ;$$

d'où

$$\partial/\partial\chi^n = \frac{1}{E}\,\mathrm{grad}\ \eta \quad ,$$

et

$$g_{nj} = g(\partial/\partial\chi^n \, , \, \partial/\partial\chi^j) = \frac{1}{E}\, g(\mathrm{grad}\ \eta \, , \, \partial/\partial\chi^j) = \frac{1}{E}\,\langle d\eta \, , \, \partial/\partial\chi^j\rangle$$
$$= \frac{1}{E}\,\frac{\partial\eta}{\partial\chi^j} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n) \quad .$$

C. Q. F. D.

A.9. Remarque. – On déduit sans difficulté des résultats précédents que, si η est une coordonnée intérieure globale telle que $g(\mathrm{grad}\ \eta \, , \, \mathrm{grad}\ \eta) = 1$ sur D_η, alors η coïncide sur D_η avec la distance géodésique au bord η_g. En effet, on vérifie alors en utilisant les relations (A.15) du corollaire que, pour chaque $x \in D_\rho^\eta$, la courbe $\gamma_{x'}$ passant par x (voir la démonstration du théorème A.7) réalise effectivement le minimum de la distance géodésique de x à ∂M.

A.10. – Toute coordonnée intérieure globale normale est "équivalente" à la distance géodésique au bord :

LEMME. – Soit η une coordonnée intérieure globale normale sur M de classe C^2. On a,

(A.19)
$$\lim_{\substack{x\to\partial M \\ x\notin\partial M}} \frac{\eta(x)}{\eta_g(x)} = 1 \quad .$$

Autrement dit : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage W_ε de ∂M ($W_\varepsilon \subset D^\eta$) pour lequel,

$$x \in W_\varepsilon \implies (1-\varepsilon)\ \eta_g(x) \leqslant \eta(x) \leqslant (1+\varepsilon)\ \eta_g(x) \quad .$$

En effet, soient $(V_\alpha \, , \, \psi_\alpha)$ un recouvrement fini de ∂M par des cartes locales, et, $(U_\alpha \, , \, \chi_\alpha)$ les cartes locales de M au voisinage de ∂M que l'on en déduit par les relations (A.12) et (A.13) (corollaire du théorème A.7). Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut choisir, puisque η est supposée normale, et en vertu de (A.15), un voisinage W_ε de ∂M, $W_\varepsilon \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, tel que, pour chaque α et $x \in U_\alpha \cap W_\varepsilon$, on ait, (A.20) $$\frac{1}{1+\varepsilon} < g^{\alpha}_{nn}(x) < \frac{1}{1-\varepsilon} \quad ({}^{35}) .$$

On vérifie alors sans difficulté que, en vertu de (A.14), pour chaque $x \in W_\varepsilon$:

- $|\gamma| \geqslant \frac{\eta(x)}{1+\varepsilon}$ pour chaque arc de courbe γ tracé sur M d'origine x et d'extrémité sur ∂M ;
- supposant que $x \in U_{\alpha_0}$, si on pose, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\gamma_0^j(t) = \chi^j_{\alpha_0}(x) \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \qquad \text{et} \qquad \gamma_0^n(t) = \eta(x)t \quad ,$$

on définit un arc de courbe γ_0 tracé sur U_{α_0} pour lequel $|\gamma_0| < \frac{\eta(x)}{1-\varepsilon}$.

D'où (A.19) et le lemme.

A.11. THÉORÈME (36). — On suppose que g est de classe C^1, on désigne par τ la mesure riemannienne sur M associée à g (n° 2.2), par σ la mesure riemannienne sur ∂M associée à la restriction g' de g à ∂M (n° 2.3), et on pose, pour $\rho > 0$,

$$D_\rho = \{x \mid x \in M \text{ et } d_g(x , \partial M) < \rho\} \quad ({}^{37}) .$$

Alors, pour chaque $f \in C(M)$,

(A.21) $$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_{D_\rho} f \, d\tau = \int_{\partial M} f \, d\sigma \quad ,$$

la convergence ayant, de plus, lieu uniformément sur tout ensemble équicontinu (compact dans $C(M)$) de fonctions $f \in C(M)$.

En effet (38), soit η une coordonnée intérieure globale normale sur M de classe C^2 (le lemme A.6 en assure l'existence, puisque g est de classe C^1 (39)). On pose, pour chaque $\rho > 0$ assez petit,

$$D^\eta_\rho = \{x \mid x \in D^\eta \text{ et } \eta(x) < \rho\} \quad .$$

On désigne par ailleurs par H un sous-ensemble équicontinu de $C(M)$.

---

(35) $g^{\alpha}_{nn} = g(\partial/\partial\chi^n_\alpha , \partial/\partial\chi^n_\alpha)$.

(36) Avec les notations introduites au n° A.1 : on suppose M compacte.

(37) d_g désigne la distance géodésique associée à g (n° A.3 et A.4).

(38) Voir, dans le cas où g est de classe C^2, SATO et UENO, [10], p. 545.

(39) Voir aussi la remarque 1 ci-dessous.

(α) On va d'abord montrer que,

(**A.22**) $\quad \lim\limits_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_{D^\eta_\rho} f \, d\tau = \int_{\partial M} f \, d\sigma \qquad$ **uniformément lorsque** f **décrit** H .

Au moyen d'une partition de l'unité finie, on se ramène d'abord au cas où f a son support dans une carte locale (U, χ) de classe C^1, déduite d'une carte locale (V, Ψ) de ∂M au moyen des relations (A.11) et (A.12) (corollaire du théorème **A.**7). On a alors, dans cette carte,

$$\frac{1}{\rho} \int_{D^\eta_\rho} f \, d\tau = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho dz^n \int_{R^{n-1}} f(z', z^n) \sqrt{g^\chi(z', z^n)} \, dz' \quad ,$$

et

$$\int_{\partial M} f \, d\sigma = \int_{R^{n-1}} f(z', 0) \sqrt{g'^\Psi(z')} \, dz' \quad .$$

D'où, puisque $g'^\Psi(z') = g^\chi(z', 0)$, en vertu des relations (**A.**14) et (A.15) :

$$\left|\frac{1}{\rho} \int_{D^\eta_\rho} f \, d\tau - \int_{\partial M} f \, d\sigma\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{\rho} \int_0^\rho dz^n \int_{R^{n-1}} \left|f(z', z^n) \sqrt{g^\chi(z', z^n)} - f(z', 0) \sqrt{g^\chi(z', 0)}\right| dz' .$$

(A.22) en résulte immédiatement.

(β) Il reste à montrer la relation,

(**A.23**) $$\lim_{\rho \downarrow 0} \left(\frac{1}{\rho} \int_{D_\rho} f \, d\tau - \frac{1}{\rho} \int_{D^\eta_\rho} f \, d\tau\right) = 0$$

uniformément lorsque f décrit H : $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe, d'après le lemme **A.**10, un nombre $\rho_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\rho < \rho_\varepsilon$,

$$\eta(x) < \rho \;\text{ ou }\; \eta_g(x) < \rho \implies \eta_g(x)(1-\varepsilon) < \eta(x) < \eta_g(x)(1+\varepsilon) \quad ;$$

ou encore,

$$\rho < \rho_\varepsilon \implies D_{\rho/(1+\varepsilon)} \subset D^\eta_\rho \subset D_{\rho/(1-\varepsilon)} \quad .$$

On conclut alors grâce à la relation,

$$\left|\frac{1}{\rho} \int_{D_\rho} f \, d\tau - \frac{1}{\rho} \int_{D^\eta_\rho} f \, d\tau\right| \leqslant \|f\| \frac{1}{\rho} \tau(D_{\rho/(1-\varepsilon)} \setminus D_{\rho/(1+\varepsilon)}) \quad .$$

Le théorème est ainsi établi.

Remarque 1. - Lorsque g est de classe C^2, on peut (en vertu du théorème A.4) prendre $\eta = \eta_g$ et limiter ainsi la démonstration à l'alinéa (α).

Remarque 2. - La propriété (A.22) a lieu, plus généralement, lorsque η est une fonction $\geqslant 0$ définie sur un voisinage de ∂M et ayant la propriété (A.19) (lemme A.10). On peut aussi régulariser, pour chaque $\rho > 0$, la fonction 1_{D_ρ} en une fonction Φ_ρ de classe C^∞ de telle sorte que l'on ait aussi :

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{\rho} \int \Phi_\rho \, f \, d\tau = \int_{\partial M} f \, d\tau \quad .$$

Remarque 3. - La relation (A.21) subsiste aussi lorsqu'on substitue à f certaines fonctions σ-sommables sur ∂M, mais pouvant avoir une singularité isolée sur ∂M : par exemple $f(x) = [d_g(x'_0 , x)]^{-(n-2)}$ (où $x'_0 \in \partial M$ est donné). Voir à ce sujet l'appendice de l'exposé n° 5 de ce séminaire [11].

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON (Shmuel). - Lectures on elliptic boundary value problems. - Princeton, Van Nostrand, 1965 (Van Nostrand mathematical Studies, 2).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale, chap. 9, 2e édition. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Bourbaki, 8).

[3] BRELOT (Marcel). - Eléments de la théorie classique du potentiel, 3e édition. - Paris, Centre de Documentation universitaire, 1965 (Les Cours de Sorbonne).

[4] GOLDBERG (Samuel I.). - Curvature and homology. - New York, Academic Press, 1962 (Pure and applied Mathematics, 11).

[5] GREEN (George). - An essay on the application of mathematical analysis to the theory of electricity and magnetism. - Nottingham, T. Wheelhouse, 1928.

[6] HELGASON (Sigurdur). - Differential geometry and symetric spaces. - New York, Academic Press, 1962 (Pure and applied Mathematics, 12).

[7] KELLOGG (Olivier Dimon). - Foundations of potential theory. - Berlin, J. Springer, 1929 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 31).

[8] MIRANDA (Carlo). - Equazioni alle derivate parziali di tipo ellitico. - Berlin, Springer-Verlag, 1955 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, 2).

[9] MUNKRES (James R.). - Elementary differential topology. - Princeton, Princeton University Press, 1965 (Annals of Mathematics Studies, 54).

[10] SATO (K.) and UENO (T.). - Multidimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ., t. 4, 1965, p. 529-605.

[11] Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, 10e année, 1965/66. - Paris, Secrétariat mathématique, 1967.

[12] WHITNEY (Hassler). - Functions differentiable on the boundary of regions, Annals of Math., t. 35, 1934, p. 482-485.