Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel

Paul-André Meyer

Le support d'une fonctionnelle additive continue

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 9 (1964-1965), exp. n° 10, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1964-1965__9__A7_0>

LE SUPPORT D'UNE FONCTIONNELLE ADDITIVE CONTINUE

par Paul-André MEYER

(d'après GETOOR [1])

Les notations relatives aux processus de Markov sont celles du tome 5 de ce Séminaire [4], auquel le lecteur voudra bien se reporter.

I. Existence du support fin.

1. - Nous commencerons par quelques considérations sur les fonctions définies sur $\underset{\sim}{R}_+$, ce qui revient en fait à vérifier le théorème de Getoor dans le cas d'un processus de Markov purement déterministe de "translation uniforme" sur $\underset{\sim}{R}_+$.

Soit a une fonction définie sur $\underset{\sim}{R}_+$, croissante, continue à droite, telle que $a(0) = 0$. Il existe une mesure da sur $\underset{\sim}{R}_+$ qui attribue à l'intervalle $[0 , t]$ la mesure $a(t)$. Le support de da est l'ensemble C des points de croissance de a , c'est-à-dire des points x tels que l'on ait

$$a(x + \varepsilon) - a(x - \varepsilon) > 0 \qquad \text{pour tout} \quad \varepsilon > 0 .$$

Soit C_g (resp. C_d) l'ensemble des points de croissance à gauche (resp. à droite) de a , c'est-à-dire l'ensemble des points x tels que

$$a(x) - a(x - \varepsilon) \quad (\text{resp.} \quad a(x + \varepsilon) - a(x) \ ) \quad \text{soit} \ > 0 \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon > 0 .$$

L'ensemble C_g porte la mesure da dans tous les cas, et l'ensemble C_d porte da si a est continue ; en effet, l'ensemble $C - C_d$ est dénombrable, donc négligeable pour da si a est continue. En revanche, l'exemple d'une masse unité montre que C_d ne porte pas nécessairement da si a n'est pas continue.

Supposons a continue, et soit τ la borne inférieure de C_d ; on a aussi $\tau = \inf \{t : \ a(t) > 0\}$. Si τ est fini, τ est lui-même un point de croissance à droite non isolé : la borne inférieure de $C_d \cap]\tau , \infty[$ est égale à τ .

Remarque. - La topologie droite n'est autre que la topologie fine pour le processus de Markov de translation uniforme sur $\underset{\sim}{R}_+$. Le fait que C_g porte toujours da (alors que C_d ne la porte que si a est continue) suggère que les fonctionnelles additives quelconques admettent un support "cofin" sous les hypothèses de "Markoff processes and potentials, III" [2].

2. Soit (X_t) un processus de Markov admettant un semi-groupe de transition (P_t) , à valeurs dans un espace localement compact E à base dénombrable. Nous supposerons que (X_t) satisfait à l'hypothèse (A) de HUNT, mais le lecteur peut supposer, s'il le désire, que (X_t) satisfait à l'hypothèse plus forte de l'exposé 5 de [4], dont nous utiliserons les notations.

Soit (A_t) une <u>fonctionnelle additive continue</u> de (X_t) , c'est-à-dire une famille de variables aléatoires finies définies sur Ω , possédant les propriétés suivantes :

(1) $A_0 = 0$; l'application $t \leadsto A_t(\omega)$ est croissante et continue à droite pour tout $\omega \in \Omega$.

(2) A_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \geqslant 0$.

(3) Soit T un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_t)$, et soit t un nombre $\geqslant 0$; on a, pour toute loi initiale μ ,

$$A_{T+t}(\omega) = A_T(\omega) + A_t \circ \theta_T(\omega) \quad P^\mu - \text{p. s. sur l'ensemble } \{T < \infty\} .$$

On dit qu'un ensemble presque-borélien $B \subset E$ <u>porte la fonctionnelle</u> (A_t) si l'on a, pour toute loi initiale μ ,

$$\int_0^\infty (1 - I_B \circ X_s)\, dA_s = 0 \quad P^\mu - \text{p. s.} .$$

Voici alors l'énoncé de GETOOR :

THÉORÈME. - <u>Il existe un plus petit ensemble presque-borélien finement fermé qui porte la fonctionnelle additive continue</u> (A_t) .

La fin de ce paragraphe est consacrée à la démonstration de ce théorème, et de quelques résultats qui le précisent. L'expression "p. s." signifiera " P^μ - p. s. pour toute loi initiale P^μ ".

3. - Posons

$$T(\omega) = \inf \{t : A_t(\omega) > 0\} .$$

Il résulte de la propriété (3) des fonctionnelles multiplicatives que l'on a

$$S + T \bullet \theta_S = T \quad \text{p. s.}$$

sur l'ensemble $\{S < T\}$, pour tout temps d'arrêt S . D'autre part, T étant le premier point de croissance à droite de la fonction $t \leadsto A_t$, il résulte du n° 1 que l'on a $T \circ \theta_T = 0$ sur l'ensemble $\{T < \infty\}$.

Posons $\varphi(x) = E^x\left[e^{-T}\right]$; on a, pour tout $s \geqslant 0$,

$$e^{-s} P_s \varphi^x = E^x\left[e^{-s} e^{-T\circ\theta_s}\right] .$$

Or, $s + T \circ \theta_s$ est le premier point de croissance à droite de $t \rightsquigarrow A_t$ sur l'intervalle $]s , \infty[$; on a donc

$$T \leqslant s + T \circ \theta_s , \qquad T = \lim_{s\to 0} s + T \circ \theta_s .$$

Il en résulte que φ est 1-excessive, donc presque-borélienne. L'ensemble $F = \{x : \varphi(x) = 1\}$ est donc presque-borélien et finement fermé. On a l'équivalence :

$$x \in F \iff P^x\{T = 0\} = 1 .$$

Nous verrons que F est le support fin de (A_t) .

Soit S un temps d'arrêt quelconque. Je dis que les évènements

$$C = \{\omega : S(\omega) < \infty , X_S(\omega) \in F\}$$
$$D = \{\omega : S(\omega) < \infty , S(\omega) \text{ est un point de croissance à droite de } t \rightsquigarrow A_t(\omega)\}$$

ne diffèrent que par un ensemble négligeable (quelle que soit la loi initiale). Désignons en effet par Δ la différence symétrique, par ν la répartition de X_S ; $C \Delta D$ est le translaté par S de l'évènement :

$$B = \{\omega : X_0(\omega) \in F\} \Delta \{\omega : 0 \text{ est un point de croissance à droite de } t \rightsquigarrow A_t(\omega)\}$$
$$= \{X_0(\omega) \in F\} \Delta \{T = 0\} .$$

On a alors, d'après la propriété de Markov forte,

$$P[C \Delta D] = P^{\nu}[B] = \int_E P^x[B]\, d\nu(x) ,$$

mais on a $P^x[B] = 0$ pour tout x , d'où le résultat.

Nous utilisons maintenant l'énoncé général suivant, qui peut se démontrer au moyen du "changement de temps" associé à la fonctionnelle (A_t) :

<u>Soient</u> (Y_t) <u>et</u> (Z_t) <u>deux processus mesurables à valeurs positives, tels que l'on ait, pour toute loi initiale</u> μ <u>et tout temps d'arrêt</u> S ,

$$E^{\mu}\left[Y_S . I_{\{S<\infty\}} \mid \mathfrak{F}_S\right] = E^{\mu}\left[Z_S . I_{\{S<\infty\}} \mid \mathfrak{F}_S\right] \quad P^{\mu} - \text{p. s.} .$$

<u>On a alors</u>

$$E^{\mu}\left[\int_0^{\infty} Y_s \, dA_s\right] = E^{\mu}\left[\int_0^{\infty} Z_s \, dA_s\right] .$$

Appliquons ce résultat aux deux processus définis par

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_t(\omega) \notin F , \\ 0 & \text{si } X_t(\omega) \in F . \end{cases}$$

$$Z_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ n'est pas un point de croissance à droite de } t \leadsto A_t(\omega) , \\ 0 & \text{si } t \text{ est un point de croissance à droite de } t \leadsto A_t(\omega) . \end{cases}$$

Or, on a $E\left[\int_0^\infty Z_t \, dA_t\right] = 0$ d'après le n° 1, donc $E\left[\int_0^\infty Y_t \, dA_t\right] = 0$.

Nous avons montré ainsi que <u>l'ensemble</u> F <u>porte</u> (A_t) .

4. - Il nous reste à prouver que tout ensemble presque-borélien finement fermé qui porte (A_t) contient F .

Désignons par T_F^0 le temps d'arrêt $\inf \{t : X_t \in F\}$, par T_F le temps d'entrée dans F $\left(\inf \{t > 0 : X_t \in F\}\right)$. L'ensemble F étant finement fermé, on a $X_{T_F^0}(\omega) \in F$ pour presque tout ω tel que $T_F^0(\omega) < \infty$; $T_F^0(\omega)$ est donc p. s. un point de croissance à droite de la fonctionnelle, et l'on a p. s. $T(\omega) \leq T_F^0(\omega)$. Inversement, $T(\omega)$ est un point de croissance à droite de la fonctionnelle, pour tout ω tel que $T(\omega) < \infty$; on a donc p. s. $X_T(\omega) \in F$, et donc $T_F^0(\omega) \leq T(\omega)$. Autrement dit, on a p. s. $T = T_F^0$.

Or, on a $T = \lim_{t \to 0^+} t + T \circ \theta_t$; on a donc

$$T_F^0 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} + T_F^0 \circ \theta_{1/n} = T_F \quad \text{p. s. .}$$

Autrement dit, on a $T_F^0 = T_F$ p. s. , ce qui entraîne que F n'a pas de point irrégulier (F est "finement parfait") ; de plus, on a $T = T_F$ p. s. .

Soit G un second ensemble finement fermé presque-borélien qui porte (A_t) , et soit T_G le temps d'entrée dans G . On a, pour tout $x \in E$,

$$E^x\left[\int_0^{T_G} d\, A_t\right] = 0 ,$$

donc $A_{T_G} = 0$ P^x - p. s. , et $T_G \leq T$ P^x - p. s. , d'où $T_G \leq T_F$ P^x - p. s. . Soit x un point de F : F étant finement parfait, on a $T_F = 0$ P^x - p. s. , donc aussi $T_G = 0$, et x est régulier pour G . L'ensemble G étant finement fermé, on a $x \in G$, et enfin $F \subset G$, ce qui prouve le théorème de Getoor.

5. - On peut se demander si F est effectivement le plus petit ensemble finement fermé (non nécessairement presque-borélien) qui porte la fonctionnelle. Nous allons voir qu'il en est bien ainsi, sous l'hypothèse (L) de [3]. Mais cela va exiger quelques préliminaires, car la phrase ci-dessus n'a même pas de sens a priori,

les ensembles finement fermés n'étant pas toujours universellement mesurables. Voici d'abord quelques définitions :

(a) Un point x est dit <u>régulier</u> pour un ensemble quelconque G s'il est régulier pour tout ensemble presque-borélien contenant G (on pourrait d'ailleurs remplacer "presque-borélien" par "borélien" ou "intersection dénombrable d'ouverts"). On dit que G est finement fermé si tout point régulier pour G appartient à G.

(b) Une fonction universellement mesurable positive u est dite <u>λ-surmédiane</u> si l'on a $e^{-\lambda t} P_t u \leqslant u$ pour tout $t \geqslant 0$. La fonction $\hat{u} = \lim_{t \to 0} e^{-\lambda t} P_t u$ est alors λ-excessive ; on l'appelle la <u>régularisée</u> de u.

(c) On dit que l'hypothèse (L) est vérifiée s'il existe une mesure positive μ telle que la seule fonction λ-excessive nulle μ-presque partout soit la fonction 0. Cette hypothèse est vérifiée, en particulier, si les fonctions λ-excessives sont s. c. i. On montre alors qu'il existe une mesure positive bornée ν, telle que l'égalité ν-p. p. de deux fonctions λ-excessives entraîne leur égalité partout (ce qui revient à dire que ν charge tout ouvert fin). On établit, sous l'hypothèse (L), le résultat suivant (qui joue un rôle analogue à celui du "lemme topologique" de Brelot-Choquet en théorie classique du potentiel).

<u>Soit</u> I <u>un ensemble filtrant décroissant de fonctions</u> λ-<u>excessives. Il existe alors une partie dénombrable</u> J <u>de</u> I <u>telle que la régularisée de</u> $\inf_{f \in J} f$ <u>minore tout élément de</u> I.

Considérons alors un ensemble finement fermé G, et donnons à λ une valeur > 0 arbitraire. Soit I l'ensemble filtrant décroissant des fonctions λ-excessives égales à 1 sur G ; il existe une suite décroissante (v_n) d'éléments de I telle que la régularisée $\hat{v}$ de $v = \inf_n v_n$ minore tout élément de I. Posons

$$M = \{v = 1\} \ , \quad K = \{\hat{v} = 1\} \ .$$

Il résulte du théorème de convergence de Doob que l'ensemble $M - K$ est semi-polaire, et on a évidemment $G \subset M$; nous allons montrer que l'on a $K \subset G$. Considérons en effet un point $x \notin G$; x n'est pas régulier pour G, et il existe donc un ensemble presque-borélien L contenant G tel que x ne soit pas régulier pour L : quitte à remplacer L par $L - \{x\}$, on peut supposer que x n'appartient pas à L. Il existe alors, d'après un théorème de Hunt, une fonction λ-excessive w égale à 1 sur L (donc sur G) et telle que $w(x) < 1$: on a donc $\hat{v}(x) \leqslant w(x) < 1$, et $x \notin K$.

Supposons maintenant que G porte la fonctionnelle (A_t) au sens faible suivant: tout ensemble presque-borélien, qui contient G, porte (A_t) ; M porte alors (A_t). D'autre part, l'ensemble $M - K$ est semi-polaire : il est donc rencontré par presque toutes les trajectoires suivant un ensemble dénombrable ; la fonctionnelle continue (A_t) ne charge donc pas $M - K$, de sorte que K porte (A_t). Il résulte alors du théorème de Getoor que K contient F, et donc que G contient F. L'ensemble F est donc bien le plus petit ensemble finement fermé qui porte la fonctionnelle.

II. Support fin d'une mesure.

Nous nous plaçons maintenant sous les hypothèses de la troisième partie de "Markoff processes and potentials". Les notations sont celles de l'exposé 10 de [4]. Pour simplifier l'exposé, nous supposerons que les noyaux-potentiels U et $\hat{U}$ des deux semi-groupes en dualité sont continus et tendent vers 0 à l'infini. Rappelons que la théorie envisagée ici contient celles du potentiel newtonien, du potentiel de la chaleur, des potentiels de Riesz.

1. - Dans la recherche du support fin d'une mesure positive ν, on a évidemment le droit de remplacer ν par une mesure équivalente. Le théorème suivant permet donc de simplifier le problème.

Soit ν une mesure positive sur E, qui ne charge aucun ensemble semi-polaire ; il existe une mesure μ équivalente à ν dont le potentiel $U\mu$ est borné, et engendré par une fonctionnelle additive continue (A_t).

Soit H un ensemble relativement compact, et soit ν' la mesure bornée $\nu . I_H$; soit f une fonction positive, continue à support compact. Le potentiel $(f\xi)\hat{U}$, où ξ désigne la mesure fondamentale de l'exposé 10 de [4], est continu et borné, donc ν'-intégrable. On a par conséquent

$$\langle f\xi \, , \, U\nu' \rangle = \langle (f\xi)\hat{U} \, , \, \nu' \rangle < \infty \, ,$$

de sorte que $U\nu'$ est localement ξ-intégrable ; l'ensemble $\{U\nu' = \infty\}$ est donc polaire, et ν' ne charge pas cet ensemble. Soit ν'_n la mesure $\nu' . I_{\{n-1 \leqslant U\nu' < n\}}$; on a $\nu' = \sum_n \nu'_n$; nous allons voir que $U\nu'_n$ est majoré par n. Il en résultera que ν' (et donc aussi ν) est la somme d'une série de mesures dont les potentiels sont bornés, et donc que ν est équivalente à une mesure dont le potentiel est borné.

L'assertion soulignée plus haut résulte de la forme suivante du principe du maximum, appliquée à $\lambda = \nu'$, $a = n$, $B = \{n - 1 \leqslant U\nu' < n\}$: soit λ une mesure positive qui ne charge aucun ensemble semi-polaire, et soit B un ensemble borélien (*) qui porte λ . Si $U\lambda$ est majoré par $a > 0$ sur B , on a $U\lambda \leqslant a$ partout.

Cette propriété sera établie si nous montrons que $P_B\, U\lambda = U\lambda$. En effet, on a $U\lambda \leqslant a$ sur B , donc sur l'adhérence fine de B qui porte les mesures $P_B(x,dy)$; on a donc $P_B\, U\lambda \leqslant a$. Or, on a

$$P_B\, U\lambda = U(\hat{P}_B\, \lambda) = U\left(\int_B \hat{P}_B\, \varepsilon_x\, d\lambda(x)\right) ,$$

du fait que λ est portée par B . D'autre part, l'ensemble des points de B co-irréguliers pour B est co-semi-polaire, donc semi-polaire ([3], théorème 6.1, p. 214) et enfin négligeable pour λ . On a donc

$$\hat{P}_B\, \varepsilon_x = \varepsilon_x \quad \text{pour } \lambda\text{-presque tout } x ,$$

et enfin,

$$P_B\, U\lambda = U\lambda .$$

Considérons alors une mesure μ équivalente à ν dont le potentiel $u = U\mu$ est borné : ce potentiel appartient à la classe (D) , et il existe donc une fonctionnelle additive (A_t) de la classe (U) telle que l'on ait, pour tout x ,

$$u(x) = E^x\left[A_\infty\right]$$

(voir [3] ou [1]). Mais on a, pour toute fonction borélienne positive f et tout x ,

$$(*) \qquad U(f.\mu)^x = E^x\left[\int_0^\infty f \circ X_t\, dA_t\right]$$

([3], théorème 6.4, p. 218). Soit K une partie compacte de E , et soit λ la mesure $\mu.I_K$; λ ne chargeant pas les ensembles semi-polaires, on a $P_K\, U\lambda = U\lambda$, comme ci-dessus. En posant $f = I_K$ dans la formule précédente, on voit que

$$E^x\left[\int_0^\infty I_K \circ X_t\, dA_t\right] = \int P_K(x\ , dy) E^y\left[\int_0^\infty I_K \circ X_t\, dA_t\right]$$

pour tout compact K . Le théorème 4.6, p. 194, de [3], montre alors que (A_t) est continue.

2. - Il est alors très facile de montrer que toute mesure ν , qui ne charge pas les ensembles semi-polaires, admet un support fin. On remplace ν par la mesure équivalente μ ci-dessus, à laquelle on associe une fonctionnelle additive continue (A_t) . D'après la formule (*) ci-dessus, un ensemble borélien porte μ si

---

(*) Les fonctions excessives sont ici s. c. i., donc boréliennes.

et seulement s'il porte (A_t) . Le théorème de Getoor entraîne donc l'existence d'un plus petit ensemble borélien finement fermé F , qui porte μ (et donc ν) ; l'hypothèse (L) étant vérifiée dans le cas présent, on en déduit aisément que F est contenu dans tout ensemble finement fermé (borélien ou non) qui porte ν .

III. Passages à la limite sur les réduites.

1. - Soit μ une mesure positive dont le potentiel newtonien u est borné ; un ensemble finement fermé G porte μ si, et seulement si, la réduite (régularisée) de u sur G est égale à u . L'ensemble des parties finement fermées qui portent μ étant filtrant décroissant, le problème de l'existence du support fin de μ se ramène à la possibilité du passage à la limite pour les réduites d'un potentiel fixe, sur des ensembles finement fermés qui forment une famille filtrante décroissante. Nous allons étudier ici ce problème de passage à la limite, indépendamment de celui des supports ; nous retrouverons ainsi, par des méthodes probabilistes, certains résultats récents de M. BRELOT.

2. - Nous commencerons par traîter le cas des suites décroissantes d'ensembles finement fermés presque-boréliens. Nous nous placerons sous les hypothèses de la première partie de l'exposé, auxquelles nous adjoindrons les deux hypothèses suivantes :

(a) Les ensembles semi-polaires sont polaires.
(b) Toutes les fonctions λ-excessives $(\lambda \geq 0)$ sont régulières.

Rappelons qu'une fonction λ-excessive u est dite régulière si elle possède la propriété suivante : Pour toute suite croissante (T_n) de temps d'arrêt, dont on désigne la limite par T , on a

$$u \circ X_T = \lim_n u \circ X_{T_n} \quad \text{p. s.}$$

(pour toute loi initiale) sur l'ensemble $\{T < \infty\}$. Les deux hypothèses ci-dessus sont d'ailleurs très loin d'être indépendantes : HUNT a montré qu'elles sont en fait équivalentes pour tous les semi-groupes qui ont quelque honnêteté. D'autre part, les hypothèses sont bien-entendu satisfaites, dans le cas des potentiels de Riesz et du mouvement brownien.

3. - Désignons par (F_n) une suite décroissante d'ensembles presque-boréliens finement fermés, par F l'intersection des F_n . Nous allons commencer par montrer que le temps d'entrée T_n dans F_n tend (en croissant) vers le temps d'entrée T_F dans F , P^x - p. s. pour quasi-tout x .

Donnons en effet à λ une valeur > 0 fixe, et désignons par $\Phi^{\lambda}_{F_n}$ le λ-potentiel d'équilibre de F_n , par S la limite de la suite croissante (T_n) de temps d'arrêt. Soit μ une loi initiale quelconque ; on a $\Phi^{\lambda}_{F_n} = 1$ quasi-partout sur F_n d'après l'hypothèse (a), et $X_{T_m} \in F_m$ P^{μ} - p. s. sur $\{T_m < \infty\}$ du fait que F_m est finement fermé. On a donc

$$P^{\mu} \text{ - p. s. } \Phi^{\lambda}_{F_n} \circ X_{T_m} = 1 \quad \text{pour tout } m \geqslant n ,$$

sur l'ensemble $\{T_m < \infty\}$. La fonction $\Phi^{\lambda}_{F_n}$ étant régulière, on a

$$\Phi^{\lambda}_{F_n} \circ X_S = 1 \quad P^{\mu} \text{ - p. s. sur l'ensemble } \{S < \infty\} ;$$

on a donc p. s. $X_S \in F_n$ pour tout n , ou encore $X_S \in F$ P^{μ} - p. s. sur $\{S < \infty\}$; notons d'autre part que l'on a $S \leqslant T_F$.

Prenons alors pour μ une mesure ε_x , où x est régulier pour F : on a P^x - p. s. $T_F = 0$, donc évidemment $T_n = 0$, et $\lim_n T_n = T_F$. Supposons ensuite que x n'appartienne pas à F : x n'appartient pas à F_n pour un n assez grand, et par conséquent est irrégulier pour F_n ; on a donc P^x - p. s. $T_n > 0$, donc aussi $0 \leqslant S \leqslant T_F$, $X_S \in F$ sur $\{S < \infty\}$. Ces relations entraînent $S = T_F$ P^x - p. s. L'ensemble H des x tels que T_n ne tende pas P^x - p. s. vers T_F est donc contenu dans l'ensemble des points de F irréguliers pour F : il est donc polaire, ce qui établit la propriété cherchée.

Cette analyse donne en fait un meilleur résultat : l'ensemble exceptionnel H ci-dessus est exactement celui des x qui sont réguliers pour tous les F_n , et irréguliers pour F .

4. - Soit u une fonction excessive finie (nous laisserons de côté le cas des fonctions λ-excessives, $\lambda > 0$, et celui des fonctions excessives qui prennent la valeur $+\infty$) ; nous supposerons que u est un potentiel de la classe (D) . L'absence de partie harmonique est en effet une condition naturelle, lorsqu'on étudie les réduites sur des ensembles généraux sans faire intervenir de frontière. D'autre part, l'appartenance à la classe (D) signifie ceci : considérons la suite décroissante d'ensembles finement fermés $G_n = \{u \geqslant n\}$ dont l'intersection est vide ; alors, la réduite $P_{G_n} u$ tend partout vers 0 . Cette hypothèse est donc naturellement liée au problème de passage à la limite qui nous intéresse ; on montre d'ailleurs sans peine que tous les potentiels finis la vérifient, dans le cas des potentiels de Riesz et du mouvement brownien.

Considérons alors une suite décroissante F_n d'ensembles presque-boréliens finement fermés, et leur intersection F , et utilisons les notations du n° 3 ci-dessus. On a, pour tout x ,

$$P_{F_n} u^x = E^x\left[u \circ X_{T_n}\right] \; ; \qquad P_F u^x = E^x\left[u \circ X_T\right] ,$$

en convenant de poser $u \circ X_{T_n} = 0$ sur $\{T_n = \infty\}$, et de même pour T . Or, supposons que l'on ait $x \notin H$; les temps d'arrêt T_n tendent P^x - p. s. vers T , et l'on a donc

$$u \circ X_{T_n} \to u \circ X_T \quad P^x \text{ - p. s. sur } \{T < \infty\}$$

d'après la régularité de u . La même propriété a lieu sur $\{T = \infty\}$ du fait que u est un potentiel. Enfin, les variables aléatoires $u \circ X_{T_n}$ sont uniformément intégrables d'après l'appartenance de u à la classe (D) . On a donc

$$\lim_{n\to\infty} P_{F_n} u^x = P_F u^x \qquad \text{pour tout } x \notin H .$$

On remarquera que l'ensemble exceptionnel H ne dépend pas de la fonction u considérée.

5. - Nous allons traîter maintenant le cas des suites d'ensembles finement fermés (non nécessairement presque-boréliens), et celui des familles filtrantes décroissantes. A cet effet, nous introduirons l'hypothèse (L), comme au n° 5 de la première partie. Nous avons vu, dans ce numéro, que tout ensemble finement fermé G est la réunion d'un ensemble presque-borélien finement fermé K , et d'un ensemble semi-polaire, ici, d'un ensemble polaire. En remplaçant K par l'ensemble de ses points réguliers (qui n'en diffère que par un ensemble polaire), on voit que G est la réunion d'un ensemble presque-borélien finement parfait G' (que nous appellerons le noyau de G) et d'un ensemble polaire. La réduite d'une fonction excessive sur G est égale à la réduite sur le noyau de G . Les notations $P_G u$, Φ_G^λ (réduite régularisée de u sur G , λ-potentiel d'équilibre de G) ont donc la même signification que $P_{G'} u$, $\Phi_{G'}^\lambda$, et l'on a

$$G' = \left\{\Phi_{G'}^\lambda = 1\right\} = \left\{\Phi_G^\lambda = 1\right\} \qquad \text{pour tout } \lambda > 0 .$$

Considérons alors une suite décroissante d'ensembles finement fermés F_n , et soit F leur intersection ; soit F'_n le noyau de F_n : les F'_n sont presque-boréliens et décroissant, on a donc, en posant $F' = \bigcap_n F'_n$,

$$\lim_n P_{F'_n} u = P_{F'} u \quad \text{quasi-partout} .$$

D'où l'égalité

$$\lim_n P_{F_n} u = P_F u \quad \text{quasi-partout} ,$$

car $P_{F'_n} u = P_{F_n} u$, et $P_{F'} u = P_F u$, ces deux ensembles ne différant que par un ensemble polaire.

Considérons ensuite un ensemble filtrant décroissant $\mathfrak{J}$ d'ensembles finement fermés, et soit F l'intersection de $\mathfrak{J}$. Nous allons montrer que l'on a (si u est un potentiel de la classe (D)) :

$$\inf_{G\in\mathfrak{J}} P_G u = P_F u \quad \text{quasi-partout} .$$

Or il existe, d'après le n° 5 de la première partie, une suite décroissante (D_n) d'éléments de $\mathfrak{J}$ telle que toute fonction Φ_G^λ $(G \in \mathfrak{J})$ majore la régularisée de $\inf_n \Phi_{D_n}^\lambda$. **Soit D l'intersection des D_n** ; cette régularisée est égale à Φ_D^λ , et l'on a donc

$$\Phi_D^\lambda = \inf_n \Phi_{D_n}^\lambda \quad \text{quasi-partout} ,$$

$$\Phi_D^\lambda \leqslant \Phi_G^\lambda \qquad \text{pour tout } G \in \mathfrak{J} .$$

Soit $D' = \left\{\Phi_D^\lambda = 1\right\}$ le noyau de D ; on a $D' \subset G$ pour tout $G \in \mathfrak{J}$, et donc $D' \subset F \subset D$; rappelons que $D - D'$ est polaire.

On a alors

$$P_D u = \inf_n P_{D_n} u \quad \text{quasi-partout} ,$$

d'après le résultat relatif aux suites ; d'autre part, d'après la relation $D' \subset G$,

$$P_{D'} u \leqslant P_G u \qquad \text{pour tout } G \in \mathfrak{J} .$$

Il suffit alors de remarquer que l'on a

$$P_D u = P_{D'} u = P_F u .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] GETOOR (R. K.). - Additive functionals of a Markov process. Cours de l'Université de Hambourg, 1964.

[2] HUNT (G. A.). - Markoff processes and potentials, III, Illinois J. of Math., t. 2, 1958, p. 151-213.

[3] MEYER (P. A.). - Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 125-230.

[4] Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY : Théorie du potentiel, t. 5, 1960/61. - Paris, Secrétariat mathématique, 1961.