Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Erik Thomas

Une axiomatique des espaces de Dirichlet

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 9 (1964-1965), exp. nº 9, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1964-1965__9__A6_0>

UNE AXIOMATIQUE DES ESPACES DE DIRICHLET (*)

par Erik THOMAS

On sait qu'un espace de Dirichlet $D(X, \xi)$ est un espace de Hilbert constitué par des classes de fonctions localement intégrables par rapport à une mesure de Radon positive ξ sur un espace localement compact X, [1]. Pour obtenir les résultats les plus fins, dans la théorie du potentiel relative à un espace de Dirichlet, on est conduit à isoler, dans chaque classe u de D, des représentants particulièrement réguliers, dits B. L. D. précisés, mais les sous-classes de ces représentants ne constituent pas un espace de Dirichlet selon la définition de [1]. Le but de cet exposé est de montrer qu'en modifiant les axiomes (en particulier de telle manière qu'aucune mesure ξ ne joue un rôle particulier) les classes de représentants précisés constituent elles-mêmes un espace du même type (cela permettra en particulier d'utiliser, pour ces classes, la méthode de projection orthogonale et de définir, par exemple, le balayage sur un fermé quelconque sans passer par l'intermédiaire de voisinages ouverts de ce fermé).

1. Soient X un ensemble, et $\mathcal{E} = \mathcal{E}(X, p)$ un espace vectoriel de fonctions réelles définies sur X, muni d'une semi-norme p. On suppose que les propriétés suivantes sont vérifiées :

(1) Si g est une contraction normale d'un élément f de $\mathcal{E}$, g appartient à $\mathcal{E}$, et $p(g) \leqslant p(f)$.

(2) a. Si $0 \leqslant g \leqslant f$, où f est un élément de $\mathcal{E}$ avec $p(f) = 0$, g appartient à $\mathcal{E}$, et $p(g) = 0$.

b. Si f_n est une suite monotone de fonctions de $\mathcal{E}$ tendant vers une limite finie g, alors si $p(f_n)$ est bornée par un nombre M, g appartient à $\mathcal{E}$, et $p(g) \leqslant M$.

On définit la capacité d'un ensemble par

$$\operatorname{cap} A = \inf_{f \geqslant \chi_A, f \in \mathcal{E}} p(f) \qquad (\chi_A \text{ fonction caractéristique de } A) ;$$

(*) Cet article est un résumé (sans démonstration) d'un exposé fait au Séminaire de Théorie du Potentiel en février 1965. Les démonstrations omises sont probablement susceptibles de simplifications, et il est peut-être possible de remplacer, dans le § 1, l'hypothèse (1) par une hypothèse moins restrictive.

c'est une fonction croissante, dénombrablement sous-additive d'ensemble. Pour qu'une fonction réelle f appartienne à $\mathcal{E}$ avec $p(f) = 0$, il faut et il suffit que $f(x) = 0$ quasi-partout (c'est-à-dire $f(x) = 0$, sauf peut-être sur un ensemble de capacité nulle). L'espace séparé associé à $\mathcal{E}$, soit E , est donc un espace de classes de fonctions égales deux à deux quasi-partout. On montre que E est un espace de Banach : Si f_n est une suite de Cauchy dans $\mathcal{E}$, il existe une suite extraite f_{n_k} convergente quasi-partout (même uniformément sur un ensemble de complémentaire de capacité arbitrairement petite) ; toute fonction limite quasi-partout de f_{n_k} appartient à $\mathcal{E}$ et est limite de la suite f_n . L'espace E est réticulé (pour l'ordre déduit de $\mathcal{E}$), le cône des éléments positifs, E^+ , est fermé dans E , les formes linéaires positives (nécessairement continues) sur E séparent E .

2. On suppose, dans ce paragraphe et dans les suivants, que p est la racine carrée d'une forme quadratique positive. E est alors un espace de Hilbert. Une caractérisation des potentiels purs dans les espaces de Dirichlet conduit à la définition :

Un élément $u \in E$ est un potentiel pur, si

$$(u , v) \geqslant 0 \qquad \forall\, v \in E^+ .$$

Les potentiels purs forment un cône convexe fermé et total. Les propriétés des potentiels purs dans les espaces de Dirichlet qui ne dépendent que de la structure d'espaces de Hilbert et de l'axiome des contractions ($\|Tu\| \leqslant \|u\|$, $\forall\, u$, où T est une contraction normale) sont également valables ici. Par exemple, la borne inférieure de deux potentiels purs est un potentiel pur. On peut définir le potentiel capacitaire d'un ensemble A de capacité finie : c'est l'élément de norme minimum parmi ceux qui sont supérieurs ou égal à 1 sur A . C'est un potentiel pur, orthogonal à tout élément nul sur A .

Notons que, dans le cas hilbertien, on prendra comme capacité le carré de la fonction capacité considérée au § 1.

3. On suppose ici que X est un espace topologique.

Une fonction f est dite quasi-continue si, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer un ouvert ω de capacité inférieure à ε tel que la restriction de f au complémentaire de ω soit continue. Si une fonction f de $\mathcal{E}$ est limite (dans $\mathcal{E}$) d'une suite de fonctions continues, f est équivalente à une fonction quasi-continue ; si l'ensemble des fonctions continues de $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{E}$, chaque u de E admet un représentant quasi-continu (ce sont ces représentants qui sont appelés B. L. D. précisés).

Posons :

$$\operatorname{cap}^* A = \inf_{\substack{A \subset \omega \\ \omega \text{ ouvert}}} \operatorname{cap} \omega \ ;$$

c'est une fonction d'ensemble définie semblablement qu'on appelle capacité dans la théorie des espaces de Dirichlet, $D(X , \xi)$. La définition précédemment donnée de la capacité est alors justifiée par le théorème suivant :

THÉORÈME. - Si chaque $u \in E$ contient un représentant quasi-continu au moins. le sous-espace $\mathcal{E}_0$ des fonctions quasi-continues de $\mathcal{E}$, muni de la semi-norme induite par p , satisfait aux axiomes (1) et (2). La capacité associée est la fonction $\operatorname{cap}^* A$ définie ci-dessus.

COROLLAIRE. - Si chaque fonction $f \in \mathcal{E}$ est quasi-continue,

$$\operatorname{cap} A = \inf_{\substack{A \subset \omega \\ \omega \text{ ouvert}}} \operatorname{cap} \omega \ .$$

Remarque. - On démohtre ce théorème dans le cas hilbertien, et plus généralement dans le cas où E est réflexif. Le corollaire est cependant valable dans le cas général.

4. Dans le cas des espaces de Dirichlet (régulier), les potentiels purs sont "engendrés" par des mesures de Radon positives, dites d'énergie finie. Dans le cadre présent, on peut, lorsque X est un espace localement compact, introduire les mesures d'énergie finie grâce à une hypothèse supplémentaire :

(3) L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $\mathcal{E}$; pour chaque compact K , il existe une fonction φ continue, à support compact, strictement positive sur K .

Si u est un potentiel pur, la forme linéaire positive $\varphi \longrightarrow (u , \dot{\varphi})$ se prolonge en mesure de Radon positive μ . Grâce à l'hypothèse de densité, μ détermine bien u , élément noté alors U^{μ} ,

$$(U^{\mu} , v) = \int \varphi \, d\mu \qquad \varphi \in v \ .$$

On démontre que cette formule est valable lorsque v est un élément quelconque et φ un représentant précisé de v . Si, de plus, l'ensemble des fonctions continues à support compact est riche, la mesure μ , construite ci-dessus, est unique (principe d'unicité des masses).

Lorsque X est un groupe localement compact et que E est invariant par translation ($u \in E$ implique $\tau_x u \in E$ et $\|\tau_x u\| = \|u\|$), on retrouve une mesure privilégiée ξ , introduite a priori dans [1]. En effet, la mesure de Haar est alors localement d'énergie finie (induit dans chaque compact une mesure d'énergie finie). Ceci est évident lorsque X est compact (et le principe d'unicité des masses est valable), car alors la mesure engendrant le potentiel d'équilibre de X est invariante par translation. Pour le cas général, G. CHOQUET a bien voulu m'indiquer une démonstration simple basée sur la régularisation par convolution.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEURLING (A.) et DENY (J.). - Dirichlet spaces, Proc. Nat. Ac. Sc. U. S. A., t. 45, 1959, p. 208-215.

On pourrait également consulter :

DENY (Jacques). - Espaces de Gauss-Poincaré et espaces de Dirichlet, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 7, 1962/63, n° 4, 2 p.

DENY (Jacques). - Théorie de la capacité dans les espaces fonctionnels, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 9, 1964/65, n° 1, 13 p.

DENY (Jacques). - Formes et espaces de Dirichlet, Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 187, 11 p.