

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

ROLAND DURIER

Travaux de Kishi sur les relations entre divers principes de théorie du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 9 (1964-1965), exp. n° 8,
p. 1-19

http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1964-1965__9__A5_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

21 janvier 1965

TRAVAUX DE KISHI
SUR LES RELATIONS ENTRE DIVERS PRINCIPES DE THÉORIE DU POTENTIEL

par Roland DURIER

Les principaux résultats obtenus par Masanori KISHI ([4] et [5]) concernent les relations entre des principes usuels de théorie du potentiel dans le cas d'un noyau non symétrique.

Le cadre général de cette étude est le suivant :

Ω est un espace localement compact dont tous les compacts sont métrisables ⁽¹⁾.
 G est une fonction définie sur $\Omega \times \Omega$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, semi-continue inférieurement, et vérifiant : $G(x, y) < +\infty$ pour $x \neq y$. Pour abrégé, on dira que G est un noyau sur Ω lorsqu'il possède ces propriétés.

On note G^* le noyau (adjoint de G) défini par $G^*(x, y) = G(y, x)$. Lorsque $G = G^*$, on dit que le noyau G est symétrique ; cette hypothèse ne sera jamais faite dans la suite.

Pour toute mesure de Radon μ , positive sur Ω , on définit le G -potentiel (resp. le G^* -potentiel) de μ par

$$G_\mu(x) = \int G(x, y) d\mu(y) \quad (\text{resp. } G^*_\mu(x) = \int G^*(x, y) d\mu(y)) .$$

L'énergie d'une telle mesure μ est le nombre (positif ou nul, fini ou non) :

$$I(\mu) = \int G_\mu(x) d\mu(x) = \int G^*_\mu(x) d\mu(x) .$$

On notera :

\mathfrak{M} : l'ensemble des mesures de Radon positives sur Ω , à support compact,

$\mathfrak{M}(K)$: l'ensemble des mesures de \mathfrak{M} à support dans le compact K ,

\mathcal{E} : l'ensemble des mesures de \mathfrak{M} d'énergie finie,

S_μ : le support d'une mesure μ de \mathfrak{M} .

On appelle ensemble exceptionnel une partie de Ω qui est de mesure nulle pour toute mesure de \mathcal{E} ; une propriété vraie en tout point du complémentaire d'un ensemble exceptionnel sera dite vraie à peu près partout (en abrégé : a. p. p.).

Noyau régulier : on dit que G est régulier (ou satisfait au principe de continuité) si, quelle que soit la mesure μ de \mathfrak{M} , la continuité de la restriction

⁽¹⁾ Cette hypothèse de dénombrabilité n'est pas indispensable. En particulier, le lemme fondamental de Kishi reste valable sans cette restriction (NAKAI [6]).

de G_μ à S_μ entraîne la continuité de G_μ sur Ω .

1. Le lemme fondamental de Kishi.

LEMME fondamental. - Soit G un noyau sur Ω dont l'adjoint G^* est régulier. Pour tout compact K non vide de Ω et pour toute fonction u finie, strictement positive, continue sur K , il existe une mesure $\tau \in \mathcal{M}(K)$ satisfaisant à :

$$G\tau(x) \geq u(x) \text{ a. p. p. p. sur } K \quad \text{et} \quad G\tau(x) \leq u(x) \text{ partout sur } S_\tau.$$

Ce résultat est bien connu lorsque le noyau est symétrique : il peut être obtenu en minimisant une intégrale de Gauss. Mais cette méthode n'est pas applicable ici. La démonstration se fait en trois étapes :

- K est un ensemble fini,
- K est quelconque et G est fini continu sur $K \times K$,
- K est quelconque et G est semi-continu inférieurement sur $K \times K$.

1° K est un ensemble fini de n points.

Le lemme fondamental peut s'énoncer sous la forme suivante :

LEMME 1. - Pour tous systèmes (a_{ij}) et (u_i) ($i, j = 1, 2, \dots, n$) de nombres strictement positifs, il existe un système t_j ($j = 1, 2, \dots, n$) de nombres positifs satisfaisant à

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \geq u_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n,$$

l'égalité ayant sûrement lieu pour tout k tel que $t_k \neq 0$.

On peut se ramener à $u_i = 1$, quel que soit i , en remplaçant a_{ij} par $\frac{a_{ij}}{u_i}$ (puisque $u_i > 0$).

En outre les conditions

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \geq 1$$

et

$$\forall k \text{ tel que } t_k \neq 0 \quad \sum_{j=1}^n a_{kj} t_j = 1,$$

équivalent à

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \geq 1 \quad \text{et} \quad \sum_i \sum_j a_{ij} t_i t_j = \sum_k t_k.$$

Le lemme 1 est donc équivalent à :

LEMME 1'. - Pour tout système (a_{ij}) ($i, j = 1, 2, \dots, n$) de nombres strictement positifs, il existe un système (t_j) ($j = 1, 2, \dots, n$) de nombres positifs satisfaisant à :

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \geq 1 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{et} \quad \sum_i \sum_j a_{ij} t_j t_i = \sum_k t_k .$$

Suivant NAKAI ([6]), nous utiliserons le théorème important suivant :

THÉORÈME du point fixe de Kakutani ([1], [3]). - Soit X un convexe compact de \mathbb{R}^n , et soit f une application de X dans l'ensemble des parties convexes non vides de X . On suppose en outre que, pour toutes suites (x_p) et (y_p) d'éléments de X telles que $y_p \in f(x_p)$, $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = x$, et $\lim_{p \rightarrow \infty} y_p = y$, on a $y \in f(x)$. Alors il existe $x \in X$ tel que $x \in f(x)$.

Considérons la forme bilinéaire φ associée à (a_{ij}) : si

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

on pose

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j .$$

On note X l'ensemble :

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \text{ (} i = 1, 2, \dots, n \text{)}\} ;$$

X est un convexe compact de \mathbb{R}^n . φ est continue sur $X \times X$; donc, pour x fixé dans X , il existe $y \in X$ tel que

$$\inf_{z \in X} \varphi(z, x) = \varphi(y, x) .$$

On pose

$$f(x) = \{y \in X ; \inf_{z \in X} \varphi(z, x) = \varphi(y, x)\} ;$$

$f(x)$ est un convexe non vide de X , et l'application f possède la propriété de "continuité" du théorème de Kakutani. Donc il existe $x \in X$ tel que $x \in f(x)$, c'est-à-dire tel que

$$(2) \quad \forall z \in X \quad \varphi(z, x) \geq \varphi(x, x) > 0 .$$

On définit $t \in \mathbb{R}^n$ par $t_i = \frac{x_i}{\varphi(x, x)}$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Vérifions que cet élément t répond aux conditions (1) du lemme 1'. On a

$$\varphi(t, t) = \frac{1}{\varphi(x, x)} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n t_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\varphi(x, x)} = \frac{1}{\varphi(x, x)} = \sum_i \sum_j a_{ij} t_j t_i .$$

En outre, $\forall z \in X, \varphi(z, t) \geq 1$. En appliquant ceci à $z = \delta_i$ (le i -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n), on obtient

$$\varphi(\delta_i, t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \geq 1 .$$

Remarque. - Si l'on désigne par x_1, x_2, \dots, x_n les n points de K et si l'on pose $G(x_i, x_j) = a_{ij}$, les formules (1) et (2) s'interprètent en termes de théorie du potentiel par rapport au noyau G sur l'ensemble fini K .

(a) Il existe une mesure τ positive telle que

$$G\tau(x) \geq 1 \quad \text{sur } K \quad \text{et} \quad I(\tau) = \int d\tau \quad (\text{masse totale de } \tau) .$$

(b) Il existe une mesure μ positive de masse 1 telle que, quelle que soit la mesure ν positive de masse 1, on ait $\int G\mu d\nu \geq I(\mu)$.

2° K est un compact (métrisable) de Ω et G est continue sur $K \times K$.

LEMME 2. - Soit G une fonction finie, continue, strictement positive sur $K \times K$, et soit u une fonction finie, continue, strictement positive sur K . Alors il existe une mesure $\tau \in \mathfrak{M}(K)$ satisfaisant à :

$$G\tau(x) \geq u(x) \quad \text{sur } K \quad \text{et} \quad G\tau(x) = u(x) \quad \text{sur } S_\tau .$$

Démonstration. - K étant métrisable, il est séparable, et il existe dans K une suite partout dense $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Posons

$$D_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} .$$

En vertu du lemme 1, quel que soit n , il existe une mesure $\tau_n \in \mathfrak{M}(D_n)$ telle que

$$G\tau_n(x) \geq u(x) \quad \text{sur } K \quad \text{et} \quad G\tau_n(x) = u(x) \quad \text{sur } S_{\tau_n} .$$

Posons :

$$\alpha = \inf_{(x,y) \in K \times K} G(x, y) > 0 \quad \text{et} \quad \beta = \sup_{x \in K} u(x) < +\infty .$$

Soit $x \in S_{\tau_n}$. On a :

$$\alpha \int d\tau_n \leq \int G(x, y) d\tau_n(y) = G_{\tau_n}(x) = u(x) \leq \beta .$$

Donc l'ensemble des masses totales des mesures positives τ_n est majoré : l'ensemble des mesures (τ_n) est relativement compact, donc il existe une sous-suite convergente, qu'on notera encore (τ_n) . Soit τ la limite de cette sous-suite. Vérifions que cette mesure τ convient.

Il est clair que la famille des fonctions G_{τ_n} est équicontinue sur K .

- Soit $x \in S_{\tau} \cap S_{\tau_n}$. Il existe une suite (x_n) telle que $x_n \in S_{\tau_n}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Grâce à la propriété d'équicontinuité des G_{τ_n} , on a

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{\tau_n}(x_n) = G_{\tau}(x) .$$

- Soit $x \in K : \forall \varepsilon > 0, \exists \omega$, voisinage de x , tel que $\forall x' \in \omega, \forall n$,

$$(3) \quad G_{\tau_n}(x) + \frac{\varepsilon}{3} > G_{\tau_n}(x') \quad (\text{équicontinuité des } G_{\tau_n}) ,$$

$$(4) \quad u(x') + \frac{\varepsilon}{3} > u(x) \quad (\text{continuité de } u) .$$

Pour n assez grand,

$$(5) \quad G_{\tau}(x) + \frac{\varepsilon}{3} > G_{\tau_n}(x) \quad (\text{convergence vague de } (\tau_n)) .$$

Enfin, D étant dense dans K , pour n assez grand, tel que $D_n \cap \omega \neq \emptyset$,

$$(6) \quad \forall x' \in D_n \cap \omega \quad G_{\mu_n}(x') \geq u(x') .$$

De (3), (4), (5), (6), on déduit, $\forall \varepsilon > 0, G_{\tau}(x) + \varepsilon > u(x)$, donc

$$G_{\tau}(x) \geq u(x) .$$

Voici un corollaire du lemme 2 que nous utiliserons dans le § 4.

COROLLAIRE. - Soit G une fonction finie, continue, strictement positive sur $K \times K$, et soit u une fonction finie, continue, strictement positive sur K . Alors il existe une mesure $\sigma \in \mathfrak{M}(K)$ satisfaisant à

$$G_{\sigma}(x) \leq u(x) \quad \text{sur } K \quad \text{et} \quad G_{\sigma}(x) = u(x) \quad \text{sur } S_{\sigma} .$$

Démonstration. - Soit M un nombre tel que $M > \max_{K \times K} G(x, y)$. Posons

$$G'(x, y) = M - G(x, y) .$$

G' est finie, continue, strictement positive sur $K \times K$. Le lemme 2 entraîne l'existence d'une mesure $\sigma' \in \mathfrak{M}(K)$ vérifiant :

$$G'\sigma'(x) \geq u(x) \quad \text{sur } K \quad \text{et} \quad G'\sigma'(x) = u(x) \quad \text{sur } S_{\sigma'},$$

c'est-à-dire

$$M \int d\sigma' - u(x) \geq G\sigma'(x) \quad \text{sur } K \quad \text{et} \quad M \int d\sigma' - 1 = G\sigma' \quad \text{sur } S_{\sigma'}.$$

La fonction $v(x) = M \int d\sigma' - u(x)$ est strictement positive sur K , et la mesure $\sigma = \frac{1}{v} \sigma'$ répond aux conditions demandées.

3° K est un compact quelconque (métrisable) de Ω et G un noyau sur Ω .

La démonstration du lemme fondamental utilise le lemme 2 et un théorème de convergence (BRELOT-CHOQUET [2]).

LEMME 3. - Soit G un noyau sur un espace compact X tel que l'adjoint G^* soit régulier. Si une suite (τ_n) de mesures positives sur X converge vaguement vers τ , alors

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} G\tau_n(x) = G\tau(x) \quad \text{a. p. p. p. dans } X.$$

La semi-continuité inférieure de G entraîne

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} G\tau_n(x) \geq G\tau(x) \quad \text{partout dans } X.$$

Supposons que l'on n'ait pas : $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} G\tau_n(x) \leq G\tau(x)$ a. p. p. p. dans X ; alors, il existe une mesure ν , de masse 1 et d'énergie finie, telle que

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} G\tau_n(x) > G\tau(x) \quad \text{sur } S_{\nu}.$$

Puisque $\int G^*\nu \, d\nu = \int G\nu \, d\nu < +\infty$, $G^*\nu$ est ν -mesurable; donc il existe un compact $K_1 \subset S_{\nu}$ tel que la restriction à K_1 de $G^*\nu$ soit finie continue. Appelons ν_1 la restriction de ν à K_1 . La restriction à S_{ν_1} de $G^*\nu_1$ est continue; grâce à la régularité de G^* , $G^*\nu_1$ est continue sur X . D'où

$$\begin{aligned} \int G\tau \, d\nu_1 &< \int \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} G\tau_n \, d\nu_1 \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int G\tau_n \, d\nu_1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int G^*\nu_1 \, d\tau_n = \int G^*\nu_1 \, d\tau = \int G\tau \, d\nu_1. \end{aligned}$$

La contradiction mise en évidence prouve qu'on a

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} G\tau_n(x) \leq G\tau(x) \quad \text{a. p. p. p. dans } X.$$

Démonstration du lemme fondamental. - G étant semi-continu inférieurement sur $K \times K$, compact métrisable, il existe une suite croissante G_n de noyaux finis, continus, strictement positifs sur $K \times K$, tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x, y) = G(x, y)$.

En vertu du lemme 2 :

$$\forall n, \exists \tau_n \in \mathfrak{M}(K) : \begin{aligned} G_n \tau_n(x) &\geq u(x) \quad \text{sur } K, \\ G_n \tau_n(x) &= u(x) \quad \text{sur } S_{\tau_n}. \end{aligned}$$

La suite des mesures (τ_n) est bornée, donc relativement compacte. Il existe une sous-suite, qu'on notera encore (τ_n) , convergeant vers une mesure τ .

Vérifions que cette mesure τ convient.

En appliquant le lemme 3 :

$$G\tau(x) = \underline{\lim} G\tau_n(x) \geq \underline{\lim} G_n \tau_n(x) \geq u(x) \quad \text{a. p. p. p. sur } K.$$

D'autre part, soit $x \in S_\tau$ et soit (x_n) une suite : $x_n \in K$ telle que

$$x_n \in S_{\tau_n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Quel que soit n_0 fixé, on a

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n \tau_n(x_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} G_{n_0} \tau_n(x_n) = G_{n_0} \tau(x)$$

(la suite G_n est croissante, G_{n_0} est continu, et τ_n converge vaguement vers τ).

En faisant tendre n_0 vers $+\infty$, on trouve

$$\forall x \in S_\tau, \quad u(x) \geq G\tau(x).$$

2. Principes de domination et de balayage.

1° Afin d'obtenir des relations entre les principes de domination et de balayage, on énonce un théorème faisant intervenir des principes un peu plus généraux.

Soit u une fonction définie sur Ω , strictement positive, semi-continue inférieurement et non identique à $+\infty$, et soit v une fonction quelconque sur Ω , non identique à $+\infty$, et vérifiant $u \leq v$. Considérons les propositions :

(a) $\forall K$ compact de Ω , $\exists \mu \in \mathfrak{M}(K)$ vérifiant

$$G_\mu(x) \geq u(x) \quad \text{a. p. p. p. sur } K \quad \text{et} \quad G_\mu(x) \leq v(x) \quad \text{partout sur } \Omega.$$

(b) $\forall \mu \in \mathfrak{E} \quad (G_\mu(x) \leq u(x) \quad \text{sur } S_\mu) \implies (G_\mu(x) \leq v(x) \quad \text{sur } \Omega).$

THÉORÈME 1.

- Si G est régulier, alors (a) \implies (b) .
- Si G^* est régulier, alors (b) \implies (a) .

Définitions. - u et v étant données, on dira que G satisfait au principe de l'équilibre (resp. du maximum) relativement à (u, v) si G vérifie la proposition (a) (resp. (b)).

Du théorème 1, on déduit que, si G et G^* sont réguliers, alors il y a équivalence entre les principes de l'équilibre et du maximum relativement à (u, v) .

Démonstration du théorème 1.

(α) On suppose G régulier et satisfaisant au principe d'équilibre relativement à (u, v) . On donne $\mu \in \mathfrak{E}$ vérifiant $G_\mu(x) \leq u(x)$ sur S_μ . Soit $x_0 \notin S_\mu$: on veut prouver que $G_\mu(x_0) \leq v(x_0)$.

En notant ε_{x_0} la mesure ponctuelle en x_0 , de masse 1 , on peut écrire :

$$G_\mu(x_0) = \int G_\mu(y) d\varepsilon_{x_0}(y) = \int G^*_{\varepsilon_{x_0}}(y) d\mu(y) .$$

$G^*_{\varepsilon_{x_0}}$ est une fonction semi-continue inférieurement sur le compact métrisable S_μ . Il existe donc une suite croissante (f_n) de fonctions continues sur S_μ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = G^*_{\varepsilon_{x_0}}(x) \quad \text{sur } S_\mu .$$

Appliquons le lemme fondamental au noyau G^* , au compact S_μ , et à f_n .

$\forall n, \exists \tau_n \in \mathfrak{M}(S_\mu)$: $G_{\tau_n}(x) \geq f_n(x)$ a.p.p.p. sur S_μ et $G_{\tau_n}(x) \leq f_n(x)$ sur S_{τ_n} , alors,

$$\int G^*_{\varepsilon_{x_0}} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int G^*_{\tau_n} d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int G_\mu d\tau_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int u d\tau_n .$$

Notons ν_n la mesure d'équilibre sur S_{τ_n} relativement à (u, v) .

$$\begin{aligned} \int u d\tau_n &\leq \int G_{\nu_n} d\tau_n = \int G^*_{\tau_n} d\nu_n \leq \int f_n d\nu_n \leq \int G^*_{\varepsilon_{x_0}} d\nu_n \\ &= \int G_{\nu_n} d\varepsilon_{x_0} \leq \int v d\varepsilon_{x_0} = v(x_0) . \end{aligned}$$

Donc, $G_\mu(x_0) \leq v(x_0)$.

(β) On suppose G^* régulier et satisfaisant au principe du maximum relativement à (u, v) . Soit K un compact de Ω .

Il existe une suite croissante (u_n) de fonctions continues sur K telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x)$ sur K . Appliquons le lemme fondamental au noyau G , au compact K , et à la fonction f_n :

$$\forall n, \exists u_n \in \mathcal{M}(K) : G_{\mu_n}(x) \geq u_n(x) \text{ a.p.p.p. sur } K \text{ et } G_{\mu_n} \leq u_n \text{ sur } S_{\mu_n};$$

μ_n est d'énergie finie, car $G_{\mu_n}(x) \leq u_n(x)$ sur S_{μ_n} . On a $G_{\mu_n} \leq u$ sur S_{μ_n} , donc, par le principe du maximum, $G_{\mu_n}(x) \leq v(x)$ partout sur Ω . Soit x_1 tel que $v(x_1) < +\infty$ et $\alpha = \inf_{K \times K} G(x, y) > 0$. On a

$$\alpha \int d\mu_n \leq \int G(x_1, y) d\mu_n(y) = G_{\mu_n}(x_1) \leq v(x_1) < +\infty.$$

L'ensemble des mesures (μ_n) est relativement compact : il existe une sous-suite, qu'on note encore (μ_n) , qui converge vers une mesure μ . On a

$$G_{\mu}(x) \leq \underline{\lim} G_{\mu_n}(x) \leq v(x) \text{ sur } \Omega,$$

et, grâce au théorème de convergence (lemme 3),

$$G_{\mu}(x) = \underline{\lim} G_{\mu_n}(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) \text{ a.p.p.p. sur } K.$$

La mesure μ est bien la mesure d'équilibre sur K relativement à (u, v) .

Remarques.

- Lorsque $u = v = 1$, les principes d'équilibre et de maximum relativement à (u, v) sont les principes d'équilibre et du maximum classiques. On peut énoncer sommairement :

(i) Si G est régulier, alors l'équilibre entraîne le maximum.

(ii) Si G^* est régulier, alors le maximum entraîne l'équilibre.

- Pour $u = 1$ et $v = k$, constante ≥ 1 , le principe du maximum relativement à (u, v) est le principe du maximum k -dilaté. Le théorème 1 permet de lier ce principe du maximum k -dilaté à un principe d'équilibre.

2° On aborde maintenant les principes usuels de domination et de balayage sous la forme suivante :

DEFINITION 1. - On dit que G satisfait au principe de domination si

$$\forall \mu \in \mathcal{E}, \forall v \in \mathcal{M} : (G_{\mu}(x) \leq G_v(x) \text{ sur } S_{\mu}) \implies (G_{\mu}(x) \leq G_v(x) \text{ sur } \Omega).$$

DÉFINITION 2. - On dit que G satisfait au principe de domination élémentaire si $\forall \mu \in \mathcal{E}, \forall x_0 \notin S_\mu, \forall a > 0: (G_\mu(x) \leq a G_{\varepsilon_{x_0}}(x) \text{ sur } S_\mu) \implies (G_\mu(x) \leq a G_{\varepsilon_{x_0}}(x) \text{ sur } \Omega)$.

DÉFINITION 3. - On dit que G satisfait au principe du balayage si :

\forall compact K de $\Omega, \forall \mu \in \mathcal{M}, \exists \mu' \in \mathcal{M}(K)$ vérifiant :

$$G_{\mu'}(x) \leq G_\mu(x) \text{ sur } \Omega \quad \text{et} \quad G_{\mu'}(x) \geq G_\mu(x) \text{ a. p. p. p. sur } K .$$

DÉFINITION 4. - On dit que G satisfait au principe du balayage élémentaire si :

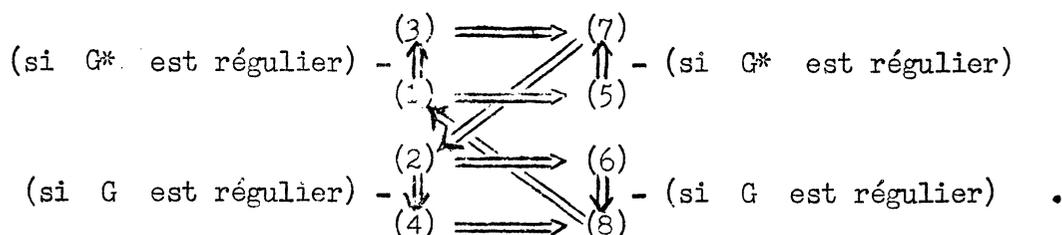
\forall compact K de $\Omega, \forall x_0 \notin K, \exists \mu' \in \mathcal{M}(K)$ vérifiant :

$$G_{\mu'}(x) \leq G_{\varepsilon_{x_0}}(x) \text{ sur } \Omega \quad \text{et} \quad G_{\mu'}(x) \geq G_\mu(x) \text{ a. p. p. p. sur } K .$$

THÉORÈME 2. - Si G et G^* sont des noyaux réguliers, alors les 8 propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) G satisfait au principe de domination.
- (2) G^* satisfait au principe de domination.
- (3) G satisfait au principe du balayage.
- (4) G^* satisfait au principe du balayage.
- (5) G satisfait au principe de domination élémentaire.
- (6) G^* satisfait au principe de domination élémentaire.
- (7) G satisfait au principe du balayage élémentaire.
- (8) G^* satisfait au principe du balayage élémentaire.

Le schéma de la démonstration est le suivant :



Démonstration.

a. Il est trivial que (1) \implies (5), (2) \implies (6), (3) \implies (7), et (4) \implies (8) .

b. Si G^* est régulier, alors (1) \implies (3) (et (5) \implies (7)) .

Les données sont un compact K de Ω et une mesure $\mu \in \mathcal{M}(K)$ (ponctuelle ou non). L'hypothèse est, dans les deux cas envisagés, que G satisfait au principe du maximum relativement à (G_μ, G_μ) . Donc, en vertu du théorème 1, G satisfait

au principe d'équilibre relativement à (G_μ, G_μ) , c'est-à-dire au principe du balayage (élémentaire ou non). De façon duale, si G est régulier, alors (2) \Rightarrow (4) et (6) \Rightarrow (8).

c. Sans hypothèse de régularité sur G et sur G^* , alors (7) \Rightarrow (2) (et (8) \Rightarrow (1)).

Démontrons que (7) \Rightarrow (2). Les données sont : $\mu \in \mathcal{E}$ et $\nu \in \mathcal{M}$ telles que $G^*\mu \leq G^*\nu$ sur S_μ . Soit $x_0 \notin S_\mu$: on veut démontrer que $G^*\mu(x_0) \leq G^*\nu(x_0)$. Appelons λ la balayée pour G de ε_{x_0} sur S_μ : on a

$$\lambda \in \mathcal{M}(S_\mu) \quad G\lambda(x) \leq G\varepsilon_{x_0}(x) \text{ sur } \Omega \text{ et } G\lambda(x) \geq G\varepsilon_{x_0}(x) \text{ a. p. p. p. sur } S_\mu.$$

Comme $\mu \in \mathcal{E}$, on a $\int G\lambda \, d\mu = \int G\varepsilon_{x_0} \, d\mu$, et par conséquent

$$\begin{aligned} G^*\mu(x_0) &= \int G^*\mu \, d\varepsilon_{x_0} = \int G\varepsilon_{x_0} \, d\mu = \int G\lambda \, d\mu = \int G^*\mu \, d\lambda \\ &\leq \int G^*\nu \, d\lambda = \int G\lambda \, d\nu \leq \int G\varepsilon_{x_0} \, d\nu = \int G^*\nu \, d\varepsilon_{x_0} = G^*\nu(x_0). \end{aligned}$$

Remarque. - L'hypothèse : G régulier (resp. G^* régulier), n'intervient que pour : (2) \Rightarrow (4) et (6) \Rightarrow (8) (resp. (1) \Rightarrow (3) et (5) \Rightarrow (7)).

3. Principe complet et principe fort du maximum.

DÉFINITION 5. - On dit que G satisfait au principe complet du maximum si :

$$\forall \mu \in \mathcal{E}, \forall \nu \in \mathcal{M}, \forall a \geq 0 \quad (G_\mu(x) \leq G_\nu(x) + a \text{ sur } S_\mu) \Rightarrow (G_\mu(x) \leq G_\nu(x) + a \text{ sur } \Omega).$$

DÉFINITION 6. - On dit que G satisfait au principe fort du maximum si :

$$\forall \mu \in \mathcal{E}, \forall \nu \in \mathcal{M}, \forall a \geq 0 \quad (G_\mu(x) \leq G_\nu(x) + a \text{ sur } S_\mu \cup S_\nu) \Rightarrow (G_\mu(x) \leq G_\nu(x) + a \text{ sur } \Omega).$$

THÉOREME 3. - Si G et G^* sont réguliers, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) G satisfait au principe complet du maximum.
- (2) G satisfait au principe fort du maximum.
- (3) G satisfait simultanément au principe de domination et au principe classique du maximum.

Démonstration.

1° Il est clair que (1) \Rightarrow (2).

Le principe complet du maximum, appliqué avec $a = 0$, donne le principe de domination et, avec $a = 1$ et $\nu = 0$, donne le principe classique du maximum.

Donc (1) \implies (3) .

2° Montrons que (3) \implies (1) .

Soient $\mu \in \mathcal{E}$, $\nu \in \mathcal{M}$, et $a \geq 0$ tels que $G_\mu(x) \leq G_\nu(x) + a$ sur S_μ . Soit $x_0 \notin S_\mu$. On étudie la quantité $G_\mu(x_0) = \int G_\mu d\varepsilon_{x_0} = \int G^*_{\varepsilon_{x_0}} d\mu$.

G satisfait au principe de domination, donc en vertu du théorème 2, G^* satisfait au principe du balayage élémentaire. Soit μ' la mesure balayée pour G^* de ε_{x_0} sur le compact S_μ . On montre d'abord que

$$\int d\mu' = 1 .$$

Pour cela, G , satisfaisant au principe classique du maximum, satisfait (en vertu du théorème 1, remarque 1) au principe classique de l'équilibre. Soit λ la mesure d'équilibre pour G sur S_μ . On a

$$\int d\mu' = \int G\lambda d\mu' = \int G^*_{\mu'} d\lambda \leq \int G^*_{\varepsilon_{x_0}} d\lambda = \int G\lambda d\varepsilon_{x_0} \leq \int d\varepsilon_{x_0} = 1 .$$

La première égalité résulte de ce que μ' est d'énergie finie : en effet, comme $x_0 \notin S_\mu$, $G_{\varepsilon_{x_0}}(x) = G(x, x_0)$ est borné sur S_μ et

$$I(\mu') = \int G_{\mu'} d\mu' \leq \int G_{\varepsilon_{x_0}} d\mu' < +\infty .$$

On déduit maintenant, comme $\mu \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} G_\mu(x_0) &= \int G^*_{\varepsilon_{x_0}} d\mu = \int G^*_{\mu'} d\mu = \int G_\mu d\mu' \leq \int G_\nu d\mu' + a \int d\mu' \\ &\leq \int G^*_{\varepsilon_{x_0}} d\nu + a = G_\nu(x_0) + a . \end{aligned}$$

3° Montrons que (2) \implies (3) .

Le principe fort du maximum, appliqué avec $a = 1$ et $\nu = 0$, donne le principe classique du maximum. Il suffit de vérifier, en vertu du théorème 2, qu'il entraîne aussi le principe de domination élémentaire.

Soient $\mu \in \mathcal{E}$ et $x_0 \notin S_\mu$, tels que $G_\mu(x) \leq G_{\varepsilon_{x_0}}(x)$ sur S_μ . En vertu du principe fort, il suffit de vérifier que $G_\mu(x_0) \leq G_{\varepsilon_{x_0}}(x_0)$ pour que l'inégalité $G_\mu(x) \leq G_{\varepsilon_{x_0}}(x)$ ait lieu partout.

On peut supposer que $G(x_0, x_0) < +\infty$, sinon la vérification est faite. La mesure ε_{x_0} est d'énergie finie et, par le principe du maximum, on a

$$G_{\varepsilon_{x_0}}(x) \leq G(x_0, x_0) \text{ sur } \Omega .$$

Donc, sur S_μ , on a $G_\mu(x) \leq G(x_0, x_0)$. La même inégalité a lieu partout, en

vertu du principe du maximum à nouveau, donc en particulier en x_0 . Donc,

$$G_\mu(x_0) \leq G_{\varepsilon_{x_0}}(x_0) = G(x_0, x_0) .$$

Remarque. - Le théorème 1 permet d'établir, si G et G^* sont réguliers, une équivalence entre le principe complet du maximum et un principe convenable de balayage (qu'on appellera principe complet du balayage).

4. Le principe de domination faible.

DEFINITIONS 7. - On envisage la proposition suivante :

$$\forall \mu \in \mathcal{E}, \forall \nu \in \mathcal{K} \quad (G_\mu(x) \leq G_\nu(x) \text{ sur } A \subset \Omega) \implies (G_\mu(x) \leq G_\nu(x) \text{ sur } \Omega) .$$

On dit que G satisfait au principe de domination faible si $A = S_\mu \cup S_\nu$, ordinaire si $A = S_\mu$ (cf. définition 3), et inverse si $A = S_\nu \neq \emptyset$.

Il est clair que si G satisfait au principe de domination ordinaire ou inverse, alors il satisfait au principe de domination faible. Le résultat de ce paragraphe concerne la réciproque.

Appelons noyau continu un noyau (au sens de l'introduction) tel que l'application de $\Omega \times \Omega$ dans $]0, +\infty)$: $(x, y) \rightarrow G(x, y)$ soit continue.

THÉORÈME 4. - Soit G un noyau continu dont l'adjoint G^* est régulier. Si G satisfait au principe de domination faible, alors il satisfait au principe de domination ordinaire ou inverse.

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, voici une proposition utile :

PROPOSITION 1. - Si le noyau G continu satisfait au principe de domination faible, alors il est régulier (OHTSUKA-KISHI).

Démonstration. - Soit $\mu \in \mathcal{K}$ tel que la restriction de G_μ à S_μ soit continue. G_μ est une fonction continue sur le complémentaire de S_μ (car la fonction $(x, y) \rightarrow G(x, y)$ est continue pour $x \neq y$).

Examinons la continuité de G_μ au point x_0 de S_μ . Si $G(x_0, x_0) < +\infty$, G_μ est continu en x_0 .

Supposons au contraire que $G(x_0, x_0) = +\infty$. $G_\mu(x_0)$ est fini, donc μ ne charge pas x_0 . Soit K un voisinage compact de x_0 , et soit (ω_n) une suite de voisinages ouverts de x_0 telle que $\bigcap_n \omega_n = \{x_0\}$ et $\omega_{n+1} \subset \omega_n \subset K$ (K est dénombrable). Appelons μ_n la restriction de μ à ω_n ; la suite de fonctions

numériques G_{μ_n} est décroissante et tend vers 0 en tout point de S_μ (car μ ne charge pas x_0). D'après le théorème de Dini, cette suite converge uniformément vers 0 sur S_μ , donc :

$$\forall \alpha > 0, \exists \omega_\alpha \text{ (voisinage ouvert de } x_0 \text{)} \text{ tel que } G_{\mu_\alpha} \leq \alpha \text{ sur } S_\mu,$$

où μ_α désigne la restriction de μ à ω_α .

Soit $x_1 \in K \cap \mathring{C} S_\mu$. Posons : $a = \inf_{K \times K} G(x, y)$. On a :

$$\forall x \in K \quad G_{\varepsilon_{x_1}}(x) = G(x, x_1) > a > 0,$$

et par suite

$$\forall x \in \omega_\alpha \cap S_\mu = S_{\mu_\alpha} \quad G_{\mu_\alpha}(x) \leq \alpha \frac{G_{\varepsilon_{x_1}}(x)}{a}.$$

Si $G(x_1, x_1) = +\infty$, cette inégalité a lieu aussi en x_1 .

Si $G(x_1, x_1) < +\infty$, on pose :

$$M(\alpha) = \max\left(\frac{G_{\mu_\alpha}(x_1)}{G(x_1, x_1)}, \frac{\alpha}{a}\right);$$

on a alors

$$G_{\mu_\alpha}(x) \leq M(\alpha) G_{\varepsilon_{x_1}}(x) \text{ sur } S_{\mu_\alpha} \cup \{x_1\}.$$

D'après le principe de domination faible, la même inégalité a lieu partout. On observe enfin que $M(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers 0. Ceci entraîne bien la continuité de $G_\mu = G_{\mu_\alpha} + G(\mu - \mu_\alpha)$ en x_0 .

La démonstration du théorème 4 nécessite plusieurs lemmes. Nous utiliserons la notation suivante :

$$\Gamma(x, y) = \Gamma(y, x) = G(x, x) G(y, y) - G(x, y) G(y, x) \quad \text{pour } x \neq y.$$

LEMME 1. - Soit G un noyau sur l'ensemble à trois points $\{x_1, x_2, x_3\}$. On pose :

$$g_{ij} = G(x_i, x_j) \quad \text{et, pour } i \neq j, \quad \gamma_{ij} = \Gamma(x_i, x_j).$$

Si G satisfait au principe de domination faible, alors parmi les 3 nombres γ_{ij} ,

- (a) ou bien deux sont > 0 et le troisième ≥ 0 ,
- (b) ou bien deux sont < 0 et le troisième ≤ 0 ,
- (c) ou bien les trois sont nuls.

Remarque. - C'est toujours l'éventualité (a) qui se produit lorsque G n'est pas fini (en un point (x, x)).

1er cas. - $g_{ii} < +\infty$ pour $i = 1, 2, 3$.

(α) On établit d'abord, i, j, k étant différents, que

$$(*) \quad \gamma_{ij} \geq 0 \implies \frac{g_{ii}}{g_{ij}} \geq \frac{g_{ki}}{g_{kj}} \geq \frac{g_{ji}}{g_{jj}} ,$$

$$(**) \quad \gamma_{ij} \leq 0 \implies \frac{g_{ii}}{g_{ij}} \leq \frac{g_{ki}}{g_{kj}} \leq \frac{g_{ji}}{g_{jj}} ,$$

$$(***) \quad \gamma_{ij} = 0 \implies \frac{g_{ii}}{g_{ij}} = \frac{g_{ki}}{g_{kj}} = \frac{g_{ji}}{g_{jj}} .$$

Démontrons (*): les potentiels des deux mesures ε_i et $\nu_j = \frac{g_{ii}}{g_{ij}} \varepsilon_j$ vérifient

$$G\varepsilon_i(x_i) = G\nu_j(x_i)$$

et

$$G\varepsilon_i(x_j) \leq G\nu_j(x_j) ;$$

grâce au principe de domination faible, on a

$$G\varepsilon_i(x_k) \leq G\nu_j(x_k) \quad \text{c'est-à-dire} \quad g_{ki} \leq \frac{g_{ii}}{g_{ij}} g_{kj} .$$

En permutant i et j , on trouve une deuxième inégalité, d'où (*).

(**) se démontre de la même façon, et (***) est conséquence de (*) et (**).

(β) On établit ensuite que

$$\gamma_{12} > 0 \implies \gamma_{13} \geq 0 \text{ et } \gamma_{23} \geq 0 ,$$

γ_{13} et γ_{23} non nuls tous deux.

Pour cela, on montre en utilisant (*) et (**) l'impossibilité des propositions :

$$\gamma_{12} > 0 , \quad \gamma_{23} \leq 0 \text{ et } \gamma_{13} \leq 0 ,$$

et

$$\gamma_{12} > 0 , \quad \gamma_{23} < 0 \text{ et } \gamma_{13} \geq 0 .$$

On établit de même que

$$\gamma_{12} < 0 \implies \gamma_{13} \leq 0 \text{ et } \gamma_{23} \leq 0 ,$$

γ_{13} et γ_{23} non nuls tous deux ; et enfin

$$\gamma_{12} = 0 \implies \begin{cases} \text{ou } \gamma_{23} > 0 \text{ et } \gamma_{13} > 0 , \\ \text{ou } \gamma_{23} < 0 \text{ et } \gamma_{13} < 0 , \\ \text{ou } \gamma_{23} = \gamma_{13} = 0 . \end{cases}$$

Les implications ci-dessus démontrent bien le lemme 1 dans le cas où $g_{ii} < +\infty$ ($i = 1, 2, 3$).

2ème cas. - Supposons $g_{11} = +\infty$.

Si $g_{22} = +\infty$ ou $g_{33} = +\infty$, alors les trois nombres γ_{12} , γ_{23} , et γ_{13} sont > 0 .

Si $g_{22} < +\infty$ et $g_{33} < +\infty$, alors $\gamma_{12} > 0$ et $\gamma_{13} > 0$.

Par un raisonnement analogue à celui qui conduit à la formule (*), on a

$$\gamma_{12} > 0 \implies \frac{g_{31}}{g_{32}} \geq \frac{g_{21}}{g_{22}} \quad \text{et} \quad \gamma_{13} > 0 \implies \frac{g_{21}}{g_{23}} \geq \frac{g_{31}}{g_{33}} ,$$

d'où

$$\frac{g_{23}}{g_{33}} \leq \frac{g_{21}}{g_{31}} \leq \frac{g_{22}}{g_{32}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \gamma_{23} \geq 0 .$$

LEMME 2. - Soit G un noyau satisfaisant au principe de domination faible, alors

- (a) ou bien $\Gamma(x, y) \geq 0$ et $\Gamma(x, y)$ non identiquement nul,
- (b) ou bien $\Gamma(x, y) \leq 0$ et $\Gamma(x, y)$ non identiquement nul,
- (c) ou bien $\Gamma(x, y) \equiv 0$.

Remarque. - Dans (a) et (b), on peut même affirmer que, pour tout ensemble de trois points distincts de Ω , deux des trois nombres $\Gamma(x, y)$, $\Gamma(y, z)$, et $\Gamma(z, x)$ sont différents de 0.

Supposons Γ non identiquement nul ; on a deux cas à considérer : Il existe deux points distincts x_1 et x_2 tels que,

- ou bien $\Gamma(x_1, x_2) > 0$,
- ou bien $\Gamma(x_1, x_2) < 0$.

Si $\Gamma(x_1, x_2) > 0$, le lemme 1 exprime que $\Gamma(x, x_1) \geq 0$ et $\Gamma(x, x_2) \geq 0$, quel que soit x , et l'un au moins est non nul. Supposons $\Gamma(x, x_1) > 0$; alors, quel que soit y , $\Gamma(x, y) \geq 0$.

De même, $\Gamma(x_1, x_2) < 0$ entraîne $\Gamma(x, y) \leq 0$.

DÉFINITION 8. - On dit que G satisfait au principe ordinaire (resp. inverse) de domination "très élémentaire" si :

$\forall x_1 \in \Omega, \forall x_2 \in \Omega, \forall a > 0 \quad G_{\varepsilon_{x_1}}(x_1) \leq a G_{\varepsilon_{x_2}}(x_1)$ (resp. $G_{\varepsilon_{x_1}}(x_2) \leq a G_{\varepsilon_{x_2}}(x_2)$)
entraîne l'inégalité : $G_{\varepsilon_{x_1}}(x) \leq a G_{\varepsilon_{x_2}}(x)$ partout sur Ω .

LEMME 3. - Soit G un noyau satisfaisant au principe de domination faible. Si $\Gamma(x, y) \geq 0$ (resp. $\Gamma(x, y) \leq 0$) et $\Gamma(x, y) \neq 0$, alors G satisfait au principe ordinaire (resp. inverse) de domination "très élémentaire".

Supposons $\Gamma(x, y) \geq 0$. Considérons $x_1 \in \Omega, x_2 \in \Omega$, et $a > 0$, tels que

$$G_{\varepsilon_{x_1}}(x_1) \leq a G_{\varepsilon_{x_2}}(x_1) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{G(x_1, x_1)}{G(x_2, x_2)} \leq a \quad (\text{d'où } G(x_1, x_1) < +\infty).$$

$$\Gamma(x_1, x_2) \geq 0 \quad \text{entraîne} \quad G_{\varepsilon_{x_1}}(x_2) \leq \frac{G(x_1, x_1)}{G(x_1, x_2)} G_{\varepsilon_{x_2}}(x_2) \leq a G_{\varepsilon_{x_2}}(x_2).$$

Comme $G(x_1, x_1) < +\infty$, ε_{x_1} est une mesure d'énergie finie et le principe de domination faible entraîne $G_{\varepsilon_{x_1}}(x) \leq a G_{\varepsilon_{x_2}}(x)$ sur Ω .

On ferait un raisonnement analogue pour $\Gamma(x, y) \leq 0$.

Remarque. - Soit G un noyau satisfaisant au principe de domination faible. Si $\Gamma(x, y) \equiv 0$, alors G est fini sur $\Omega \times \Omega$ et

$$\forall \mu \in \mathcal{M}, \forall x_0 \in \Omega \quad G_{\mu}(x) = \frac{G_{\mu}(x_0)}{G(x_0, x_0)} G_{\varepsilon_{x_0}}(x) \quad \text{partout sur } \Omega$$

(ceci se déduit aisément des relations (***) du lemme 1).

G vérifie alors la propriété suivante :

$$\forall \mu \in \mathcal{M}, \forall \nu \in \mathcal{M}, \text{ s'il existe } x_1 \in \Omega \text{ tel que } G_{\mu}(x_1) \leq G_{\nu}(x_1), \\ \text{alors } G_{\mu}(x) \leq G_{\nu}(x) \text{ partout sur } \Omega,$$

ce qui est une propriété plus forte que n'importe quel principe de domination.

LEMME 4. - Soit G un noyau continu dont l'adjoint G^* est régulier et satisfaisant au principe de domination "très élémentaire". Alors, $\forall K$ (compact de Ω), $\forall x_0 \notin K, \exists \tau \in \mathcal{M}(K)$ vérifiant :

$$G_{\tau}(x) \geq G_{\varepsilon_{x_0}}(x) \quad \text{a. p. p. p. sur } K,$$

$$G_{\tau}(x) \leq G_{\varepsilon_{x_0}}(x) \quad \text{sur } S_{\tau} \cup \{x_0\}.$$

En effet, $G_{\varepsilon_{x_0}}$ est une fonction continue sur K puisque $x_0 \notin K$. Le lemme fondamental de Kishi affirme l'existence d'une mesure $\tau \in \mathcal{M}(K)$ vérifiant :

$$G\tau(x) \geq G_{\varepsilon_{x_0}}(x) \quad \text{a. p. p. p. sur } K \quad \text{et} \quad G\tau(x) \leq G_{\varepsilon_{x_0}}(x) \quad \text{sur } S_\tau.$$

Si $G(x_0, x_0) = +\infty$, cette mesure répond évidemment aux conditions du lemme.

Supposons $G(x_0, x_0) < +\infty$. Par le principe de domination "très élémentaire", on a :

$$\forall x \in K \quad G_{\varepsilon_{x_0}}(z) \leq \frac{G(x_0, x_0)}{G(x_0, x)} G_{\varepsilon_x}(z) \quad \text{sur } \Omega,$$

d'où

$$G\tau(x_0) = \int G(x_0, x) d\tau(x) \leq \int \frac{G(x_0, x_0)}{G(z, x_0)} G(z, x) d\tau(x) = \frac{G(x_0, x_0)}{G(z, x_0)} G\tau(z).$$

Prenons $z \in S_\tau$. Alors,

$$G\tau(x_0) = \frac{G(x_0, x_0)}{G(z, x_0)} G\tau(z) \leq \frac{G(x_0, x_0)}{G(z, x)} G_{\varepsilon_{x_0}}(z) = G(x_0, x_0).$$

Dans tous les cas, la mesure τ convient, et τ est d'énergie finie puisque $G_{\varepsilon_{x_0}}$ est finie continue sur K .

LEMME 4'. - Soit G un noyau continu fini satisfaisant au principe inverse de domination "très élémentaire". Alors,

$\forall K$ (compact de Ω), $\forall x_0 \notin K$, $\exists \sigma \in \mathcal{M}(K)$ vérifiant :

$$G\sigma(x) \leq G_{\varepsilon_{x_0}}(x) \quad \text{sur } K,$$

$$G\sigma(x) \geq G_{\varepsilon_{x_0}}(x) \quad \text{sur } S_\sigma \cup \{x_0\}.$$

Ceci résulte du corollaire du lemme 2, paragraphe 1.

LEMME 5. - Soit G un noyau continu sur Ω dont l'adjoint G^* est régulier. Si G satisfait au principe de domination faible et au principe ordinaire de domination "très élémentaire", alors G satisfait au principe de domination ordinaire.

On sait déjà (proposition 1) que G est régulier. Montrons que G^* satisfait au principe ordinaire de domination, ce qui suffit d'après le théorème 2.

Soient $\mu \in \mathcal{E}$ et $\nu \in \mathcal{M}$ vérifiant $G^*\mu(x) \leq G^*\nu(x)$ sur S_μ . Soit $x_0 \notin S_\mu$: il faut vérifier que $G^*\mu(x_0) \leq G^*\nu(x_0)$. Considérons la mesure τ relative au compact S_μ mise en évidence dans le lemme 4 : τ est d'énergie finie et vérifie :

$G_T(x) \leq G_{\varepsilon_{x_0}}(x)$ sur $S_T \cup \{x_0\}$, donc partout, grâce au principe de domination faible. En outre, $G_T(x) \geq G_{\varepsilon_{x_0}}(x)$ a. p. p. p. sur S_μ , d'où, puisque $\mu \in \mathcal{E}$,

$$\int G_T(x) d\mu(x) = \int G_{\varepsilon_{x_0}}(x) d\mu(x).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} G^*\mu(x_0) &= \int G_{\varepsilon_{x_0}} d\mu = \int G_T d\mu = \int G^*\mu d\tau \leq \int G^*\nu d\tau \\ &= \int G_T d\nu \leq \int G_{\varepsilon_{x_0}} d\nu = G^*\nu(x_0). \end{aligned}$$

LEMME 5'. - Soit G un noyau fini continu sur Ω . Si G satisfait au principe de domination faible et au principe inverse de domination "très élémentaire", alors il satisfait au principe de domination inverse.

En utilisant le lemme 4', on montre que G^* satisfait au principe de domination inverse. Un énoncé analogue au théorème 2 (utilisant le corollaire du lemme 2, paragraphe 1) permet de déduire que G satisfait au principe de domination inverse.

Démonstration du théorème 4. - C'est une conséquence facile des lemmes précédents. On observera que, si G n'est pas fini, la conclusion du théorème 4 est : " G satisfait au principe de domination ordinaire". Enfin, l'énoncé donné ici ne contient plus une restriction utilisée par M. KISHI : le noyau G est "non dégénéré", c'est-à-dire, il n'existe aucun couple x_1, x_2 de points de Ω tels que les fonctions $x \rightarrow G(x, x_1)$ et $x \rightarrow G(x, x_2)$ soient proportionnelles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGE (Claude). - Espaces topologiques. Fonctions multivoques. - Paris, Dunod, 1959 (Collection universitaire de Mathématiques, 3).
- [2] BRELOT (M.) et CHOQUET (G.). - Le théorème de convergence en théorie du potentiel, J. Madras Univ., Series B, t. 27, 1957, p. 277-286.
- [3] KAKUTANI (S.). - A generalisation of Brouwer's fixed point theorem, Duke math. J., t. 8, 1941, p. 457-459.
- [4] KISHI (Masanori). - Maximum principles in the potential theory, Nagoya math. J., t. 23, 1963, p. 165-187.
- [5] KISHI (Masanori). - Weak domination principles, J. Sc. Hiroshima Univ., Section A1, t. 28, 1964, p. 1-17.
- [6] NAKAI (M.). - On the fundamental existence theorem of Kishi, Nagoya math. J., t. 23, 1963, p. 189-198.