Heinz Bauer

Cônes convexes semi-réticulés de fonctions continues. Théorèmes de représentation et de stabilité

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 8 (1963-1964), exp. n° 5, p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1963-1964__8__A3_0>

CÔNES CONVEXES SEMI-RÉTICULÉS DE FONCTIONS CONTINUES. THÉORÈMES DE REPRÉSENTATION ET DE STABILITÉ

par Heinz BAUER

Soit $\mathcal{C}(X)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur un espace topologique séparé X. L'espace $\mathcal{C}(X)$ sera muni de la topologie de la convergence compacte.

On considère une famille $\mathfrak{F}_1 = ((\sigma_i , x_i))_{i \in I}$ de couples (σ_i , x_i), où σ_i est une mesure $\geqslant 0$ portée par un compact de X et où x_i est un point de X tel que $\sigma_i(\{x_i\}) = 0$. Considérons aussi une famille $\mathfrak{F}_2 = (\tau_j)_{j \in J}$ de mesures $\tau_j \geqslant 0$ portées par des compacts de X. On dit alors que l'ensemble $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathfrak{F}_1 , \mathfrak{F}_2)$ des fonctions $u \in \mathcal{C}(X)$, satisfaisant aux inégalités

(1) $$\int u \, d\sigma_i \leqslant u(x_i) \qquad \text{pour tout } i \in I ,$$

(2) $$\int u \, d\tau_j \leqslant 0 \qquad \text{pour tout } j \in J ,$$

est <u>associé</u> aux familles $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$. Evidemment, $\mathcal{K}$ est un cône convexe fermé semi-réticulé inférieurement dans $\mathcal{C}(X)$. Inversement, d'après un résultat de G. CHOQUET et J. DENY [1], tout cône convexe fermé semi-réticulé inférieurement est associé à deux familles $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$. Pour la démonstration, il suffit de supposer X compact.

Un premier objet de cette conférence a été de démontrer ce théorème en partant d'une proposition de <u>disjonction</u>, à savoir : Soit X compact, et soit $\mathcal{K}$ un tel cône dans $\mathcal{C}(X)$. Considérons l'adhérence $\mathcal{K}^*$ de l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(X)$ majorées par une fonction de $\mathcal{K}$. Alors $\mathcal{K}^*$ est un cône convexe héréditaire à gauche, tel que l'on ait $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^*$.

PROPOSITION (de disjonction).

(1) <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{C}(X) \cap \complement \mathcal{K}^*$, <u>il existe une mesure</u> $\tau \geqslant 0$ <u>sur</u> X <u>telle que l'on ait</u>

$$\int u \, d\tau \leqslant 0 \ \underline{\text{pour toute}} \ u \in \mathcal{K} \ \underline{\text{et}} \ \int f \, d\tau > 0 .$$

(2) <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{K}^* \cap \complement \mathcal{K}$, <u>il existe une mesure</u> $\sigma \geqslant 0$ <u>sur</u> X <u>et un point</u> $x \in X$ <u>ayant les propriétés suivantes</u> :

$$\int u \, d\sigma \leqslant u(x) \ \underline{\text{pour toute}} \ u \in \mathcal{K} , \qquad \sigma(\{x\}) = 0$$

<u>et</u>

$$\int f \, d\sigma > f(x) .$$

Le développement sera l'objet d'un article promis à la Revue de Mathématiques pures et appliquées.

Un deuxième objet de cette conférence a été de retrouver des résultats de S.GUBER concernant les cônes $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2)$ associés à deux familles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ telles que toute mesure σ_i de $\mathcal{F}_1$ possède une masse totale $\leqslant 1$. Ce sont exactement les cônes convexes fermés dans $\mathcal{C}(X)$ stables par rapport à l'opération

$$\text{(S)} \qquad (u , v) \to \inf(u , v + 1) .$$

La démonstration peut être basée sur la proposition de disjonction. Pour un cône convexe $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_+(X)$, la stabilité par rapport à (S) est équivalente à la stabilité par rapport à $u \to \inf(u , 1)$. C'est une opération bien connue en théorie de l'intégration.

Une conséquence du théorème de Guber est une série de théorèmes de stabilité, par exemple : Soit $\mathcal{K}$ un cône convexe fermé dans $\mathcal{C}(X)$ stable par rapport à (S). Soit $k \in \mathcal{C}(R^n)$ une fonction concave croissante telle que $k(0) = 0$. Alors la fonction

$$x \to k(u_1(x) , \ldots , u_n(x)) \qquad (x \in X)$$

appartient à $\mathcal{K}$ pour $u_1 , \ldots , u_n \in \mathcal{K}$.

On trouvera les détails du travail de GUBER dans les deux articles [2], [3] parus récemment.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave) et DENY (Jacques). - Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues, J. Math. pures et appl., 9e sér., t. 36, 1957, p. 179-189.

[2] GUBER (Siegfried). - Masstheoretische Kennzeichnung gewisser Funktionenkegel, Archiv der Math., t. 15, 1964, p. 58-70.

[3] GUBER (Siegfried). - Darstellungs- und Stabilitätssätze für Funktionenkegel, Math. Z., t. 86, 1964, p. 63-74.