Jacques Deny

Espaces de Gauss-Poincaré et espaces de Dirichlet

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 7 (1962-1963), exp. nº 4, p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1962-1963__7__A3_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
7e année, 1962/63, n° 4

15 novembre 1962

ESPACES DE GAUSS-POINCARÉ ET ESPACES DE DIRICHLET

par Jacques DENY

Résumé

Soit X un espace localement compact, et ξ une mesure de Radon positive sur X. On supposera ξ partout dense sur X. On appelle espace fonctionnel relatif à X et ξ, un espace de Hilbert réel H dont les éléments sont des (classes de) fonctions numériques sur X qui sont localement ξ-intégrables et telles que, à tout compact $K \subset X$, on puisse associer un nombre $A(K)$ tel que

$$\int_K |u| \, d\xi \leqslant A(K) \, \|u\| \qquad \text{pour toute } u \in H .$$

L'espace H est dit régulier si, en outre, $C \cap H$ est dense dans H et dans C, C étant l'espace des fonctions numériques continues à support compact sur X.

L'espace fonctionnel régulier H est appelé un espace de Dirichlet [1] si les contractions normales opèrent sur H ; d'une façon plus précise, si u est un élément de H, et si la fonction v est une contraction normale d'une fonction représentant u, alors v représente un élément (noté aussi v) de H, tel que l'on ait $\|v\| \leqslant \|u\|$.

Dans tout espace fonctionnel, on peut définir des "potentiels purs" : ce sont les éléments u caractérisés par la relation

$$\|u + v\| \geqslant \|u\| \qquad \text{quel que soit } v \in H , \ v \geqslant 0 .$$

Si H est un espace de Dirichlet, les potentiels purs sont positifs. A tout potentiel pur u on peut associer une mesure $\mu \geqslant 0$ bien déterminée, telle que $(u , v) = \int v \, d\mu$ pour toute $v \in H \cap C$. On notera U^μ le potentiel pur dont la mesure associée est μ. Ces définitions permettent de développer la théorie du potentiel dans les espaces de Dirichlet [1], et on peut démontrer un théorème du balayage et un théorème d'équilibre.

Le but de cet exposé est d'établir une sorte de réciproque à ces résultats. Soit H un "espace de Gauss-Poincaré", c'est-à-dire un espace fonctionnel régulier possédant les propriétés suivantes :

1° les potentiels purs sont positifs ;

2° le théorème du balayage est satisfait ;

3° le théorème d'équilibre est satisfait ;

alors H est un espace de Dirichlet.

La démonstration donnée repose sur de nombreux préliminaires techniques. On commence par "préciser" les éléments de H , par la méthode de la complétion fonctionnelle. Un représentant "précisé" de l'élément u de H est une fonction quasi-continue, c'est-à-dire telle que sa restriction au complémentaire d'un ouvert de capacité arbitrairement petite soit continue. L'introduction des éléments précisés permet de donner des énoncés "fins" (les ensembles exceptionnels étant de capacité nulle, et pas seulement de ξ-mesure nulle) ; elle permet surtout d'utiliser des méthodes de démonstration classiques en théorie du potentiel. Ainsi on établira un énoncé fin du théorème des condensateurs, qui servira à démontrer un lemme fondamental présentant peut-être quelque intérêt par lui-même, car il est peu connu même dans le cas classique de la théorie newtonienne. En voici l'énoncé :

Soit u un élément précisé de H , qui est positif et est la différence de deux potentiels purs U^{μ} et U^{ν} . Alors, la restriction de la mesure $\mu - \nu$ à l'ensemble des zéros de u est ≤ 0 .

Ce lemme permet de conclure assez facilement. La démonstration complète, qui est assez longue et fastidieuse, ne sera pas développée ici, car un résultat voisin, mais d'énoncé et de démonstration beaucoup plus simples, affirmant l'équivalence du principe complet du maximum et du "principe des contractions" dans une classe très générale d'espaces fonctionnels, fera l'objet d'une publication détaillée [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEURLING (A.) and DENY (J.). - Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 45, 1959, p. 208-215.

[2] DENY (J.). - Principe complet du maximum et contractions, Colloque international de théorie du potentiel [1964. Orsay] Ann. Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).